This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

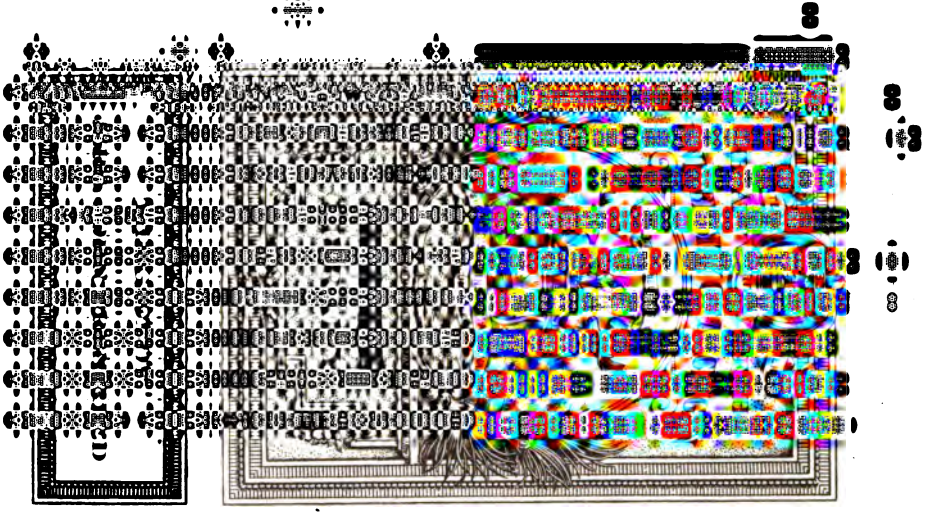
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.



QC
32
.F62
1897

Aufgaben

aus der Physik

nebst

einem Anhange, physikalische Tabellen enthaltend.

Holzſtiche

meiſt aus dem xylographiſchen Atelier

von Friedrich Vieweg und Sohn

in Braunſchweig.

Aufgaben
aus der Physik

nebst

einem Anhange, physikalische Tabellen enthaltend.

Zum Gebrauche
für
Lehrer und Schüler in höheren Unterrichtsanstalten und besonders beim Selbstunterricht

von

Prof. Dr. C. Fiedler,
Gymnasialprorektor a. D., Inhaber des Roten Adlerordens IV. Klasse.

Achte verbesserte und vermehrte Auflage
bearbeitet von

Prof. Dr. G. Krebs
in Frankfurt a. M.

Mit 74 in den Text eingedruckten Holzstichen.

Nebst besonders gedruckten Auflösungen.

Braunschweig,
Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn.
1897.

Alle Rechte, namentlich jenes der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten.

Gift
Mrs. John O. Reed
4-21-33

Aus der Vorrede zur ersten Auflage.

QA 1-33 H5E1

Man gelangt heutigestags mehr und mehr zu der Einsicht, daß der physikalische Unterricht in der Schule nicht auf Vortrag und Experiment sich beschränken dürfe, sondern von Übungen begleitet sein müsse, die das Gegebene und Entwickelte erst recht zum Eigentum des Schülers machen und ihn frei und lebendig darin sich bewegen lassen. Dem Versäumen solcher Übungen ist es mehrenteils zuzuschreiben, daß die Ergebnisse des physikalischen Unterrichtes diesem selbst noch nicht überall diejenige Stellung und Anerkennung erworben haben, welche ihm nicht etwa bloß wegen seiner sogenannten praktischen Nützlichkeit, sondern wesentlich auch um seiner geistbildenden Kraft willen gebühren.

Aus dieser Rücksicht hat der Verfasser schon seit einer Reihe von Jahren die vorliegenden Aufgaben zusammengestellt und bei seinem Unterricht benutzt. Das Interesse, mit welchem sie von seinen Schülern aufgenommen wurden, und der Wunsch, sie auf bequemere Weise gebrauchen zu können, haben ihn zur Veröffentlichung derselben in erweiterter Gestalt bestimmt und er glaubt, daß sie Lehrenden und Lernenden willkommen und nützlich sein werden.

Die Aufgaben sind mehrenteils kalkulativer und geometrisch-konstruktiver Art. Denn der Verfasser ist der Ansicht, daß der Unterricht in der Physik schon von vornherein soviel als möglich auf Zahl und Maß Rücksicht nehmen müsse. Er will damit nicht sagen, daß sie schon bei ihrem ersten Auftreten „mathematisch begründet“ werden solle, aber er verlangt, daß den physikalischen Anschauungen und Begriffen des Schülers von vornherein durch Maß und Zahl die gehörige Bestimmtheit und Klarheit gegeben und daß er allmählich angeleitet werde, die Beziehungen zwischen den Erscheinungen der Außenwelt in die einfache, das genaueste Verständnis fordernde und darum fördernde Sprache der Mathematik zu übertragen und die in ihr ausgedrückten Gesetze zu erkennen. Dadurch gewinnt überdies nicht bloß die physikalische, sondern auch die mathematische Erkenntnis, und diese Rückwirkung verdient weit mehr Beachtung in unseren Schulen, als ihr seither zu Teil geworden ist.

Dem Verfasser hat bei der Anlage dieser Sammlung der Gedanke vorgeschwebt, dadurch für den physikalischen Unterricht ein ähnliches Hilfsmittel zu beschaffen, wie sie der Sprach- und Mathematik-Unterricht in Übungsbüchern und Aufgabensammlungen schon lange besitzt.

Das Buch setzt, seinem ganzen Inhalt nach, die Kenntnis der Elementargeometrie, der Algebra bis einschließlich der Gleichungen des zweiten Grades, sowie die Anfangsgründe der Trigonometrie voraus.

Indem nun der Verfasser dieses Buch der Öffentlichkeit übergiebt, ist er weit davon entfernt, zu glauben, daß es allen Anforderungen entsprechen werde, und er wird jede desfallsige Ausstellung dankbar entgegennehmen; das aber hofft er, daß man seinen Ursprung inmitten der Schule nicht verkennen und einen Fortschritt in der Beschaffung von Hilfsmitteln für den physikalischen Unterricht darin erblicken werde.

Schließlich noch der Verlagshandlung den gebührenden Dank für die ihrer würdige Ausstattung des Buches!

Hanau, am 6. November 1850.

Dr. Fliedner.

Vorrede zur sechsten Auflage.

Wie sich der Verfasser die Verbesserung des vorliegenden Buches bei jeder neuen Auflage hat angelegen sein lassen, so insbesondere bei der sechsten, indem er die Muße, die ihm seit Niederlegung seines Lehramts im vorigen Herbst geworden ist, dazu benutzt hat, das Buch einer genauen Durchsicht zu unterziehen. Dabei hat er die Zahl der Aufgaben nur um wenige vermehrt, aber viele durch zweckmäßiger erscheinende ersetzt, andern eine bestimmtere und deutlichere Fassung gegeben und auch einige Unordnungen im Druck beseitigt, die er in der vorigen Auflage bei seinem damaligen Augenleiden übersehen hatte. Doch ist dadurch die Reihenfolge und Numerierung der Aufgaben in den meisten Abschnitten wenig verändert worden — die neuen sind meist am Schluß hinzugefügt —, nur in der zweiten Hälfte des Abschnitts XX hat eine größere Änderung in der Reihenfolge stattgefunden, deren Zweckmäßigkeit man nicht verkennen wird.

Durch Hinzufügung einiger instruktiven Aufgaben über relative Bewegung im Abschnitt I, über Wassermotoren im Abschnitt XVI, über die Anwendung des Pronyschen Zaums im Abschnitt XI, über die Prismen des Spektroskops im Abschnitt XXIX u. s. w. glaubt der Verfasser Anfängern im Studium der Naturwissenschaften und der Technik einen Dienst erwiesen zu haben. Zugleich war er bestrebt, das vorliegende Buch in möglichste Übereinstimmung mit seinem Lehrbuch der Physik zu bringen, das vor vier Jahren in gleichem Verlage erschienen ist und von welchem eine zweite verbesserte und vermehrte Auflage fast zugleich mit dieser sechsten Auflage der Aufgaben erscheint. Dadurch ist natürlich bei der Einrichtung dieser Aufgabensammlung ihr Gebrauch neben einem andern Lehrbuch nicht verhindert.

Hanau, am 26. Juli 1880.

Dr. Fliedner.

Vorrede zur siebenten Auflage.

Die bedeutenden Neuerungen auf dem Gebiete des Magnetismus und der Elektrizität erforderten eine vollständige Umarbeitung der einschlägigen Aufgaben. Zugleich schien es geboten, das absolute Maßsystem (C. G. S.) nebst den Dimensionen der Hauptsache nach aufzunehmen. Einzelne Entwickelungen sind, weil in jedem Lehrbuch enthalten, weggelassen, dafür aber eine Anzahl neuer Aufgaben zugesetzt worden.

Der Unterzeichnete hofft, daß die seit langem rühmlichst bekannte und viel gebrauchte Aufgabensammlung seines verstorbenen Freundes auch in ihrem neuen Gewande sich im Gebrauch erhalten und Nutzen stiften werde.

Frankfurt a. M., im Juni 1891.

Prof. Krebs.

Vorrede zur achten Auflage.

Nachdem in der siebenten Auflage alle wesentlichen Neuerungen, namentlich auf dem Gebiete des Magnetismus und der Elektrizität, Berücksichtigung gefunden, brauchten in dieser neuen Auflage nur einige wenige Zusätze gemacht zu werden; am Ende der Elektrizitätslehre sind sechs Aufgaben (Nr. 72 bis 77) über den Wechselstrom hinzugefügt worden; die sonstigen kleinen Änderungen sind ohne Belang.

Frankfurt a. M., im Januar 1897.

Prof. Krebs.

Inhalt.

		Seite
I.	Geradlinige Bewegung der Körper	1
	Gleichförmige Bewegung	1
	Zusammensetzung und Zerlegung gleichmäßiger Bewegungen	2
	Gleichmäßig beschleunigte Bewegung	4
	Relative Bewegung	7
II.	Maß der Kräfte und ihrer Effekte	8
III.	Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte	13
IV.	Schwerpunkt der Körper	17
V.	Gleichgewicht der Kräfte an den einfachen Maschinen	18
	Mathematischer Hebel	18
	Physischer Hebel	20
	Wagen	21
	Rad an der Welle	22
	Rolle mit Seil	24
	Schiefe Ebene, Keil und Schraube	25
VI.	Fall und Wurfbewegung der Körper	27
	Freier Fall der Körper	27
	Fall der Körper auf schiefer Ebene	27
	Wurfbewegung	28
VII.	Die Zentralbewegung, die Ablenkungs- oder Zentripetalkraft und die Schwerkraft	31
VIII.	Das Trägheitsmoment der Körper	34
IX.	Das Pendel	36
	Einfaches Pendel	36
	Kegelpendel	38
	Zusammengesetztes Pendel	38
X.	Stoß der Körper	39
XI.	Die Reibung	42
XII.	Elastizität und Festigkeit der Körper	45
XIII.	Gleichgewicht und Druck tropfbarer Flüssigkeiten in Gefäßen	46
XIV.	Gleichgewicht zwischen tropfbarflüssigen und starren Körpern	49
XV.	Bestimmung des spezifischen Gewichts starrer und flüssiger Körper	51
XVI.	Bewegung des Wassers	53
	Ausfluß des Wassers aus Öffnungen und kurzen Röhren	53
	Ausfluß des Wassers aus langen Röhren	54
	Stoß des Wassers gegen feste Körper nebst Anwendungen	55

		Seite
XVII.	Gleichgewicht und Druck der Luft	57
	Druck der Atmosphäre. — Mariottesches Gesetz. — Barometer. — Manometer	57
	Luftpumpe. — Wasserpumpe	61
	Luftballon	64
XVIII.	Bewegung und Widerstand der Luft	64
XIX.	Schall	66
	Fortpflanzung des Schalles in der Luft ohne Rücksicht auf die Temperatur. — Schallwelle	66
	Schallerregung. — Tonlehre	68
	Fortpflanzung des Schalles in verschiedenen Körpern und bei verschiedenen Temperaturen	71
XX.	Ausdehnung der Körper durch die Wärme	72
	Berechnung der Ausdehnung bei gegebenem Ausdehnungskoeffizienten	72
	Thermometrie und Bestimmung des Ausdehnungskoeffizienten	77
	Bestimmung des spezifischen Gewichtes der Körper mit Rücksicht auf ihre Ausdehnung durch die Wärme	80
XXI.	Wärmekapazität und Änderung des Aggregatzustandes der Körper	81
XXII.	Dichtigkeit, Volumen und Expansivkraft der Dämpfe, insbesondere der Wasserdämpfe	84
XXIII.	Verbrennung und Heizung	87
XXIV.	Zur Theorie der Wärme	88
XXV.	Geradlinige Fortpflanzung des Lichtes. — Sehwinkel. — Schatten. — Geschwindigkeit des Lichtes	90
XXVI.	Lichtstärke und Beleuchtung. — Photometrie	94
XXVII.	Reflexion des Lichtes	96
XXVIII.	Brechung des Lichtes	101
	Brechung des Lichtes im allgemeinen	101
	Brechung des Lichtes durch Prismen	104
	Brechung des Lichtes durch Linsengläser	105
XXIX.	Zerlegung des Lichtes	109
	Zerlegung des Lichtes durch Prismen. — Farben	109
	Regenbogen	110
	Achromatische Prismen und Linsen, Doppelprismen mit gerader Durchsicht	112
XXX.	Optische Instrumente	115
XXXI.	Magnetismus	120
XXXII.	Elektrizität	123
XXXIII.	Einige Aufgaben aus der Chemie	132

Anhang.

Tabelle	1.	Längen- und Flächeneinheiten	135
„	2.	Körper- und Hohlgemäße	137
„	3.	Gewichtseinheiten	138
„	4.	Angabe einiger Geschwindigkeiten (in der Sekunde)	139
„	5.	Zusammenstellung einiger in der Physik oft gebrauchten Werte	140
„	6.	Beobachtete Länge des Sekundenpendels in verschiedenen Breiten	141
„	7.	Elastizität und absolute Festigkeit einiger Körper	142
„	8.	Reibungs-Koeffizienten	144

Seite

Tabelle 9. Spezifische Gewichte 145
„ 10. Kontraktions-Koeffizienten beim Ausfluß von Flüssigkeiten. 148
„ 11. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in verschiedenen Körpern 148
„ 12. Ausdehnungs-Koeffizienten der Wärme. 149
„ 13. Spezifische Wärme der Körper 151
„ 14. Relative Wärme einiger Körper 153
„ 15. Schmelztemperatur und latente Schmelzwärme einiger Körper . . . 154
„ 16. Siedepunkte und latente Verdampfungswärme einiger Körper. Siedepunkte des reinen Wassers bei verschiedenen Barometerständen und in verschiedenen Höhen 154
„ 17. Einige Kälte erregende Mischungen 156
„ 18. Spannkraft und Dichtigkeit des Wasserdampfes bei verschiedenen Temperaturen 156
„ 19. Wärmeeffekt einiger Stoffe 159
„ 20. Wärmeleitungsvermögen einiger Körper 160
„ 21. Lichtbrechungsverhältnisse und atmosphärische Refraktion. 160
„ 22. Brechungsvermögen und Zerstreuungsvermögen einiger Körper . . . 162
„ 23. Brechungsexponenten für die einzelnen Farbestreifen im Spektrum . 162
„ 24. Verhältnis der totalen und partiellen Dispersion einiger Substanzen 163
„ 25. Wellenlänge des Lichtes in der Luft und zugehörige Oszillationszahl in der Sekunde 163
„ 26. Magnetische Deklination, Inklination und horizontale Intensität an einigen Orten 164
„ 27. Spezifischer Leitungswiderstand gegen den elektrischen Strom. . . . 164
„ 28. Die Atomgewichte der einfachen Körper. 165
„ 29. Produkte der spezifischen Wärme und des Atomgewichts der Elemente 167

Abgekürzte Maß- und Gewichts-Bezeichnungen.

A. Längenmaße:	Kilometer	km
	Meter	m
	Centimeter	cm
	Millimeter	mm
B. Flächenmaße:	Quadratkilometer	qkm
	Hektar	ha
	Ar	a
	Quadratmeter	qm
	Quadratcentimeter	qcm
	Quadratmillimeter	qmm
C. Körpermaße:	Kubikmeter	cbm
	Hektoliter	hl
	Liter	l
	Kubikcentimeter	ccm
	Kubikmillimeter	cmm
D. Gewichte:	Tonne	t
	Kilogramm	kg
	Gramm	g
	Milligramm	mg

Aus den vorigen Auflagen sind in einigen wenigen Aufgaben auch Decimeter = dm hier noch stehen geblieben.

Noch fügen wir folgende Abkürzungen hinzu:

Fl.	bedeutet:	Fliedner, Lehrbuch der Physik.
Kr. Gr.	„	Krebs, Grundriß der Physik.
Kr. Ltf.	„	Krebs, Leitfaden der Physik.

I. Geradlinige Bewegung der Körper.

(Ohne Beachtung der Reibung und des Luftwiderstandes.)

Gleichförmige Bewegung.

1. Ein Dampfwagen hat eine gleichbleibende Geschwindigkeit von 10 m in der Sekunde, welchen Weg legt er in einer halben Stunde zurück?
2. Wie groß ist die mittlere Geschwindigkeit eines Pferdes, das während einer Stunde einen Weg von einer Meile (= 7420 m) zurücklegt?
3. Wie lange ist ein gewöhnlicher und wie lange ein Schnellzug gefahren, wenn beide zwei Meilen in gleichförmiger Bewegung zurückgelegt haben? (Siehe Tabelle 4.)
4. Die Geschwindigkeit des Lichtes ist ungefähr 40000 Meilen, die des Schalles in der Luft 332 m und die des elektrischen Stromes in einem Kupferdraht 40000 Meilen in der Sekunde. Es fragt sich
   a) in welcher Zeit ein Lichtstrahl von der Sonne zur Erde gelangt, diese Entfernung zu 20 Millionen Meilen gerechnet?
   b) in welcher Zeit dagegen ein gesprochenes Wort den umgekehrten Weg zurücklegen würde, wenn es so weit dringen könnte?
   c) wie vielmal in einer Sekunde ein elektrisches Stromelement den Erdäquator = 5400 Meilen umkreisen kann?
5. Ein auf der Oberfläche eines Flusses schwimmender Körper legt während drei Minuten einen Weg von 144 m zurück, wie groß berechnet sich daraus die Geschwindigkeit des Wassers an der Oberfläche des Flusses?
6. Einem Boten, der in einer Stunde 4000 m zurücklegt, folgt zwei Stunden später ein zweiter nach, der in einer Stunde 4800 m zurücklegt; wann und wo werden sie zusammenkommen?
7. Durch welche einfache geometrische Figur lassen sich die Beziehungen zwischen Weg, Zeit und Geschwindigkeit bei der gleichmäßigen Bewegung ausdrücken?
8. Ein Reiter hat zuerst sechs Minuten lang eine Geschwindigkeit von 0,9 m, dann sieben Minuten lang 3,4 m, dann fünf Minuten lang 1,2 m und schließlich drei Minuten lang 4,2 m Geschwindigkeit; wie groß ist der Gesamtweg und die mittlere Geschwindigkeit?

Zusammensetzung und Zerlegung gleichförmiger Bewegungen.

9. Wenn ein Mensch auf dem Verdeck eines Schiffes mit einer Geschwindigkeit von 1,5 m in der Richtung des Schiffes geht, und das Schiff selbst eine Geschwindigkeit von 2 m hat, wie groß ist die Geschwindigkeit des Menschen auf der als fest angenommenen Erde?
10. Mit welcher Geschwindigkeit bewegt er sich aber stromabwärts, wenn er auf demselben Schiffe mit 1,5 m Geschwindigkeit stromaufwärts geht?
11. Auf einem Flusse, der mit einer Geschwindigkeit von 0,3 m fließt, erhält ein Kahn durch die Ruderer nach einer auf die Richtung des Stroms senkrechten Richtung eine mittlere Geschwindigkeit von 0,4 m. Es soll die Richtung und Größe der resultierenden Geschwindigkeit des Kahns durch Zeichnung und Rechnung gefunden werden.
12. Man soll durch Zeichnung oder auch Rechnung die mittlere Geschwindigkeit v eines Körpers finden, der nach einer Richtung eine Geschwindigkeit von 7 m, nach einer andern gegen jene um 75° geneigten Richtung eine Geschwindigkeit von 8 m hat.
13. Ein Körper erhält nach einer Richtung eine Geschwindigkeit von 18,25 m, nach einer andern, die mit jener einen Winkel von 112° 44′ einschließt, eine Geschwindigkeit von 12,45 m. Welche Richtung und welche Größe hat die resultierende Geschwindigkeit?
14. Ein Körper hat eine Geschwindigkeit von 24 m; diese ist zusammengesetzt aus einer Geschwindigkeit von 12 m, welche mit jener einen Winkel von 60° bildet; man soll durch Zeichnung die Richtung und Größe der zweiten Seitengeschwindigkeit finden.
15. In einem bewegten Eisenbahnwagen beobachtet man, daß die bei windstillem Wetter lotrecht fallenden Regentropfen schief herabzufallen scheinen, und zwar gegen die Richtung des Wagens unter spitzem Winkel geneigt. Wenn nun der durch das rechteckige Fenster sichtbare Weg eines Regentropfens ein dreieckiges Stück des Fensters abschneidet, in welchem die horizontale Kathete = 0,6 m, die vertikale = 0,5 m, während die Geschwindigkeit des Wagens = 13,5 m ist, wie groß berechnet sich daraus die (als gleich bleibend angenommene) Geschwindigkeit des herabfallenden Regens?
16. Eine Kugel kommt mit einer Geschwindigkeit von 6 m an eine Bahn, welche mit ihrer bisherigen einen Winkel von 152° 44′ bildet; mit welcher Geschwindigkeit tritt sie auf die neue Bahn über?
17. Ein Schiff werde auf einem stillstehenden Wasser in einer gegen seine Längenachse um 60° geneigten Richtung mit einer Kraft gezogen, die demselben nach dieser Richtung eine Geschwindigkeit von 2 m erteilen würde, wenn nicht der Widerstand des Wassers auf der Seite zu überwinden wäre. Welche Geschwindigkeit wird das Schiff in der Richtung seiner Längenachse dadurch erhalten?

18. a) Durch Zeichnung darzuthun: Wenn man die Geschwindigkeit AB, Fig. 1, eines Körpers A in Komponenten von beliebiger Richtung (die Richtungen seien AV und AW) zerlegt, und dann jede derselben wieder in Komponenten, deren Richtungen in die aufeinander senkrechten Linien XX_1

Fig. 1.

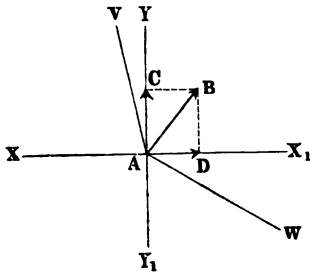
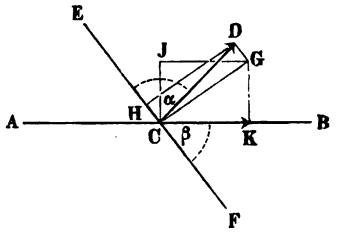


Fig. 2.



und YY_1 fallen, so ist die (algebraische) Summe der schließlich erhaltenen Seitengeschwindigkeiten dieselbe, als wenn man AB unmittelbar in AC und AD zerlegt.

b) Zum Beweis durch Rechnung setze man

$$\sphericalangle XAB = \alpha, \quad \sphericalangle XAV = \beta,$$

und den überstumpfen

$$\sphericalangle XAW = \gamma.$$

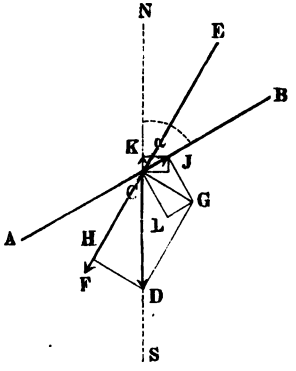
19. Ein Segelschiff AB (Fig. 2) würde auf einem stillstehenden Wasser durch einen Wind mit der Geschwindigkeit $CD = c = 1\,\text{m}$ fortgetrieben werden, wenn die Richtung des Schiffes die des Windes wäre und das Segel senkrecht auf dieser Richtung stände. Wenn aber das Segel EF mit der Richtung des Windes den Winkel $DCE = \alpha = 75^0$ und mit der Richtung des Schiffes den Winkel $BCF = \beta = 60^0$ einschließt, wie groß wird dann die Geschwindigkeit des Schiffes durch Zeichnung oder Rechnung gefunden? Im letztern Falle möge auch noch die Frage beantwortet werden, wie das Segel gestellt werden muß, damit das Schiff unter Beibehaltung seiner Richtung, sowie der Richtung und Stärke des Windes die größte Geschwindegkeit erhalte?

20. Senkrecht gegen den Lauf eines Schiffes, welches von Süd nach Nord segelt, weht ein Ostwind, welcher dem Schiffe eine Geschwindigkeit von $c = 2\,\text{m}$ nach Westen geben würde, wenn das Segel senkrecht gegen die Windrichtung gestellt würde. Damit aber das Schiff den obigen Lauf einhalte, stellt man das Segel so, daß es mit der Nordrichtung des Schiffes einen Winkel von 45^0 einschließt, und zwar von Südwest nach Nordost steht; mit welcher Geschwindigkeit wird sich das Schiff nach Norden bewegen?

21. Dem vorigen von Süd nach Nord steuernden Schiffe weht ein Nordwind entgegen, der ihm, wenn das Segel senkrecht auf die Windrichtung gestellt wäre, eine Rückwärtsbewegung von $CD = c = 2\,\text{m}$ Geschwindigkeit

geben würde. Man laviert daher, wählt nämlich den Lauf des Schiffes AB (Fig. 3) so, daß er von der Nordrichtung um einen Winkel $NCB = 60^0$ nach Osten abweicht, und stellt das Segel EF so, daß es diesen Winkel von 60^0 halbiert, also mit der Nordrichtung einen Winkel von 30^0 nach der Ostseite hin einschließt. Mit welcher Geschwindigkeit (x) bewegt sich das Schiff in der gewählten Richtung CB und mit welcher (y) in der Nordrichtung CN?*)

Fig. 3.



22. Angenommen, ein Schiff werde von einem Punkte A durch eine Meeresströmung mit der Geschwindigkeit $c_1 = 2{,}5$ Meilen in der Stunde in einer südöstlichen Richtung fortgetrieben, die mit dem Parallelkreis durch A einen Winkel $\alpha = 30^0$ einschließt, zugleich aber auch durch einen Wind mit der Geschwindigkeit $c_2 = 4$ Meilen in der Stunde in einer nordwestlichen Richtung bewegt, die gegen den durch A gehenden Meridian um den Winkel $\beta = 40^0$ geneigt ist; in welcher Richtung würde das Schiff segeln, und in welcher Entfernung vom Punkte A sowie von den genannten Kreisen durch A würde es sich nach einer Stunde befinden? (Der in Betracht kommende Teil der Erdoberfläche als eben angenommen.)

23. Ein Gefäß mit Wasser bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von 19 m, während Wasser aus demselben mit einer Geschwindigkeit von 25 m und in einer Richtung ausfließt, die mit jener einen Winkel von 130^0 bildet. Es ist die Richtung und Größe der resultierenden Geschwindigkeit zu finden.

Bemerkung. Als Aufgaben für Zusammensetzung und Zerlegung von mehr als zwei Geschwindigkeiten können die Aufgaben 9 bis 14 in III. benutzt werden, wenn man dort Geschwindigkeit statt Kraft und Meter oder Fuß statt Kilogramm oder Pfund setzt.

Gleichmäßig beschleunigte Bewegung.

24. Ein frei fallender Körper hat eine Beschleunigung von 9,81 m**), wie groß ist seine Geschwindigkeit nach 4 Sekunden? Wie groß nach 10 Sekunden?

25. Welche Strecke durchfällt ein im luftleeren Raum von der Ruhe aus frei fallender Körper während 4 und während 10 Sekunden?

26. Wenn man durch irgend ein Mittel die Endgeschwindigkeit eines frei fallenden Körpers = 29,43 m und die Fallzeit = 3 Sekunden gefunden

*) Diese und die vorhergehende Aufgabe sind der Trigonometrie von Prof. Helmes entnommen, dessen mathematischen Lehrbücher sich auch durch zweckmäßig gewählte physikalische Aufgaben auszeichnen.

**) Bestimmung der Fallbeschleunigung siehe in VI, 4; II, 14 u. IX, 5.

hätte, wie groß würde sich daraus die Beschleunigung des Falles berechnen?

27. Wie lange wird der Fall eines Körpers gedauert haben, der mit einer Geschwindigkeit von 100 (200, 300) m auffällt? Und welchen Weg wird er zurückgelegt haben?

28. Wie groß ist die Beschleunigung einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung, bei welcher in 20 Sekunden eine Strecke von 1600 m zurückgelegt wird?

29. Wenn ein Körper in zwei Minuten einen Weg von 20 000 m mit gleichmäßig beschleunigter Bewegung durchläuft, welchen Raum legt er in der ersten Sekunde zurück?

30. Welchen Weg legt ein frei fallender Körper in der $n$ten, beispielsweise in der zwölften, Sekunde seines Falles zurück?

31. Wie hoch steigt eine Kugel, welche mit einer Geschwindigkeit von 450 m lotrecht aufwärts geschossen wird? Welche Zeit braucht sie dazu?

32. Welche Geschwindigkeit erlangt ein Körper nach sechs Sekunden, und welchen Weg legt er zurück, wenn er mit 50 m Geschwindigkeit lotrecht abwärts geworfen wird?

33. Wenn bei der Atwoodschen Fallmaschine die von den Gewichten durchlaufene Strecke während der ersten Sekunde 2 cm ist, wie groß ist der durchlaufene Weg nach 2, 3, 4, 5 u. s. w. Sekunden?

34. Wenn die Gewichte einer Atwoodschen Fallmaschine innerhalb fünf Sekunden eine Strecke von 75 cm mit gleichmäßig beschleunigter Bewegung zurücklegen, wie groß ist die Beschleunigung p? Und wie groß ist die erlangte Endgeschwindigkeit v?

35. Die gleichen Gewichte bei einer Fallmaschine betragen je 200 g; wie groß muß das Übergewicht sein, wenn die Fallbeschleunigung 4 cm betragen soll?

36. Eine auf einer schiefen Ebene herabrollende Kugel gewinnt vom Anfang der Bewegung an während jeder Sekunde einen Geschwindigkeitszuwachs von 5 m; wie groß ist ihre Geschwindigkeit nach 10 Sekunden, und welchen Weg hat sie dann zurückgelegt?

37. Wie groß würde aber die Geschwindigkeit und der Weg dieser Kugel sein, wenn sie vor dem Geschwindigkeitszuwachs bereits eine konstante Geschwindigkeit von 4 m 20 Sekunden lang gehabt hätte?

38. Ein Körper fällt von 200 m Höhe frei herab, während ein anderer von unten mit einer Geschwindigkeit von 65 m lotrecht aufwärts geworfen wird; nach wieviel Sekunden, und in welcher Höhe über dem Boden begegnen sie einander?

39. Eine Kanonenkugel verläßt den Lauf einer Kanone, deren Länge = 1,75 m ist, mit einer Geschwindigkeit von 450 m; wie groß ist ihre Beschleunigung und ihre Bewegungsdauer im Laufe?

40. Eine Lokomotive hat in einem bestimmten Augenblick eine Geschwindigkeit von 10 m. Sie werde nun so gebremst, daß sie in jeder Sekunde 0,4 m an Geschwindigkeit verliert; wie groß wird ihre Geschwindigkeit nach 20 Sekunden sein? Und wie groß der während dieser Zeit zurückgelegte Weg?

41. Wie groß würde aber die Geschwindigkeitsabnahme jener Lokomotive während jeder Sekunde sein, wenn sie aus der Geschwindigkeit von 10 m binnen 20 Sekunden zum Stillstehen gebracht würde?

42. Eine Lokomotive bewegt sich eine Zeitlang mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit von $c = 2$ m, alsdann wird ihre Bewegung gleichmäßig beschleunigt und von diesem Augenblicke an legt sie einen Weg von $s = 150$ m binnen $t = 20$ Sekunden zurück. Wie groß ist die ihr erteilte Beschleunigung p und ihre Endgeschwindigkeit v?

43. Wie hoch wird ein Körper gestiegen sein, der, vertikal in die Höhe geworfen, nach 16 Sekunden wieder zur Erde kommt? Wie groß war seine Anfangsgeschwindigkeit?

44. Wie hoch steigt ein Körper, der von der Hand mit einer Geschwindigkeit von 25 m in die Höhe geworfen wird, in vier Sekunden?

45. Ein frei fallender Körper hat in einem gewissen Punkt seiner Bahn eine Geschwindigkeit von 40 m, in einem tiefer gelegenen aber eine von 150 m. In welcher Zeit kommt der Körper von dem oberen zu dem unteren Punkt und wie groß ist die Entfernung zwischen beiden?

46. a) Nach welcher Zeit t wird ein mit der Geschwindigkeit $c = 36$ m vertikal aufwärts geworfener Körper in einer Höhe $h = 54$ m sich befinden?

b) Der in a) gebrauchten Formel läßt sich die Gestalt geben

$$t = \frac{c}{g} \pm \sqrt{\frac{2\left(\frac{c^2}{2g} - h\right)}{g}},$$

worin die bemerkenswerten einzelnen Zeitabschnitte deutlich erkennbar sind. Es sollen diese angegeben werden. (Nach Helmes' Arithmetik.)

47. Wie groß ist die Tiefe eines Brunnens, wenn man einen Stein, den man in einem bestimmten Augenblick hineinfallen läßt, nach t Sekunden auffallen hört, und wenn man berücksichtigt, daß der Schall in jeder Sekunde einen Raum von m Meter mit gleichförmiger Geschwindigkeit zurücklegt?

48. In Schweden soll es Höhlen von solcher Tiefe geben, daß man einen hinabgefallenen Stein erst nach $t = 25$ Sekunden auffallen hört. Wie tief sind diese Höhlen, wenn die Geschwindigkeit des Schalls $m = 333$ m ist? (Gerstner.)

49. Ein Meteorstein kommt $t = 3$ Sekunden später, als man das Meteor in der Luft zerplatzen gehört hatte, auf die Erde. In welcher Höhe zersprang das Meteor, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalls $m = 333$ m angenommen?

50. Durch welche einfache geometrische Figur lassen sich die Beziehungen zwischen Zeit, Endgeschwindigkeit und Weg bei der gleichmäßig beschleunigten Bewegung ausdrücken?

Relative Bewegung.

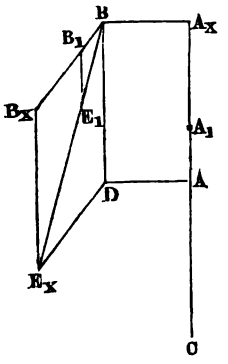
51. Welche Bewegung muß ein Mensch machen, der auf einem Schiffe fährt, falls er zugleich in relativer Bewegung in Beziehung auf einen bestimmten Punkt des Schiffes und in relativer Ruhe in Beziehung auf einen Gegenstand am Ufer sein soll?

52. a) Zwei in Bewegung befindliche Punkte ändern ihre relative Lage nicht, wenn man ihnen eine gemeinsame Bewegung (gleiche und parallele Geschwindigkeiten) zuteilt. Beweis!

53. b) Würde sich die relative Lage zweier auf der Erde sich bewegender Körper ändern, wenn die Erde plötzlich still stände?

Die Lage zweier Punkte A und B (Fig. 4) ist gegeben. Der Punkt A legt in der Zeit t mit gleichmäßiger Geschwindigkeit die Strecke AA_x und der Punkt B in derselben Zeit die Strecke BB_x zurück. Man soll durch Zeichnung I. die relative Bewegung des Punktes B in Beziehung auf A, und II. umgekehrt die relative Bewegung des Punktes A in Beziehung auf B finden

Fig. 4.



54. Die Lage zweier Punkte A und B ist gegeben. Ein Mensch bewegt sich mit gleichmäßiger Geschwindigkeit von A in einer gebrochenen Linie, blickt aber fortwährend nach einem außerhalb seines Weges liegenden festen Punkt B und denkt sich dabei seine Person in Ruhe. Es soll der Weg gezeichnet werden, den ihm der Punkt B zu beschreiben scheint. — Scheinbare Bewegung der Fixsterne.

55. Eine Kugel wird senkrecht gegen die eine Seitenwand eines mit 4 m Geschwindigkeit fahrenden Schiffes geschossen; die Breite des Schiffes beträgt 15 m und die Geschwindigkeit der Kugel, nachdem sie die erste Seitenwand durchbohrt, noch 10 m; welchen Winkel bildet die Verbindungslinie der Stellen, wo die Kugel die beiden Seitenwände getroffen, mit der Querachse des Schiffes? In welcher Zeit durchfliegt die Kugel das Schiff? Um wieviel liegt das Loch in der zweiten Seitenwand hinter dem in der ersten?

56. Ein Körper (Eisenbahnwagen) A bewegt sich (Fig. 5, a. f. S.) mit der gleichbleibenden Geschwindigkeit $c_1 = 15$ m in der Richtung der West-Ost-Linie WO. Ein zweiter Körper B, dessen anfängliche Lage gegen A durch die Entfernung $AB = d = 20$ m und den Winkel $BAO = \alpha = 60^0$ bestimmt ist, geht gleichzeitig mit der Geschwindigkeit $c_2 = 10$ m in einer Richtung, welche die Linie WO unter einem Winkel $\beta = 45^0$ schneidet. Welche Richtung gegen die West-Ost-Linie hat die relative Bewegung des Körpers B in Beziehung auf den Körper A, und wie groß ist diese Bewegung während $t = 60$ Sekunden?

57. Die Lage zweier Körper A und B ist gegeben. Der Körper A bewegt sich in der Richtung AX (Fig. 6) mit der gleichbleibenden Geschwindigkeit c_1; vom Körper B, der gleichzeitig abgeht, ist aber nur die Geschwindigkeit c_2 bekannt. Es fragt sich, in welcher Richtung sich B bewegen muß, um auf A zu treffen, und in welchem Punkte dies geschieht?

Fig. 5.

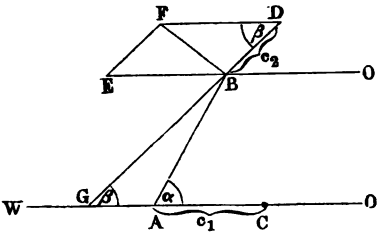
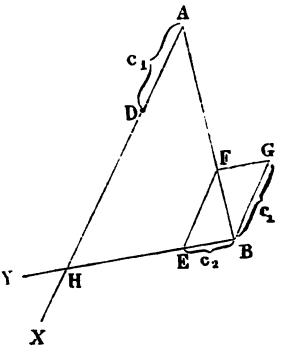


Fig. 6.



58. Nehmen wir an, eine unter dem Aequator befindliche Festung werde von Osten her durch ein Geschütz beschossen, das der Kugel dieselbe Geschwindigkeit erteilt, welche ein Punkt der Erdoberfläche unter dem Äquator besitzt (nämlich nahe 460 m); wie würde ein Beobachter von der Sonne her, abgesehen von der Bewegung im Weltraum, die Bewegung der Festung und der Geschützkugel beurteilen?

II. Maß der Kräfte und ihrer Effekte.

Die Fundamentalgrößen des irdischen Maßsystems sind Kraft, Länge (Weg) und Zeit. Als Einheit der Kraft gilt das Kilogrammgewicht, als Einheit der Länge das Meter und als Einheit der Zeit die Sekunde.

Die Einheit der Masse ist diejenige, welche von der Einheit der Kraft die Einheit der Beschleunigung erfährt.

1. Welche Wassermasse ist hiernach als Einheit der Masse zu nehmen?
2. Wie viel Masseneinheiten enthält ein Körper, der ein Gewicht von 29,43 kg hat?

3. a) Auf einer horizontalen Ebene befindet sich eine Masse von 80 kg Gewicht in gleichmäßig beschleunigter Bewegung, und ihre Beschleunigung sei = 10 m. Wie groß ist die bewegende Kraft*)?

b) Wenn aber jene Masse mit einer Kraft von 15 kg fortbewegt würde, wie groß würde dann die Beschleunigung sein?

4. Auf einen Körper von 200 kg Gewicht wirkt 20 Sekunden lang eine Kraft von 30 kg; welche Geschwindigkeit erlangt er?

5. Auf welche Geschwindigkeit würde aber dieser Körper kommen, wenn er vor Einwirkung jener Kraft schon 10 m Geschwindigkeit gehabt hätte?

6. Welche konstante Kraft ist erforderlich, um einen Wagen von 200 kg Gewicht auf horizontaler glatter Bahn aus dem Zustande der Ruhe in eine Geschwindigkeit von 5 m innerhalb einer Minute zu versetzen?

7. Welchen Druck erleidet eine Hand, die ein Gewicht von 2 kg trägt, wenn sie sich mit einer Beschleunigung von 0,5 m auf- oder abwärts bewegt?

8. Mit welcher Beschleunigung müßte sich die Hand aufwärts bewegen, wenn sie den doppelten Druck, mit welcher abwärts, wenn sie gar keinen Druck des auf ihr liegenden Gewichts empfinden sollte?

9. An den Enden eines gewichtslosen, vollkommen biegsamen Fadens, der über eine Rolle gelegt ist, sind zwei Massen befestigt, wovon die eine 5, die andere 3 kg wiegt. Diese Massen werden zuerst festgehalten und dann in einem bestimmten Augenblick losgelassen, worauf die eine herabsinkt, während die andere in die Höhe steigt. Wie groß ist die Beschleunigung?

10. Bei einer Atwoodschen Fallmaschine hat das Übergewicht in Bewegung zu setzen: a) seine eigene Masse, b) die beiden durch einen Faden verbundenen, gleich schweren Metallmassen, c) das Rädchen, in dessen Schnurlauf der Faden liegt, und für welches man eine Masse in Rechnung bringen kann, deren geradlinige beschleunigte Bewegung die nämliche Kraft in Anspruch nimmt, wie die zur Umdrehung des Rädchens erforderliche**); ferner hat das Übergewicht auch noch d) die Reibung des Rädchens zu überwinden. Gesetzt nun, die Gewichte der unter b) und c) bezeichneten Massen seien bezüglich 1000 und 265 g, zusammen also $G = 1265$ g, das Übergewicht wiege $P = 9{,}5$ g, zur Überwindung der Reibung aber seien, wie man durch Versuche gefunden, $q = 1{,}5$ g erforderlich, so daß die bewegende Kraft nur $P - q = 8$ g beträgt, und man habe beobachtet, daß das bewegliche Massensystem von der Ruhe aus während $t = 6$ Sekunden eine Strecke von $s = 1{,}11$ m durchlaufe, wie groß berechnet sich daraus die Beschleunigung p der bewegenden Kraft, sowie die Beschleunigung g der Schwerkraft?

11. Man soll das Gewicht der beiden gleich schweren Metallmassen (vorige Aufgabe!) nebst dem Gewicht einer Masse, deren geradlinige beschleunigte

---

*) Hier, wie überall in diesem Abschnitt, von der Reibung u. s. w. abgesehen.

**) Man kann diese Masse mittels der Lehre von den Trägheitsmomenten berechnen und findet dafür, wenn das Rädchen eine überall gleich dicke Scheibe ist, eine im Abstand des Halbmessers von der Achse anzubringende Masse, deren Gewicht = dem halben Gewicht der Scheibe. Die folgende Aufgabe lehrt eine andere Bestimmung dieser Masse.

Bewegung dieselbe Kraft in Anspruch nimmt, wie die Umdrehung des Rädchens, durch Rechnung finden, wenn man g als bekannt annimmt, das Übergewicht P Gramme wiegt, zur Überwindung der Reibung q Gramme erforderlich sind, und man außerdem beobachtet hat, daß das bewegliche Massensystem nach dem Auflegen des Übergewichts während der Zeit t den Weg s zurücklegt, also die Beschleunigung p der bewegenden Kraft $= \frac{2s}{t^2}$ ist?

12. Es ist aus der Gleichung $P = Mp$ zu erweisen, daß

$$Pt = Mv \text{ und } Ps = \frac{1}{2}Mv^2.$$

$P.t$ heißt der Zeiteffekt einer Kraft P, welche t Sekunden lang gewirkt hat, und Mv die Bewegungsgröße einer Masse M, welche die Geschwindigkeit v besitzt. $P.s$ heißt der Wegeffekt oder die Arbeit einer Kraft P, welche auf dem Wege s gewirkt hat, und $\frac{1}{2}Mv^2$ die lebendige Kraft oder die kinetische Energie einer Masse M, welche die Geschwindigkeit v besitzt.

---

13. a) Wie groß ist der Zeiteffekt einer konstanten Kraft von 100 kg während 10 Sekunden? b) Wie groß ist die Arbeit dieser Kraft, während ihr Angriffspunkt einen Weg von 10 m zurücklegt?
14. Welche Kraft ist erforderlich, um einer Kugel von 24 kg eine Geschwindigkeit von 1800 m zu geben?
15. Eine Kraft hat eine Last von 75 kg 16 m hoch gehoben und ihr außerdem eine Geschwindigkeit von 0,25 m erteilt. Wie groß ist die Arbeit der Kraft? (Fl. §. 19; Kr. §. 171.)
16. Die Kugel einer Windbüchse wiege 5,5 g und wir wollen annehmen, der Druck der komprimierten Luft gegen die Kugel sei unveränderlich 120000 g, was nahe bei 100facher Verdichtung der Luft der Fall ist. Wenn nun die Kugel von dem Augenblick an, wo man durch Öffnen des Ventils die komprimierte Luft gegen sie wirken läßt, in $^1/_{600}$ Sekunden den Lauf durcheilt, welche Geschwindigkeit hat dann die Kugel beim Verlassen des Laufs? (Nach Schellen.)
17. Wie groß ist die Arbeitsfähigkeit (die lebendige Kraft) einer Kanonenkugel von 12 kg Gewicht und 500 m Geschwindigkeit? Und wie groß ergiebt sich, wenn man für den Lauf nebst Lafette ein 300mal so großes Gewicht, also 3600 kg annimmt, die rückwärts gerichtete Geschwindigkeit desselben und seine lebendige Kraft?
18. Wieviel Pferdekräfte x (à 75 Meterkilogramm in der Sekunde) müßte eine Dampfmaschine haben, um einer Masse gleich der unserer Erde, also einer Masse von fünf Quadrillionen Kilogramm Gewicht bei unaufhörlicher Arbeit binnen 6000 Jahren die Geschwindigkeit der Erde um die Sonne, also eine Geschwindigkeit von 30 000 m (in der Sekunde) zu geben?

19. Welche Arbeit ist erforderlich, um einer 20 000 Pfd. schweren Lokomotive auf einer horizontalen, vollkommen glatten Schienenbahn eine Geschwindigkeit von $v = 30$ Fuß zu erteilen? (Von Reibung u. s. w. abgesehen.)

20. Wenn ein Hammer von $Q = 0{,}5$ kg Gewicht mit einer Geschwindigkeit von $v = 10$ m auf einen in einem horizontalen Brett steckenden Nagel schlägt und ihn $s = 5$ cm tief eintreibt, wie groß müßte ein Gewicht x sein, um, auf den Nagel gelegt, durch seinen Druck dieselbe Wirkung auszuüben?

21. Wenn ein auf der Hand liegender Körper von $G = 1{,}5$ kg Gewicht mit gleichmäßig beschleunigter Bewegung $h = 0{,}6$ m hoch gehoben wird, und derselbe dann nach Zurückziehung der Hand noch $h_1 = 4$ m hoch steigt, bis die ihm erteilte Geschwindigkeit erschöpft ist, welchen Druck hat er auf die Hand ausgeübt?

22. Welche Kraft x ist erforderlich, um einen Eisenbahnzug von 27 000 kg Gewicht auf einer horizontalen Schienenbahn binnen vier Minuten aus der Geschwindigkeit von 7 m in die von 14 m zu bringen?

23. Eine Lokomotive von 20 000 Pfd. Gewicht, die auf einer horizontalen Eisenbahn einen Widerstand von 75 Pfd. zu überwinden hat, erlangt nach drei Minuten eine Geschwindigkeit von 40 Fuß. Wie groß ist die hierzu erforderliche Arbeit der Dampfkraft?

24. Gesetzt, die vorige Lokomotive sei mit der Geschwindigkeit von 40 Fuß in den Beharrungszustand gelangt und bleibe in demselben 10 Minuten lang; alsdann werde der Dampf abgelassen. a) In welcher Zeit wird sie von diesem Augenblick an in Ruhe kommen, und welchen Weg während dieser Zeit zurücklegen? b) Welche Arbeit hat die Dampfkraft alsdann überhaupt verrichtet?

25. Der schraubenförmig gezogene Lauf eines Zündnadelgewehrs hat eine Länge von $s = 80$ cm und die dazu gehörige Kugel wiegt $G = 31$ g. Nehmen wir nun an, die Kugel habe durch die gewöhnliche Pulverladung (4,8 g) mit der Geschwindigkeit $v = 300$ m die Mündung des Laufs verlassen,

   a) wie groß ergiebt sich daraus die auf die Kugel wirkende Expansivkraft der Pulvergase?

   b) Wie vielmal ist also der Druck der Pulvergase auf die Kugel größer, als der Druck der Schwerkraft?

   c) Welche Zeit wird die Kugel zum Durchgang durch den Lauf gebrauchen, wenn wir annehmen, was der Wirklichkeit nahe kommen mag, daß ihre Bewegung innerhalb des Laufs eine gleichmäßig beschleunigte sei?

   d) Da der eingeschnittene Zug des Laufs eine Schraubenlinie bildet von 73,2 cm Länge für eine Umdrehung der Kugel um die Achse des Laufs, wieviel solcher Umdrehungen macht sie innerhalb des Laufs? Und da die Kugel diese schraubenförmige Rotation auch außerhalb des Laufs beibehält, wieviel solcher Rotationen macht sie in einer Sekunde?

26. Um die mechanischen Leistungen der Menschen zu berechnen, kann man sich der von Gerstner aus der Erfahrung abgeleiteten Formel

$$K = k\left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{\varepsilon}{t}\right)$$

bedienen, wobei angenommen ist, daß ein Mensch das mittlere Gewicht k mit der mittleren Geschwindigkeit c während der mittleren Zeit t überwältigen kann, und worin K das Gewicht bedeutet, das er mit einer anderen Geschwindigkeit v während einer anderen Zeit ε bewegen kann. Bei Menschen von gewöhnlicher Kraft kann man der Erfahrung gemäß $k = 12$ kg, $c = 0{,}7$ m, $t = 8$ Stunden täglich (wobei die Ruhestunden schon abgerechnet sind) annehmen. Welche Last kann nun ein solcher Mensch bei einer Geschwindigkeit von 0,8 m während 10stündiger anhaltender Arbeit fortbewegen?

27. Ein Bote ist gewohnt, eine Last von 15 kg täglich sechs Stunden weit mit der Geschwindigkeit von 0,8 m zu tragen, wie lange kann er eine Last von 20 kg mit einer Geschwindigkeit von 0,7 m tragen, ohne mehr als sonst ermüdet zu sein?

28. Die in Aufgabe 26 angegebene Formel dient auch zur Berechnung der Tierkräfte, nur sind hier natürlich andere Mittelwerte zu nehmen. Für starke, zum Militärdienst taugliche Pferde kann man $k = 65$ kg, $c = 1{,}35$ m, $t = 8$ Stunden täglich nehmen. Wenn nun das mittlere Gewicht eines Reiters samt Rüstung 106 kg beträgt, wie viel Stunden wird sein Pferd mit der mittleren Geschwindigkeit von 1,35 m ohne Ermüdung täglich zurücklegen können?

Die Fundamentalgrößen des absoluten Maßsystems sind Masse (m), Länge (l) und Zeit (t).

Als Einheiten gelten gewöhnlich das Gramm (G), das Centimeter (C) und die Sekunde (S).

Den in Produkten von Potenzen der Fundamentalgrößen ausgedrückten Wert einer beliebigen (abgeleiteten) Größe nennt man deren Dimension.

Die Einheit der Kraft, das Dyn, ist diejenige, welche der Grammmasse in der Sekunde die Geschwindigkeit von 1 cm erteilt.

Die Einheit der Arbeit, das Erg, ist diejenige, welche von 1 Dyn auf dem Wege von 1 cm geleistet wird.

Die Einheit des Effektes, ein Sekundenerg, besitzt eine Kraft, wenn sie in einer Sekunde die Arbeit von ein Erg leistet. (Kr. §. 157 und 171.)

29. Es sind die Dimensionen von Geschwindigkeit, Beschleunigung, Kraft, Arbeit und Effekt anzugeben. — Wie schreibt man die Dimensionen der Einheiten dieser Größen?

30. Welches sind die Werte von Kilogrammgewicht, Meterkilogramm, Sekundenmeterkilogramm und Pferdekraft, in absolutem Maße ausgedrückt?

31. Wie groß ist, in Pferdekräften ausgedrückt, der Effekt einer Dampfpumpe, welche in drei Minuten 600 Liter Wasser 3 m hoch zu heben vermag.

Drücke den erhaltenen Wert in Einheiten des Centimeter-Gramm-Sekunden-Systems aus!

Unter dem **Potential** eines Punktes A in bezug auf die Erde (oder unter dem Potential am Punkte A) versteht man die Arbeit, welche die Erde leisten muß, um die Masseneinheit von unendlicher Ferne bis zum Punkte A zu bewegen, oder auch die Arbeit, welche man leisten muß, um die Masseneinheit gegen die Anziehungskraft der Erde von A bis ins Unendliche zu bewegen. (Kr. §. 174.)

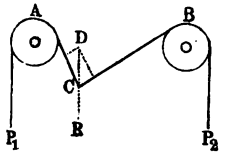
32. Was versteht man unter der Potentialdifferenz zweier Punkte A und B? Wann ist diese gleich Null?
33. Wie groß ist die potentielle Energie eines Punktes A im Abstande r von der Oberfläche der Erde?
34. Es ist der Wert des Potentials zu berechnen.
35. Welches ist die Dimension des Potentials für gewöhnliche Massen?

III. Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte.

---

1. Wie groß ist die Mittelkraft R zweier Kräfte von 40 und 30 kg, deren Richtungen einen Winkel von 45° einschließen? Und wie groß sind die Winkel α und β, welche die Seitenkräfte mit der Mittelkraft einschließen? (Durch Zeichnung oder Rechnung.)
2. Von zwei Seitenkräften P_1 und P_2 schließt die erste mit der Mittelkraft R einen Winkel von 75° und die zweite mit eben dieser Mittelkraft einen Winkel von 30° ein. Die Kraft P_1 ist $= 40$ kg; wie groß sind P_2 und R? (Durch Zeichnung oder Rechnung.)
3. Welche Winkel α und β müssen die Kräfte $P_1 = 200$ kg und $P_2 = 300$ kg mit der Richtung einer Kraft $R = 400$ kg einschließen, wenn sie, an demselben Punkte wirkend, dieser letzteren das Gleichgewicht halten sollen? (Durch Zeichnung oder Rechnung.)

Fig. 7.



4. Über zwei Rollen A und B (Fig. 7) gehe ein Seil, an dessen Enden die Gewichte $P_1 = 10$ kg, $P_2 = 6$ kg wirken; wie groß muß ein zwischen A und B am Seil angehängtes Gewicht R sein, damit Gleichgewicht bestehe und der Winkel ACB ein rechter sei?
5. An ein schlaffes Seil, dessen Enden festgemacht sind, wird mittels eines verschiebbaren Hakens ein Gewicht gehängt; es soll (durch Zeichnung) der Ort K gefunden werden, an welchem sich der Haken verschiebt (Gleichgewicht kann nur herrschen, wenn das Seil nach beiden Seiten hin gleich stark gespannt ist). Die Länge des ganzen Seiles betrage 9 m, das angehängte Gewicht G (Fig. 8, a. f. S.) 170 kg, die horizontale Entfernung AC von A

betrage 6,5 m und die vertikale BC 2 m; wie groß ist BM, KM, sowie die Spannung des Seiles?

6. Wenn ein Körper, dessen Gewicht $G = 150$ kg, durch zwei Kräfte von 30 kg und 24 kg, die einen Winkel von 105° einschließen, fortbewegt wird, wie groß ist die Mittelkraft, und welches ist ihre Richtung? Und wie groß ist die durch die Mittelkraft bewirkte Beschleunigung?

7. Wenn bei einer Kniepresse (Fig. 9) auf das Gelenk M eine Kraft $P = 20$ kg in der Richtung MD wirkt, und der Winkel AMB, welchen

Fig. 8.

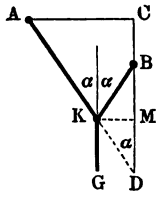
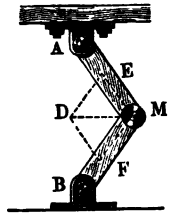


Fig. 9.



die beiden Gelenkstangen einschließen, = 150° ist, wie groß ist der in der Richtung MB wirkende Druck Q, im Falle, daß die Kraftrichtung MD jenen Winkel halbiert? Und bei welcher Größe des Winkels AMB übt die Kniepresse ihre größte Wirkung aus?

8. Wie stark wird ein Tisch (Fig. 10) von einem Körper M gedrückt, dessen Gewicht $G = 70$ kg ist, und auf den eine Kraft $P = 50$ kg aufwärts unter einem Winkel $\alpha = 40°$ gegen die Ebene des Tisches drückt?

Fig. 10.

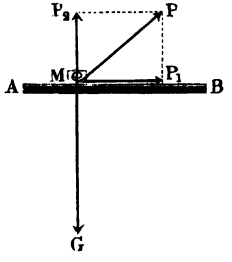
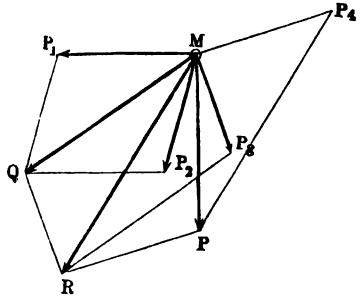


Fig. 11.



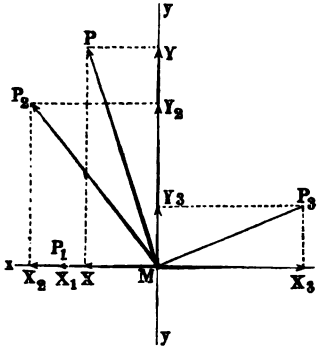
9. Wenn ein Körper von $G = 110$ kg Gewicht auf einer horizontalen Unterlage durch zwei Kräfte P_1, P_2 so fortbewegt wird, daß er in der ersten Sekunde einen Weg von 6,5 m in einer Richtung durchläuft, welche von den beiden Kraftrichtungen um die Winkel $\alpha = 52°$, $\beta = 77°$ abweicht, wie groß sind die Kräfte selbst, in Kilogrammen ausgedrückt?

10. Vier Kräfte, $P_1 = 24$ kg, $P_2 = 20$ kg, $P_3 = 18$ kg und $P_4 = 25$ kg, wirken auf den Punkt M (Fig. 11) unter den Winkeln $P_1 M P_2 = 75°$, $P_2 M P_3 = 30°$ und $P_3 M P_4 = 90°$. Man soll (durch Zeichnung oder Rechnung) die Größe und Richtung der Mittelkraft P finden.

11. Desgleichen wenn $P_1 = 11{,}5$, $P_2 = 10{,}8$, $P_3 = 8{,}5$ und $P_4 = 12{,}2$ kg, sowie $P_1 M P_2 = 72^1/_2{}^0$, $P_2 M P_3 = 33^1/_3{}^0$ und $P_3 M P_4 = 92^2/_3{}^0$.

12. Die Größe und Richtung der Mittelkraft (Fig. 12) zu finden aus den Seitenkräften $P_1 = 30$ kg, $P_2 = 70$ kg und $P_3 = 50$ kg, wenn die Richtungen von P_1 und P_2 einen Winkel von 52° und die Richtungen von P_2 und P_3 einen Winkel von 104° einschließen.

Fig. 12.



13. Vier Kräfte von 6 kg, 4,75 kg, 8,25 kg und 5,01 kg wirken an einem Punkt M und bilden mit einer durch diesen gelegten Achse bezüglich die Winkel 0°, 25°9′, 99°43′ und 199°47′. Es soll die Größe und Richtung der Mittelkraft P gefunden werden.

14. Ein Körper M wird durch drei Seile nach verschiedenen Richtungen gezogen. Am ersten Seil wirkt eine Kraft $P_1 = 300$ kg, am zweiten eine Kraft $P_2 = 500$ kg und die Richtung derselben schließt mit der ersten einen Winkel von 160° ein, am dritten Seil wirkt eine Kraft $P_3 = 241$ kg in einer Richtung, die mit jener der zweiten einen Winkel von 154°48′ einschließt. Nach welcher Richtung wird sich der Körper bewegen?

15. Vier Kräfte von 2, 3, 3,5 und 4 kg bilden mit den Achsen X, Y, Z eines dreiachsigen Koordinatensystems bezw. die Winkel:

16°15′	120°13′	46°15′
32°18′	47°25′	102°11′
92°14′	28°47′	214°23′
195°35′	241°18′	77°39′

Wie groß ist die Resultierende, und welche Winkel bildet sie mit den drei Achsen?

---

16. Den Mittelpunkt zweier parallelen Kräfte durch Zeichnung zu finden, a) wenn die Kräfte gleiche Richtung haben; b) wenn sie entgegengesetzte Richtung haben und von ungleicher Größe sind.

17. Zwei Kräfte, $P_1 = 5$ kg, $P_2 = 7$ kg, wirken in paralleler Richtung an zwei fest miteinander verbundenen Punkten, welche um $a = 2$ m von einander entfernt sind. Wie groß ist die Resultierende P, und wo liegt der Mittelpunkt der parallelen Kräfte?*)

*) In den Aufgaben 17 bis 23 ist angenommen, daß die Richtung der Kräfte nach derselben Seite geht.

18. Zwei parallele Kräfte, $P_1 = 11$, $P_2 = 5$, wirken auf zwei fest miteinander verbundene Punkte. Sie sind durch eine parallele Kraft ins Gleichgewicht gebracht, deren Angriffspunkt in der Verbindungslinie jener beiden Punkte liegt und um $p_1 = 1$ m vom Angriffspunkt der P_1 entfernt ist. Wie weit sind die beiden ersten Punkte von einander entfernt?

19. Eine Kraft $= 18$ soll in zwei andere ihr parallele zerlegt werden, deren Richtungen von der Richtung jener bezüglich um 5 und 9 m entfernt sind. Wie groß sind die Seitenkräfte P_1 und P_2?

20. Eine Kraft $P = 20$ soll in zwei andere ihr parallele zerlegt werden. Die eine Seitenkraft ist $P_1 = 15$ und ihre Richtung um 2 m von der der vorigen entfernt. Wie groß ist die zweite Seitenkraft P_2 und wo liegt ihr Angriffspunkt?

21. Zwei Punkte sind beziehungsweise um 2 und 3 m von einer Ebene entfernt, und es wirken an ihnen zwei parallele Kräfte von 11 und 15 kg. Welche Entfernung von jener Ebene hat der Angriffspunkt der Resultierenden? (Fl. §. 25; Kr. §. 166.)

22. Fünf parallele Kräfte von 4, 8, 5, 3 und 2 kg wirken auf fünf fest miteinander verbundene Punkte, die von einer Ebene nach derselben Seite die Entfernungen 3, 4, 5, 7, 9 dm haben. In welcher Entfernung von der Ebene liegt der Angriffspunkt der Resultierenden?

23. Wenn aber die beiden letzten Kräfte auf der andern Seite der angenommenen Ebene in den gegebenen Entfernungen wirkten, welche Entfernung würde dann der Angriffspunkt der Resultierenden haben?

24. Fünf in einer Ebene wirkende parallele Kräfte, sowie ihre Koordinaten in Bezug auf ein rechtwinkeliges Achsensystem sind gegeben, nämlich:

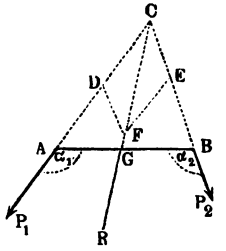
$P_1 = 18$ $P_2 = 20$ $P_3 = -30$ $P_4 = 24$ $P_5 = 18$
$x_1 = 25$ $x_2 = 39$ $x_3 = 32$ $x_4 = 16$ $x_5 = -13$
$y_1 = 13$ $y_2 = 24$ $y_3 = 41$ $y_4 = 39$ $y_5 = -20$;

wo liegt der Angriffspunkt (x, y) der Resultierenden R und wie groß ist diese?

25. Wo würde aber der Angriffspunkt der Resultierenden liegen, wenn die Kraft $P_2 = 20$ statt der eben angegebenen die Koordinaten $x_2 = 18$, $y_2 = 21$ hätte?

26. An den beiden Endpunkten einer Linie $AB = 2{,}5$ m (Fig. 13) wirken die Kräfte $P_1 = 24$, $P_2 = 18$ unter den Winkeln $\alpha_1 = 144^0$, $\alpha_2 = 126^0$; es soll die Größe und Richtung der Mittelkraft R, sowie ihr Angriffspunkt sowohl durch Zeichnung als durch Rechnung gefunden werden.

Fig. 13.



27. Auf zwei verschiedene Punkte eines Körpers wirken die Kräfte $P_1 = 20$ kg, $P_2 = 34$ kg, ihre Richtungen bilden einen Winkel $\alpha = 70^0$ und sind von einem gewissen Punkte O in ihrer Ebene bezüglich um $a_1 = 4$ m, $a_2 = 1$ m entfernt. Es sollen Größe, Richtung und Ort der Mittelkraft R gefunden werden.

28. Auf drei Punkte eines Körpers wirken die Kräfte $P_1 = 26$ kg, $P_2 = 22{,}5$ kg, $P_3 = 15$ kg, und es seien die Entfernungen der Richtungen dieser Kräfte von einem Punkte O: $a_1 = 6$, $a_2 = 5$, $a_3 = 8$, sowie die Winkel, welche die Kraftrichtungen mit einer durch den Punkt O gelegten Achse Ox bezüglich bilden: $\alpha_1 = 26^0 30'$, $\alpha_2 = 35^0$, $\alpha_3 = 124^0$. Es soll die Größe und der Ort der Mittelkraft gefunden werden. (Fl. §. 27; Kr. §. 168.)

IV. Schwerpunkt der Körper.

(Kr. §. 178, 179, 180.)

---

1. Wo liegt der Schwerpunkt einer (materiellen) geraden Linie?
2. Den Schwerpunkt des Umfanges eines Dreiecks durch Zeichnung zu finden, wenn die Dreiecksseiten die Längen a, b, c haben und diese Längen den Gewichten der Seiten proportional sind.
3. Wo liegt der Schwerpunkt einer Kreislinie und des Umfanges eines regelmäßigen Vielecks?
4. Den Schwerpunkt eines Kreisbogens zu finden, dessen Halbmesser $r = 27$ cm und dessen Sehne $s = 43$ cm ist.
5. Den Schwerpunkt eines Dreiecks durch Zeichnung zu finden.
6. Den Schwerpunkt eines Trapezes (Parallel-Trapezes) zu finden.
7. Den Schwerpunkt eines beliebigen Vierecks zu finden.
8. Ein Viereck hat zwei Paar gleiche aneinander stoßende Seiten; von dem einen Paar ist jede Seite 0,6 m und von dem andern 0,65 m lang. Die Diagonale, an deren Endpunkten zwei ungleiche Seiten liegen, betrage 1 m. Wo liegt der Schwerpunkt des Vierecks?
9. Den Schwerpunkt eines Vielecks durch Zeichnung zu finden.
10. Es sei der Halbmesser r eines Kreisausschnittes $= 36$ cm, die Sehne $s = 44$ cm; wie weit liegt der Schwerpunkt auf der Schwerelinie vom Zentrum entfernt?
11. Wie weit liegt der Schwerpunkt des Kreisabschnittes, dessen Halbmesser $r = 36$ cm und dessen Sehne $s = 44$ cm, auf der Schwerelinie vom Mittelpunkte des Kreises entfernt?
12. Wo liegt der Schwerpunkt eines Halbkreises von $r = 11$ cm Halbmesser?
13. Den Schwerpunkt vom Mantel eines geraden Kegels zu finden.
14. Den Schwerpunkt einer Kugelzone und einer Kugelschale zu finden.

15. Den Schwerpunkt einer dreiseitigen Pyramide zu finden.
16. Den Schwerpunkt einer vielseitigen Pyramide und eines Kegels zu finden.
17. Den Schwerpunkt eines Kugelabschnittes zu finden, wenn der Kugelhalbmesser $= r$ und die Höhe der zugehörigen Kugelkappe $= h$ ist.
18. Den Schwerpunkt eines Kugelabschnittes zu finden, dessen Höhe $= h$ und dessen zugehöriger Kugelhalbmesser $= r$ ist.
19. Wo liegt der Schwerpunkt einer Halbkugel vom Halbmesser 2,4 cm?
20. Wie groß ist das Maß der Standfähigkeit eines rechtwinkligen Parallelepipeds von Holz, wovon ein Kubikdecimeter 0,6 kg wiegt und dessen Längenkante $l = 12$ dm, Breitenkante $b = 8$ dm und Höhenkante $h = 5$ dm ist, bezüglich der Umdrehung um jede dieser Kanten?
21. Es ist der Schwerpunkt von vier gleich schweren Massen im Raume zu finden (welche als die Ecken einer dreiseitigen Pyramide angesehen werden können).
22. Aus einem geraden Kegelstumpf von 3,6 m Höhe, dessen Grundflächenhalbmesser 1,5 und 2,4 m betragen, ist ein konaxialer Cylinder vom Halbmesser 1,2 m ausgebohrt. Das spezifische Gewicht des Materials ist 2,4; wie schwer ist der ausgehöhlte Kegelstumpf und wo liegt sein Schwerpunkt? Wo aber liegt dieser, wenn der Kegelstumpf bis zur halben Höhe mit Blei (spez. Gew. 11,5) ausgegossen ist?
23. An eine 25 cm lange Glasröhre von 1,5 mm äußerem und 0,75 mm innerem Halbmesser ist eine Kugel von 5 mm äußerem und 4,5 mm innerem Halbmesser angeschmolzen. Wo liegt der Schwerpunkt von Kugel und Röhre, wenn man außer Betracht läßt, daß die Kugel oben eine kleine Öffnung hat? — Wo liegt der Schwerpunkt, wenn die Kugel und die Röhre bis zu einer Entfernung von 10 cm vom oberen Ende mit Weingeist gefüllt ist? (Spezifisches Gewicht des Weingeistes 0,87 und des Glases 2,82.)

V. Gleichgewicht der Kräfte an den einfachen Maschinen.

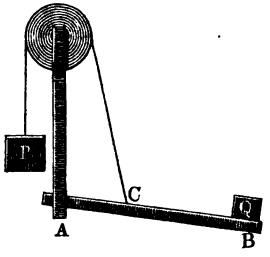
Mathematischer Hebel.

1. An einem doppelarmigen Hebel ist der eine Hebelarm $= 0{,}3$ m, der andere $= 0{,}5$ m, am Endpunkte des ersten hängt ein Gewicht von 30 kg, wieviel hängt am anderen im Falle des Gleichgewichts, und wie groß ist der Druck auf den Stützpunkt?

2. An einem einarmigen Hebel wirken zwei Kräfte von 500 und 800 kg nach entgegengesetzten Richtungen. Wenn nun der Hebelarm der ersten Kraft = 3 m ist, wie groß ist der der zweiten im Falle des Gleichgewichts?

3. Der einarmige Hebel AB (Fig. 14, an der die Einrichtung des menschlichen Armes erläutert wird) sei 50 cm lang und habe seinen Stützpunkt in A. Wenn nun bei B eine Last $Q = 40$ kg gehoben werden soll, welche Kraft P im Punkte C, der 10 cm von A entfernt ist, kann dies bewirken? Wie vielmal ist hier der Weg der Kraft kleiner als der der Last?

Fig. 14.

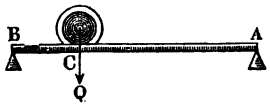


4. An den Endpunkten eines Hebels von der Länge = a wirken zwei parallele Kräfte P und Q nach derselben Seite hin; wie weit muß der Stützpunkt vom Angriffspunkte der Kraft Q entfernt sein, wenn Gleichgewicht stattfinden soll?

5. Zwei Hebelarme verhalten sich wie $a : b$. An ihren Endpunkten sollen Gewichte ins Gleichgewicht gebracht werden, die zusammen Q Kilogramm wiegen; wie müssen diese verteilt werden?

6. Auf einem horizontalen, an den Punkten A und B aufliegenden Hebel AB (Fig. 15) ruht in C eine Last Q; welchen Druck erleiden die Stützen in A und B?

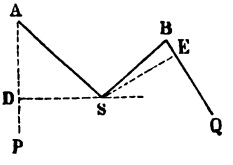
Fig. 15.



7. Ein Knabe und ein Mann sollen an einer Stange von 4 m Länge eine Last von 100 kg (das Gewicht der Stange bei Seite gesetzt) tragen. Wenn sich nun die Tragkräfte derselben wie 5 : 8 verhalten, wohin ist die Last zu hängen, damit sie verhältnismäßig verteilt ist, und wieviel hat jeder zu tragen?

8. Am Hebelarm $SA = 3$ m (Fig. 16) des Winkelhebels ASB wirkt eine Kraft $P = 99$ kg, deren Richtung einen Winkel $A = 30^0$ mit SA einschließt. Am andern Hebelarm $SB = 1\frac{2}{3}$ m ist eine Kraft $Q = 100$ kg mit jener ins Gleichgewicht gebracht, welchen Winkel B wird ihre Richtung mit SB einschließen?

Fig. 16.



9. Vier Gewichte von 3, 5, 7 und 9 kg sind an einem Hebel von 3 m Länge so aufgehängt, daß am einen Endpunkte das Gewicht von 3 kg und je um einen Meter weiter die übrigen Gewichte hängen. In welcher Entfernung vom erstenwähnten Endpunkte des Hebels muß im Falle des Gleichgewichts der Unterstützungspunkt liegen?

Physischer Hebel.

10. Die Gleichgewichtsbedingungen eines physischen Hebels AB (Fig. 17) von prismatischer Form und homogener Masse zu finden, dessen Gewicht $= G$, dessen Schwerpunkt in D und dessen Unterstützungspunkt in M liegt, wenn an seinen Endpunkten die Gewichte P und Q angebracht sind.

11. Die Länge eines Hebels AB (Fig. 17) von prismatischer Form und homogener Masse sei 1 m, sein Gewicht $= 2$ kg, sein Stützpunkt M sei $^1/_3$ m von A entfernt, und am Endpunkte A hänge ein Gewicht von 30 kg; welches Gewicht am Endpunkte B bringt den Hebel ins Gleichgewicht?

12. Die Länge eines ähnlichen Hebels sei $= 6$ m, sein Gewicht $= 18$ kg und an seinen Endpunkten hängen die Gewichte 16 kg und 8 kg; wo liegt der Unterstützungspunkt?

13. An einem einarmigen prismatischen Hebel von 1 m Länge und $1^1/_2$ kg Gewicht ist ein 0,3 m vom Stützpunkte wirkender Druck von 50 kg zu überwinden; wie groß muß die zur Herstellung des Gleichgewichts nötige Kraft P am andern Ende des Hebels sein?

14. Der Hebel AC (Fig. 18) eines Sicherheitsventils an einem Dampfkessel sei 50 cm lang, 1 kg schwer, und sein Schwerpunkt O sei 20 cm vom

Fig. 17.

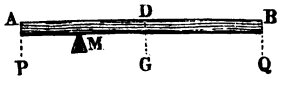
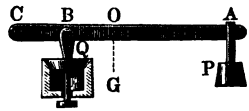


Fig. 18.



Drehpunkte C entfernt. Wenn nun der Hebelarm BC des Ventils 5 cm lang ist, und das Gewicht P am Endpunkte A des Hebels 5 kg wiegt, welcher Druck wird dadurch auf das Ventil ausgeübt?

15. An einem 6 kg schweren Winkelhebel ACB (Fig. 19), dessen Schwerpunkt in S liegt und von dessen Armen der eine horizontal, der andere vertikal ist, hängt an dem Hebelarm $CB = 0{,}6$ m die vertikal ziehende Last $Q = 30$ kg, die Kraft P wirkt in horizontaler Richtung an dem Hebelarm

Fig. 19.

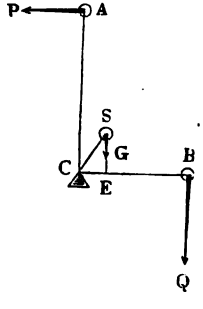
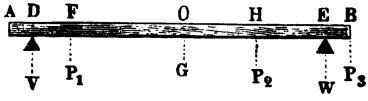


Fig. 20.



$CA = 0{,}75$ m und der Hebelarm CE des Hebelgewichts ist 0,25 m; wie groß ist die zur Herstellung des Gleichgewichts nötige Kraft P, sowie der Druck D auf den Unterstützungspunkt bei C?

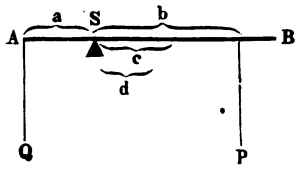
16. Eine prismatische Stange AB (Fig. 20) von 75 kg Gewicht ist in den Punkten D und E, die 4 m voneinander entfernt sind, unterstützt. Der

Schwerpunkt O ist 1,5 m von E entfernt, und in den Entfernungen $FE = 3{,}5$, $EH = 1$, $EB = 0{,}7$ m vom Punkte E wirken die Kräfte $P_1 = 200$, $P_2 = 100$, $P_3 = 150$ kg; wie groß sind die Drucke V und W in den Punkten D und E?

17. Wie kann man das Gewicht G eines schweren Hebels ohne Wage ermitteln?

18. Ein ungleicharmiger Hebel AB (Fig. 21) ist in seinem Schwerpunkte S unterstützt. Am Hebelarme a hänge ein Körper von unbekanntem Gewicht Q, welchem ein auf dem längeren Hebelarm SB verrückbares Laufgewicht P am Hebelarm b das Gleichgewicht hält. Wird nun der Körper Q, während er am Hebel hängen bleibt, in Wasser gesenkt, wodurch er so viel an Gewicht verliert, als das Wasser wiegt, das er verdrängt, so wird das Gleichgewicht gestört, aber wieder hergestellt, wenn das Laufgewicht P an dem kürzern Hebelarme c wirkt. Man soll das spezifische Gewicht s des Körpers Q durch die Hebelarme b und c ausdrücken.

Fig. 21.



19. Ein Körper vom Gewicht Q, den wir uns jetzt von Glas denken wollen, sei wie vorher am Hebelarm a vor und nach seiner Einsenkung in Wasser mit dem Laufgewicht P im Gleichgewicht, wenn dieses bezüglich an den Hebelarmen b und c wirkt; der Glaskörper werde aber jetzt in eine von Wasser verschiedene Flüssigkeit, z. B. Schwefelsäure, getaucht und das dadurch veränderte Gleichgewicht durch Verrückung des Laufgewichts an den Hebelarm d wieder hergestellt. Es soll das spezifische Gewicht s_1 der Flüssigkeit durch die Hebelarme b, c und d ausgedrückt werden.

Anmerkung. Die beiden vorstehenden Aufgaben geben das Prinzip eines Apparats zur bequemen Bestimmung des spezifischen Gewichts fester und flüssiger Körper an.

Wagen.

20. Welche Bedingungen muß eine gute gleicharmige Wage (Krämerwage) erfüllen?

21. Wenn eine gleicharmige Wage, die auf jeder ihrer beiden Schalen mit m Kilogrammen als dem größten noch zulässigen Gewicht belastet ist, bei einem Übergewicht von n Milligrammen noch einen merklichen Ausschlag giebt, wie groß ist die Empfindlichkeit dieser Wage?

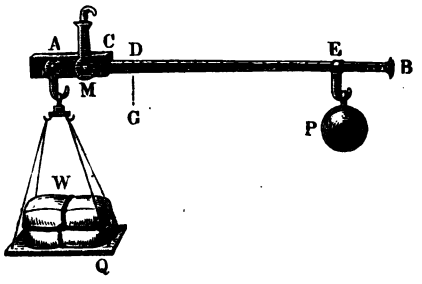
22. Wie läßt sich auf einer unrichtigen Krämerwage, d. h. einer solchen, deren Arme nicht genau von gleicher Länge sind, das Gewicht eines Körpers K doch richtig finden?

23. Eine Ware wog in der einen Schale 2 kg, in der andern $2\frac{1}{4}$ kg, welches ist ihr richtiges Gewicht?

24. Es soll die Gleichgewichtsbedingung einer Schnellwage (Fig. 22 a. f. S.) gefunden werden, wenn das Gewicht des Wagebalkens $= G$, das der Wag-

schale $= Q$ und das des Läufers $= P$ ist, und wenn D den Schwerpunkt des Wagebalkens, sowie C den Punkt bezeichnet, in welchem das Laufgewicht der (unbelasteten) Wagschale das Gleichgewicht hält.

Fig. 22.

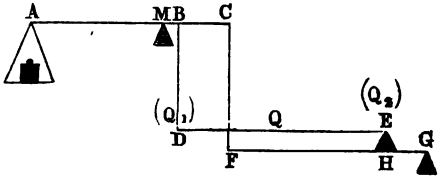


25. Auf welche Weise wird der Wagebalken einer Schnellwage (Fig. 22) eingeteilt?

26. Welche Arten von Schnellwagen (ungleicharmige Wagen) giebt es?

27. Es soll die Bedingung aufgesucht werden, die bei einer tragbaren Brückenwage (Fig. 23) erfüllt sein muß, damit eine Last auf jeder beliebigen Stelle der Brücke DE denselben Einfluß auf den Hebelarm MC ausübe, als ob sie bloß an dem Hebelarm MB wirkte.

Fig. 23.



28. Warum wird die Brückenwage häufig auch Dezimalwage genannt?

Rad an der Welle (ohne Reibung).

29. Welche Kraft hält an einer Winde einer Last von 200 kg das Gleichgewicht, wenn der Halbmesser des Rades $= 0{,}8$ m und der der Welle $= 1{,}2$ dm ist?

30. Wie groß muß bei einem Haspel der Radius des Rades sein, damit eine Kraft von 40 kg einer Last von 400 kg das Gleichgewicht hält, wenn der Halbmesser der Welle, woran die Last hängt, $= 0{,}8$ dm ist?

31. Um eine Welle von 10 cm Durchmesser ist ein Seil geschlungen, an welchem ein Gewicht von 320 kg in die Höhe gezogen werden soll. Mittels welcher Kurbellänge ist dies einer Kraft von 80 kg möglich?

32. Welche Kraft K muß bei einem Räderwerk (Fig. 24) an der Kurbel P wirken, wenn

die Welle b den Halbmesser . . . . . $r = 6$ cm,
das Wellrad a den Halbmesser . . . . . $R_1 = 40$ „
das Getriebe c, das in die Zähne des Wellrades eingreift, den Halbmesser . . . . . $r_1 = 5$ „
und die Kurbel P die Länge . . . . . $R = 30$ „

ungenen Seiles eine
Zähne müssen das

= 0,4 m
= 0,06 „
= 0,6 „
= 0,08 „
= 1,2 „
= 0,18 „

am Umfang dieser
Gleichgewicht halten?
Räderwerks mit einer
Achse sitzende Kur-
em Halbmesser ver-
er; die zwei Räder
che vom Halbmesser
Halbmesser 32 cm.
Achse sitzt eine Welle
gen, welches zuerst
Bügel der letzteren
Fall des Gleich-

= 7200 kg durch ein
erden; welche Größe
sten?

36. Bei einem Räderwerk hat das Getriebe, welches auf der Achse des ersten Rades sitzt, 7 Zähne und diese greifen in ein zweites Rad mit 42 Zähnen, auf dessen Achse ein Getriebe mit 5 Zähnen sitzt, das ein drittes Rad mit 55 Zähnen treibt. Wie verhalten sich die Umdrehungszahlen des ersten und dritten Rades (oder deren Achsen)?

37. Bei einer Zentrifugalmaschine hat das mit der Kurbel an einer Achse sitzende Rad einen Halbmesser von 24 cm; dies greift in ein Getriebe von 9 cm Halbmesser ein, an dessen Achse ein Rad von 27 cm Halbmesser sich befindet, und um dieses Rad ist eine Schnur geschlungen, durch welche ein kleines Rädchen von 3 cm Halbmesser, das auf der Rotationsachse sitzt, gedreht wird. Wieviel Umdrehungen wird diese Rotationsachse während einer Umdrehung des ersten Rades machen?

38. Es soll die Anzahl der Zähne gefunden werden, welche zwei Räder und die in diese eingreifenden Getriebe haben müssen, damit, wenn das erste Getriebe, welches in das erste Rad eingreift, 720 Umdrehungen macht, das zweite Rad, welches durch das auf der Achse des ersten Rades sitzende zweite Getriebe bewegt wird, in derselben Zeit deren 12 macht.

39. Bei einer Differentialwelle seien die Halbmesser der zwei Wellenhälften 5 cm und 8 cm, die beiden Kurbeln haben jede eine Länge von 20 cm und die Last betrage 140 kg; wie groß muß für den Fall des Gleichgewichtes die an jeder Kurbel wirkende Kraft sein?

40. Bei einem Differentialflaschenzug seien die Halbmesser der beiden auf derselben Achse sitzenden Rollen 8 cm und 10 cm und die Last betrage 172 kg; wie groß muß für den Fall des Gleichgewichtes die Kraft sein? (Kr. Gr. S. 181 und 182.)

Rolle mit Seil (ohne Reibung).

41. Eine Last von 160 kg wird mittels einer 10 kg schweren, beweglichen Rolle in die Höhe gezogen, während die Seile dabei parallel bleiben; wie groß ist die dazu nötige Kraft?

42. Wie groß wird dagegen die Kraft sein müssen, wenn die Seile einen Winkel von 60^0 einschließen?

43. Welche Kraft P wird an einem aus $n = 8$ beweglichen Rollen bestehenden Rollenzug (Potenz-Flaschenzug) (Fig. 25), dessen Seile parallel sind, erfordert, wenn dieselbe einer Last $Q = 10\,000$ kg das Gleichgewicht halten soll, und das Gewicht der Rollen unberücksichtigt bleibt? Wie vielmal ist der dabei von der Kraft zurückgelegte Weg größer, als der der Last?

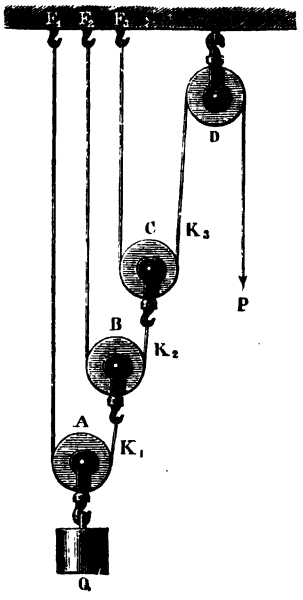
44. Welche Kraft ist aber nötig, wenn das Gewicht der Rollen in Rechnung gebracht wird, und jede Rolle $= 10$ kg wiegt?

45. Mittels einer Kraft $P = 60$ kg will man durch einen Rollenzug, der aus $n = 3$ beweglichen Rollen besteht, wovon jede $G = 12$ kg wiegt, eine Last Q in die Höhe heben; wie groß kann diese sein?

46. Wieviel Rollen, von denen jede 12 kg wiegt, sind beim Rollenzug nötig, um mit einer Kraft von $110\frac{1}{2}$ kg einer Last von 800 kg das Gleichgewicht zu halten?

47. Wenn die bewegliche Flasche eines gemeinen Flaschenzuges vier Rollen hat, und das eine Seilende an der Hülse der festen Flasche befestigt ist, welche Kraft P ist nötig, um einer Last von 600 kg am andern Seilende das Gleichgewicht zu halten? (Das Gewicht der beweglichen Flasche unberücksichtigt gelassen.) Wie verhalten sich aber dabei die Wege der Kraft und der Last?

Fig. 25.



48. Es sei die Anzahl der beweglichen Rollen an einem gemeinen Flaschenzug $= n$, ihr Gewicht $= G$; welche Kraft P wird erfordert, um einer Last $= Q$ das Gleichgewicht zu halten, und zwar
   a) wenn das eine Seilende an der Hülse der festen Flasche,
   b) wenn es an der beweglichen Flasche befestigt ist?

49. Wie groß ist P in beiden Fällen, wenn $n = 4$, $G = 16$ kg, $Q = 1200$ kg?

50. Welche Last Q läßt sich mit $P = 80$ kg Kraft an einem Flaschenzug in die Höhe heben, dessen bewegliche Flasche $G = 12$ kg wiegt und in $m = 7$ Seilen hängt?

Schiefe Ebene, Keil und Schraube (ohne Reibung).

51. Wenn bei einer schiefen Ebene die Länge $l = 5$ m, die Höhe $h = 3$ m und die Basis $b = 4$ m ist, und es soll ein Gewicht $Q = 500$ kg auf der schiefen Ebene im Gleichgewicht erhalten werden, wie groß ist die dazu nötige Kraft P, sowie der dabei senkrecht auf die schiefe Ebene wirkende Druck D
   a) im Falle die Kraft P parallel mit der Länge der schiefen Ebene wirkt?
   b) im Falle sie horizontal, also parallel der Basis wirkt?

52. Desgleichen wenn $l = 2{,}8$, $h = 2{,}3$, $b = 1{,}5$ m und $Q = 560$ kg ist?

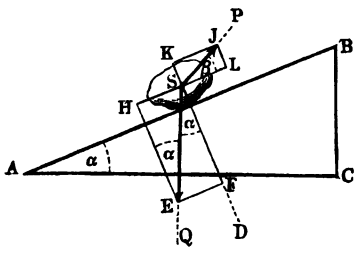
53. Wie groß muß eine parallel der schiefen Ebene wirkende Kraft P sein, um eine Last $Q = 200$ kg auf der schiefen Ebene zu erhalten, wenn diese gegen den Horizont a) um 30°, b) um $19\frac{1}{2}$°, c) um $14\frac{1}{2}$°, d) um 45°, e) um 60° geneigt ist? Und wie groß ist der Druck D?

54. Wie groß sind aber bei den nämlichen Neigungen der schiefen Ebene und der nämlichen Last, wie in der vorhergehenden Aufgabe, die Kraft P und der Druck D, wenn die Kraft parallel der Basis wirkt?

55. Welche Kraft P ist nötig, um einen 13 Zentner schweren Wagen auf einer Eisenbahn von $^1/_{300}$ Steigung*) am Herablaufen zu hindern?

56. Wenn auf einer schiefen Ebene AB (Fig. 26), die mit einer horizontalen Ebene einen Neigungswinkel $\alpha = 36^0\,52'\,10''$ einschließt, ein Körper vom Gewicht $Q = 500\,\text{kg}$, dessen Schwerpunkt S ist, durch eine Kraft P im Gleichgewicht erhalten werden soll, deren Richtung SP rückwärts verlängert die schiefe Ebene unterhalb des Körpers unter einem Winkel $\beta = 40^0$ schneidet, wie groß ist P und der Druck D auf die schiefe Ebene?

Fig. 26.



57. Welche Werte erhält man aus den in voriger Aufgabe gefundenen Formeln

$$P = Q\,\frac{\sin\alpha}{\cos\beta} \text{ und } D = Q\,\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\beta}$$

a) wenn die Richtung der Kraft P parallel der schiefen Ebene ist?
b) wenn sie der Basis parallel ist?
c) wenn sie die schiefe Ebene oberhalb der Last Q unter dem Winkel $\beta = 40^0$ schneidet?

58. Auf jeder der beiden Seiten eines gleichschenkeligen Keils wirkt in senkrechter Richtung eine Last von 60 kg, jede Seite des Keils ist 24 cm, der Rücken 6 cm lang; welche auf den Rücken senkrecht wirkende Kraft P ist zum Gleichgewicht nötig?

59. Welche Kraft P_1 würde aber nötig sein, wenn die beiden Lasten von je 60 kg parallel dem Rücken des Keils auf seine beiden Seiten wirkten?

60. Bei einer Schraube sei die Weite eines Schraubengangs $h = 2\,\text{cm}$, der mittlere Halbmesser der Spindel $r = 4\,\text{cm}$; wie groß muß, um einer Last $Q = 40\,\text{kg}$ das Gleichgewicht zu halten,
a) die Kraft P sein, welche am Umfang vom mittleren Halbmesser der Spindel, dagegen
b) die Kraft P_1, welche an einem Hebelarm von $l = 20\,\text{cm}$ Länge angreift?

61. Eine Schraube ohne Ende, deren Gänge eine Weite von $h = 2\,\text{cm}$ haben, und die durch eine Kurbel von $r = 0{,}3\,\text{m}$ gedreht wird, greift in die Zähne eines Rades von $r_1 = 0{,}12\,\text{m}$ Halbmesser ein, das auf einer Welle von $r_2 = 6\,\text{cm}$ Halbmesser sitzt. Um diese Welle ist ein Seil geschlungen, woran eine Last vom Gewicht Q hängt; wie verhält sich die Kraft P zur Last Q im Falle des Gleichgewichts?

Wenn an einem Körper eine Anzahl Kräfte im Gleichgewicht stehen, so ist die Summe der Arbeiten, welche sie leisten, wenn der Körper entweder in Bewegung ist oder in Bewegung gesetzt wird, gleich Null. (Satz von den virtuellen Arbeiten, Kr. Gr. S. 164.)

*) d. h. die 1 m Steigung auf je 300 m Länge hat.

62. Beweise die Sätze vom Gleichgewicht der Kräfte an den einzelnen, hier behandelten Maschinen (Hebel, Rolle ꝛc.) aus dem Satz von den virtuellen Arbeiten!

VI. Fall und Wurfbewegung der Körper.

(Ohne Berücksichtigung von Luftwiderstand und Reibung.)

Freier Fall der Körper.

Aufgaben sind unter I. auf S. 4 bis 6 enthalten.

Fall der Körper auf schiefer Ebene.

1. a) Eine schiefe Ebene hat einen Neigungswinkel von 30^0; welche Endgeschwindigkeit v erlangt ein auf derselben sich herabbewegender Körper nach acht Sekunden, und welchen Weg s legt er zurück?
   b) Welche Endgeschwindigkeit v hat ein Körper, wenn er vermöge der Schwere auf einer schiefen Ebene, deren Neigungswinkel $= 15^0$, einen Weg von 10 m zurückgelegt hat?
2. a) Eine schiefe Ebene hat eine Länge von 10 m, und das eine Ende derselben liegt 1 m höher als das andere; man soll die Zeit t bestimmen, in welcher ein Körper längs der Ebene herabfällt, sowie die Geschwindigkeit v, welche er am Ende erlangt?
   b) Wenn die Steigung einer Chaussee $^1/_{10}$ beträgt (d. h. wenn auf jede 10 m Länge der schiefen Ebene die Höhe um 1 m zunimmt), wie groß ist die Endgeschwindigkeit v, welche ein Wagen nach Zurücklegung von 36 m erlangt?
3. Auf einer schiefen Ebene vom Neigungswinkel $\alpha = 30^0$ bewegt sich ein Körper mit der Anfangsgeschwindigkeit $v = 20$ m vom Basispunkte A nach dem Höhenpunkte B, wo seine Geschwindigkeit erschöpft ist, und kehrt alsdann wieder nach dem Punkte A zurück; welche Zeit (t) hat er dazu gebraucht und wie groß ist die Strecke AB?
4. Galilei ließ, um den Wert von g, d. h. der Beschleunigung der Schwerkraft beim freien Fall, zu bestimmen, eine polierte Metallkugel in einer glatten, gegen den Horizont etwas geneigten und mit einer Teilung versehenen Rinne herabrollen und beobachtete die Zeiten, welche die Kugel zur Zurücklegung verschiedener Strecken brauchte. Wenn nun die Rinne eine Neigung

von 5° gegen den Horizont gehabt und die Kugel vom Nullpunkte der Teilung an

4,3 dm während einer Sekunde,
17,0 „ „ zwei Sekunden,
38,4 „ „ drei „

zurückgelegt hätte, welcher Wert von g würde sich daraus berechnen? (Genauere Bestimmung von g siehe in VII, 20.)

5. Wie groß ist der Fallraum x in der ersten Sekunde eines frei fallenden Körpers auf dem Jupiter, wenn dort ein Körper auf einer um $32^0 14'$ geneigten Ebene in 4,25 Sekunden einen Weg von 366,09 Fuß zurücklegt? (Lauteschläger.)

6. Zu beweisen:
   a) der vertikale Durchmesser eines Kreises und jede von seinem oberen oder unteren Ende gezogene Sehne des Kreises werden in gleicher Zeit durchfallen (sind isochrone Räume).
   b) Die Endgeschwindigkeit eines auf einer schiefen Ebene herabfallenden schweren Körpers hängt bloß von der Höhe, nicht aber von der Neigung und Länge der schiefen Ebene ab.

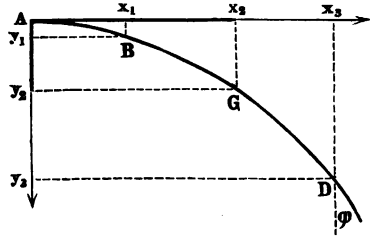
7. Wie groß muß der Neigungswinkel α einer schiefen Ebene sein, damit ein Körper in derselben Zeit auf ihr herabfällt, als wenn er erst in der Richtung der Höhe frei herabfiele und dann mit der erlangten Geschwindigkeit ihre Basis durchliefe? Und wie verhalten sich Länge, Basis und Höhe der schiefen Ebene zu einander?

8. Welche Neigung müssen die Dächer haben, damit das Wasser auf ihnen in der kürzesten Zeit herabfließt?

Wurfbewegung*).

9. Es soll (Fig. 27) durch Zeichnung der Weg eines Körpers A gefunden werden, der sich in der Richtung AX mit der gleichmäßigen Geschwindigkeit $c = 6$ m, in der darauf senkrechten Richtung AY aber mit der Beschleunigung $p = 2$ m bewegt.

Fig. 27.



10. Ein Körper wird in horizontaler Richtung mit der Geschwindigkeit $c = 19{,}62$ m geworfen. An welcher Stelle seiner Bahn wird sich der Körper am Ende der vierten Sekunde befinden, die Beschleunigung beim freien Fall = 9,81 gerechnet?

*) Beispiele über den vertikalen Wurf siehe unter I, S. 6.

11. a) Um wieviel sinkt eine in horizontaler Richtung abgeschossene Kugel in einer Viertelsekunde?

b) Wenn die Kugel einer genau horizontal gerichteten Büchse eine Wand um $^4/_3$ m tiefer trifft, als die verlängerte Achse des Büchsenlaufs; wie lange war die Kugel unterwegs, die Zeit vom Augenblick ihres Austritts aus dem Lauf gerechnet?

12. Wenn sich ein Körper von einem Punkte A aus (Fig. 27) so bewegt, daß er in horizontaler Richtung eine gleichmäßige Geschwindigkeit $= c$, in vertikaler Richtung eine Beschleunigung $= g$ hat,

a) welches sind die Koordinaten x, y des Punktes der Bahn, in welchem sich der Körper nach t Sekunden befindet?

b) wie groß ist seine Geschwindigkeit
c) welche Richtung hat er
} in diesem Punkte?

13. a) Man soll aus der vorhergehenden Aufgabe eine Gleichung zwischen den Koordinaten x und y jedes beliebigen Punktes der Bahn, und somit die Gestalt der Bahn auffinden.

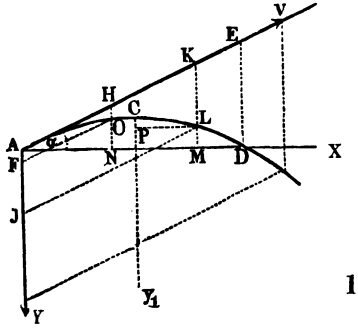
b) Welches ist also die Gleichung der Bahn in Aufgabe 10?

14. Aus einer horizontalen, 0,6 m über einer horizontalen Ebene befindlichen Röhre fließt ein Wasserstrahl aus, der eine Sprungweite von 1,75 m hat, wie groß ist die Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers?

---

15. Ein Körper wird (Fig. 28) von A aus in einer Richtung AV geworfen, die mit dem Horizont AX den Elevationswinkel α einschließt; man soll

Fig. 28.



a) durch rechtwinkelige Koordinaten die Lage eines Punktes bestimmen, in welchem sich der geworfene Körper nach Verfluß der Zeit t befindet, sowie

b) eine Gleichung aufstellen, mittels welcher sich die eine dieser Koordinaten aus der andern ohne Kenntnis der Zeit t finden läßt.

16. Man soll aus den in voriger Aufgabe gefundenen Gleichungen ableiten

a) die Wurfweite W, d. h. die Entfernung des Punktes, in welchem der geworfene Körper wieder die Horizontale AX trifft;

b) die bis dahin verflossene Zeit, d. h. die Wurfzeit T;

c) die erreichte größte Höhe oder Wurfhöhe H.

17. a) Es soll bewiesen werden, daß die Wurfweite W für die Elevationswinkel α und $90^0 - \alpha$ bei gleicher Anfangsgeschwindigkeit die nämliche ist.

b) Ist dasselbe auch bezüglich der Wurfzeit T und der Wurfhöhe H der Fall?

18. Bei welcher Größe des Wurfwinkels α wird die Wurfweite W am größten sein? Und welche bemerkenswerte Beziehung findet in diesem Falle zwischen Wurfweite und Wurfhöhe statt?

19. Wie groß sind Wurfweite, Wurfhöhe und Wurfzeit, wenn man in der Auflösung zu 16 . . . $c = 40$ m und $\alpha = 30^0$, oder $\alpha = 45^0$ setzt?

20. In welcher Höhe (h) wird sich ein Körper nach $2^1/_2$ Sekunden befinden, wenn er unter einem Winkel von 15^0 mit einer Geschwindigkeit von 800 m abgeschossen wurde?

21. Unter welchem Winkel α muß ein Körper in die Höhe geworfen werden, um bei einer Anfangsgeschwindigkeit von 120 m eine Wurfhöhe von 400 m zu erreichen?

22. Unter welchem Elevationswinkel (α) muß eine Kugel abgeschossen werden, um bei einer Anfangsgeschwindigkeit von $c = 400$ m einen Punkt zu treffen,
   a) der eine horizontale Entfernung $e = 4400$ m hat?
   b) der vertikal über dem in a) angegebenen Punkte in einer Höhe liegt, die unter einem Winkel $\beta = 5^0$ erscheint?
   c) der ebenso tief unter diesem Punkte liegt?

23. Welche Höhe H und welche Sprungweite W erreicht ein Wasserstrahl, der unter einem Elevationswinkel von 60^0 mit 30 m Geschwindigkeit aufsteigt?

24. Wenn man das Gußrohr einer Feuerspritze einmal um 40^0, das andere Mal um 50^0 gegen den Horizont neigt; in welchem Verhältnis stehen die Sprungweiten der Wasserstrahlen?

25. In Aufgabe 15 wurde für die Wurfbahn die Gleichung $y = x \, tang \, \alpha - x^2 \frac{g}{2 c^2 \cos^2 \alpha}$ gefunden, wobei die Abscissen x vom Anfangspunkte A an in der Horizontalen AX und die Ordinaten y aufwärts von der Horizontalen genommen wurden. Man soll jetzt diese Gleichung in eine solche umformen, in welcher die Abscissen, die hier mit y_1 bezeichnet werden mögen, in der durch den Scheitelpunkt C der Wurfbahn gehenden Vertikalen von C an nach unten, sowie die zugehörigen Ordinaten x_1 senkrecht auf die Vertikale und zwar die nach der Seite X zu gerichteten positiv, also die entgegengesetzt gerichteten negativ genommen werden.

VII. Die Zentralbewegung, die Ablenkungs- oder Zentripetalkraft und die Schwerkraft.

(Fl. §. 45 bis 49; Kr. §. 41 und 207 bis 210.)

---

1. Wie groß ist die lineare Geschwindigkeit und wie groß die Winkelgeschwindigkeit eines Körpers, der in t (4) Sekunden die Peripherie eines Kreises vom Halbmesser r (3) m durchläuft?
2. Wenn das Schwungrad einer Dampfmaschine 3 m Durchmesser hat und in der Minute 40 Umläufe macht, welche Geschwindigkeit v (in der Sekunde) hat sein äußerer Umfang?
3. Wie groß ist die Linear- und wie groß die Winkelgeschwindigkeit eines Punktes des Erdäquators bei der Umdrehung um die Erdachse, wenn der Umfang der Erde zu 5400 Meilen und die Meile zu 7420 m angenommen wird?
4. Wie groß muß der Durchmesser d eines Mühlsteins genommen werden, welcher in der Minute 100 Umgänge machen soll, wenn der Erfahrung gemäß für einen guten Mahlprozeß die Umfangsgeschwindigkeit des Steins 7,5 m betragen muß?

---

5. Wie groß ist die Zentripetalkraft F, vermöge welcher eine Bleikugel von $G = 109$ g Gewicht, die an einem Faden von $r = 0{,}5$ m Länge mit einer Geschwindigkeit von $c = 3$ m im Kreise herumschwingt, in diesem Kreise bleibt? Wie groß ist die Zentripetalbeschleunigung?
6. Wenn ein Körper von 65,4 kg Gewicht einen Kreis vom Halbmesser $= 2$ m mit einer Geschwindigkeit von 3 m beschreibt, wie groß ist die auf ihn wirkende Ablenkungskraft F?
7. In welchem Falle wird die auf einen Körper wirkende Ablenkungskraft F dem Gewicht G desselben gleich sein?
8. Zwei durch einen Faden miteinander verbundene Kugeln von 6 und 2 g Gewicht stecken leicht verschiebbar auf einem Metalldraht, der horizontal auf der vertikalen Achse einer Schwungmaschine befestigt ist. Die erste Kugel ist von der Achse, um welche der Draht gedreht werden kann, 0,15 m entfernt; in welcher Entfernung von der Drehungsachse muß die zweite Kugel sich befinden, damit das System der beiden Kugeln nach keiner Seite sich bewegt?
9. Ein Eisenbahnwagen vom Gewicht G bewegt sich auf einer Bahn von 1,5 m Spurweite und sein Schwerpunkt liegt 1,2 m über der Schienenober-

fläche. Es soll berechnet werden, welche Geschwindigkeit v der Wagen höchstens erreichen darf, damit er bei seiner Bewegung in einer Kurve vom Halbmesser = 72 m durch die Zentrifugalkraft nicht aus den Schienen getrieben werde?

---

10. Wie groß ist die Zentripetalbeschleunigung f_0 eines Körpers am Niveau des Meeres unter dem Äquator, wenn man den Erdhalbmesser r (nach Bessel) = 6 377 398 m und die Umdrehungszeit t = 23 Stunden 56 Minuten 4 Sekunden = 86 164 Sekunden annimmt*)?
11. Durch Pendelbeobachtungen hat man die Beschleunigung der Schwere am Niveau des Meeres unter dem Äquator g_0 = 9,7806 m gefunden; wie groß würde diese Beschleunigung sein, wenn sich die Erde nicht um ihre Achse drehte? Und wie groß ist, mit der Beschleunigung der Schwere verglichen, die Zentripetalbeschleunigung unterm Äquator?
12. Wievielmal schneller müßte sich die Erde um ihre Achse drehen, damit am Äquator die auf einen Körper wirkende Schwerkraft der Gegenwirkung seiner Masse (der unrichtig sogenannten Zentrifugalkraft) gleich würde, der Körper also gewichtslos erschiene?
13. Mit welcher Geschwindigkeit müßte ein Körper an der Oberfläche der Erde horizontal geworfen werden, um nie wieder zur Erde zu gelangen?
14. Es soll bewiesen werden, daß unter Annahme einer vollkommenen Kugelgestalt der Erde die Schwere vom Erdäquator gegen die Pole hin dem Quadrat der Sinus der geographischen Breiten proportional zunimmt.
15. Wie groß ergiebt sich unter Annahme einer vollkommenen Kugelgestalt der Erde die Beschleunigung g_φ der Schwere an einem Orte von der geographischen Breite = φ, wenn die am Äquator = g_0 ist? Und wie groß der Überschuß der Schwere am Nordpol über die am Äquator?
16. Aus Pendelbeobachtungen und Gradmessungen hat man für g_φ die folgende den Beobachtungen in allen Breitengraden entsprechende Formel $g_\varphi = g^0 (1 + 0{,}0052\ sin^2 \varphi)$ gefunden, worin g_0 = 9,7806 m ist; wie groß ergiebt sich daraus der Überschuß der Schwere am Nordpol über die am Äquator, und welchen Schluß muß man aus der Vergleichung dieses Wertes mit dem in voriger Aufgabe theoretisch gefundenen ziehen?
17. Wie groß ergiebt sich aus voriger Aufgabe die Beschleunigung g_φ der Schwere in einer Breite von 45°?

---

18. Der Mond dreht sich binnen 27,3 Tagen mittlerer Zeit um die Erde. Wenn nun die Mondbahn als eine Kreislinie und die Entfernung des Mondes vom Mittelpunkte der Erde zu 60 Erdhalbmessern, der Erdhalbmesser r aber = 6 366 739 m angenommen wird, wie groß ist die Zentripetalbeschleunigung f des Mondes bei seiner Bewegung um die Erde?

---

*) Um diese Zentripetalbeschleunigung wird die Fallbeschleunigung des Körpers vermindert, der Körper also leichter, als wenn die Erde sich nicht drehte.

19. Wie groß ist der Fallraum der Erde gegen die Sonne in einer Minute, oder, richtiger ausgedrückt, wie groß würde der Weg sein, den die Erde während der ersten Minute ihres Falles nach der Sonne zurücklegen würde, wenn sie keine Tangentialbewegung hätte, sondern der Anziehungskraft der Sonne ungehindert folgen könnte? (Die Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn = 4,12 Meilen, die Meile = 7420 m und die Entfernung der Sonne von der Erde = 21 Millionen Meilen angenommen.)

20. Wie groß ist dagegen der Fallraum der Sonne gegen die Erde während einer Minute? (Die Entfernung der Sonne von der Erde 400mal so groß angenommen als die des Mondes.)

21. Wie groß berechnen sich aus den Resultaten der beiden vorhergehenden Aufgaben die Masse M, sowie die Dichtigkeit D der Sonne, in beiden Fällen die der Erde als Einheit, sowie das Volumen V der Sonne 1 400 000 mal so groß wie das der Erde angenommen?

22. Wie groß ergiebt sich hiernach die Schwerkraft an der Oberfläche der Sonne?

23. Wie groß ist die Beschleunigung der Erde gegen einen fallenden Stein?

24. Nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz ist die Schwere eines Körpers dem Quadrate seiner Entfernung vom Mittelpunkte der Erde umgekehrt proportional. Folgt nicht daraus, daß das Gewicht eines Körpers, der in den Mittelpunkt der Erde gebracht werden könnte, dort am größten wäre?

25. Nach dem in voriger Aufgabe angeführten Gesetze kann der freie Fall eines Körpers (selbst im luftleeren Raume) keine gleichmäßig beschleunigte Bewegung sein und nur der Fall von geringen Höhen als eine solche betrachtet werden. Wie groß berechnet sich jenem Gesetz gemäß die Beschleunigung x eines fallenden Körpers in der Höhe h über der Meeresfläche, wenn g seine Beschleunigung am Niveau des Meeres in der geographischen Breite des betreffenden Ortes ist?

26. Wenn ein Körper in der Richtung eines Durchmessers der Erde diese frei durchfallen könnte, wo würde er seine größte Geschwindigkeit haben? Und mit welcher Geschwindigkeit würde er am andern Endpunkte des Durchmessers ankommen?

27. Wenn die Sonne und die Erde plötzlich ohne seitliche Bewegung einander gegenüberständen, so würden sie sich mit beschleunigter Geschwindigkeit gegeneinander bewegen. In welchem Punkte ihrer Verbindungslinie würden sie aufeinander stoßen, wenn ihre Entfernung voneinander = e und die Sonnenmasse = M, die Erdmasse = m gesetzt wird?

28. Ein Himmelskörper, dessen Masse = M_1, ist von einem andern Himmelskörper, dessen Masse = M_2, um die Strecke d entfernt; in welchem Punkte ihrer Verbindungslinie wird ein Körper, dessen Masse = m, von beiden gleich stark angezogen?

29. In welcher Entfernung von der Erde wird ein zwischen Erde und Mond befindlicher Körper in Ruhe bleiben, die Entfernung des Mondes von der Erde = 60 Erdhalbmesser und die Masse des Mondes = $1/81$ der Erdmasse angenommen?

30. Die Umlaufszeit der Erde um die Sonne ist $U = 365{,}262$ Tage, ihre mittlere Entfernung von derselben $D = 20$ Millionen Meilen; wie groß berechnet sich die mittlere Entfernung (d) der Venus von der Sonne, deren Umlaufszeit $u = 224{,}72$ Tage beobachtet worden ist?

VIII. Das Trägheitsmoment der Körper.

---

1. Das Trägheitsmoment einer sehr dünnen Stange (einer materiellen geraden Linie) von der Länge b und der Masse M in Beziehung auf eine Drehachse zu finden, die auf ihr senkrecht steht,

a) wenn die Achse durch einen Endpunkt der Stange geht;

b) wenn sie durch einen Punkt geht, der die Stange in die beiden Teile b_1 und b_2 teilt;

c) wenn sie durch die Mitte der Stange geht.

2. Das Trägheitsmoment einer dünnen Stange AB (Fig. 29) von der Länge b und der Masse M in Beziehung auf eine Drehachse zu finden, die

Fig. 29.

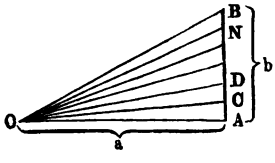
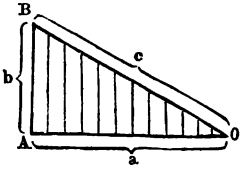


Fig. 30.

Fig. 31.



in O auf der Ebene ABO senkrecht steht und deren (senkrechte) Entfernung von $AB = a$ ist,

a) wenn die Senkrechte a durch den Endpunkt A der Stange geht;

b) wenn die Senkrechte a die Stange in zwei Teile $CB = b_1$ und $CA = b_2$ teilt (Fig. 30);

c) wenn die Senkrechte a die Stange b halbiert.

3. Das Trägheitsmoment eines rechtwinkeligen (materiellen) Dreiecks OAB (Fig. 31) zu bestimmen, dessen Masse $= M$, dessen Hypotenuse $OB = c$ und dessen Katheten $OA = a$, $AB = b$ sind und das sich um eine durch O gehende, auf der Ebene des Dreiecks senkrecht stehende Achse dreht.

4. Das Trägheitsmoment eines gleichschenkeligen Dreiecks zu bestimmen, von welchem die Höhe $= a$, jeder der gleichen Schenkel $= c$ und die Masse

$= M$ ist, und das sich um die der Grundlinie gegenüberliegende Spitze dreht.

5. Das Trägheitsmoment eines Rechtecks zu bestimmen, das die Seiten a und b und die Masse M hat und sich um eine durch einen Eckpunkt gehende und auf der Ebene des Rechtecks senkrecht stehende Achse dreht.

6. Das Trägheitsmoment eines regelmäßigen Vielecks zu bestimmen, dessen großer Halbmesser $= R$, dessen kleiner $= r$, dessen Masse $= M$ ist, und das sich um eine durch seinen Mittel- oder Schwerpunkt gehende auf der Ebene des Vielecks senkrecht stehende Achse dreht.

7. Das Trägheitsmoment eines Kreises vom Halbmesser r und der Masse M in Beziehung auf eine Drehachse zu bestimmen, die durch seinen Mittel- oder Schwerpunkt geht und auf der Ebene des Kreises senkrecht steht.

8. Das Trägheitsmoment eines senkrechten Prismas von der Masse M zu bestimmen, das ein rechtwinkeliges Dreieck mit den Katheten a und b zur Grundfläche und eine Höhe $= h$ hat, und das sich um die der Seite b der Grundfläche gegenüberliegende Höhenkante h dreht.

9. Das Trägheitsmoment eines senkrechten Prismas von der Masse M zu berechnen, das ein gleichschenkeliges Dreieck von der Grundlinie b und der Höhe a zur Grundfläche hat und sich um die durch die Spitze des Dreiecks gehende Höhenkante h dreht.

10. Das Trägheitsmoment eines dreiseitigen senkrechten Prismas von der Masse M zu bestimmen, dessen Grundfläche die Seiten b, c und d hat, und das sich um die der Seite b gegenüberliegende Höhenkante h dreht.

11. Das Trägheitsmoment eines senkrechten Parallelepipeds von der Masse M und den Kanten a, b und h zu finden,
    a) das sich um die Kante h dreht, oder
    b) dessen Drehachse parallel der Kante h durch die Mitte der Kante a geht, oder
    c) dessen Drehachse parallel der Kante h durch den Schwerpunkt des Parallelepipeds geht.

12. Das Trägheitsmoment eines um seine geometrische Achse sich drehenden Cylinders von der Masse M, der Länge l und dem Halbmesser r zu berechnen.

13. Das Trägheitsmoment eines hohlen Cylinders von der Masse M zu finden, dessen Länge $= l$, äußerer Radius $= R$ und innerer Radius $= r$ ist, und der sich um seine geometrische Achse dreht.

14. Das Trägheitsmoment eines Kugelsegments von der Masse M zu berechnen, wenn r der Halbmesser der Kugel, h die Höhe des Segments ist, und es sich um den mit der Höhe h zusammenfallenden Kugeldurchmesser dreht.

15. Wie groß ist das Trägheitsmoment einer Kugel von der Masse M und dem Halbmesser r, die sich um einen Durchmesser dreht?

16. Wenn bei dem Prisma der Aufgabe 9 die Grundlinie b der Grundfläche $= 6$ cm und ihre Höhe $a = 10$ cm, sowie die Höhe h des Prismas $= 4$ cm ist und jeder Kubikcentimeter 7 g wiegt, wie groß ist das Trägheitsmoment M, und welche Bedeutung hat diese Zahl?

17. Das in voriger Aufgabe gefundene Trägheitsmoment bezieht sich auf die Entfernung eines Centimeters von der Drehachse. Wie groß ist es, wenn man es auf die Entfernung eines Meters von der Drehachse bezieht?

18. Man soll das Trägheitsmoment eines um seine geometrische Achse sich drehenden gußeisernen Cylinders von 0,6 m Länge, 0,2 m Halbmesser und 7,2 spezif. Gewicht finden.

19. Welche Masse Q würde, im Mantel des Cylinders der vorigen Aufgabe vereinigt, dasselbe Trägheitsmoment haben wie der volle Cylinder?

20. Zwei gleiche Kugelsegmente von Messing sind zu einer Pendellinse vereinigt. Die Höhe jedes der Segmente ist $h = 0{,}015$ m, der zugehörige Kugelhalbmesser $r = 0{,}5$ m und das spezifische Gewicht des Messings $= 8{,}4$. Wie groß berechnet sich hieraus das Trägheitsmoment der Pendellinse in Beziehung auf eine Achse, welche der geometrischen (durch den Schwerpunkt gehenden) Achse parallel und um $e = 0{,}99$ m von ihr entfernt ist?

21. Wie groß ist das Trägheitsmoment eines Schwungrades mit sechs Radarmen, wenn der äußere Halbmesser des Radkranzes $R = 3$ m, der innere $r = 2{,}75$ m, die Breite eines der parallelepipedischen Radarme $b = 0{,}1$, das Gewicht des Radkranzes $G_1 = 6000$ kg und das eines Armes $G_2 = 100$ kg ist?

22. Um das Trägheitsmoment M eines unregelmäßig gestalteten Körpers vom Gewicht Q, dessen Schwerpunkt man durch Versuche bestimmt hat, zu finden, hat man den Körper um eine Achse schwingen lassen, die vom Schwerpunkt die Entfernung e hat, und die Schwingungszeit T (Sekunden) beobachtet. Wie groß ist M?

IX. Das Pendel.

Einfaches Pendel.

1. Wenn von zwei Pendeln das eine 120, das andere 150 Schwingungen während einer Minute vollenden, wie verhalten sich ihre Längen l_1, l_2?

2. Wie groß ist die Schwingungszeit t eines Pendels von 1 m Länge an einem Orte, wo $g = 9{,}808$ m ist?

3. Wie groß ist an demselben Orte die Länge l eines Pendels, das eine Schwingungszeit von $2^1/_2$ Sekunden hat?

4. Ein Pendel von 3,97501 m Länge hat eine Schwingungszeit von zwei Sekunden, wie groß ist g (Beschleunigung der Schwere) an diesem Orte?

5. Wie groß ist die Erdbeschleunigung g_0 am Äquator, wenn dort die Länge des Sekundenpendels $L_0 = 0{,}9910256$ m ist? (Die Länge des Sekundenpendels an irgend einem Orte wird durch Beobachtung gefunden und daraus der Wert von g an diesem Orte aus der Gleichung $g = \pi^2 . L$ berechnet.)

6. Wie groß berechnet sich die Länge L des Sekundenpendels an einem Orte, wo $g = 9{,}808$ m ist?

7. Wenn man an einem Orte beobachtet hat, daß ein Pendel von $l = 1$ m Länge während $t = 4$ Minuten $n = 239$ Schwingungen macht, wie lang ist das Sekundenpendel L an diesem Orte?

8. Wieviel Schwingungen in der Minute macht ein Pendel von 1,25541 m Länge in Berlin, wo die Länge des Sekundenpendels $= 0{,}994277$ m ist?

9. Wenn die Länge L eines Sekundenpendels (z. B. durch Wärme) um eine kleine Größe d zunimmt, wie viel Schwingungen wird es täglich weniger machen?

10. a) Wieviel Minuten und Sekunden würde eine Uhr mit Sekundenpendel, die am Äquator richtig geht, am Pole voreilen?

    b) Eine Uhr mit Sekundenpendel, die in Paris (unter 48°50′14″ nördlicher Breite) richtig ging, also täglich $N = 86\,400$ Sekunden schlug, blieb, wie Richer 1672 beobachtete, in Cayenne (unter nahe 5° Nordbreite) täglich $n = 128$ Sekunden zurück. Um wieviel mußte das Pendel, dessen Länge $L = 0{,}99385$ m war, verkürzt werden, damit es in Cayenne Sekunden schlagen konnte?

11. Wie Foucault in Paris 1851 zuerst gezeigt hat, scheint sich die Schwingungsebene eines einfachen Pendels wegen der Achsendrehung der Erde nördlich und südlich des Äquators um die Vertikale des betreffenden Orts zu drehen, und zwar in der geographischen Breite φ binnen 24 Stunden um einen Winkel von $360^0 \sin \varphi$ und in einer Richtung, die nördlich vom Äquator der Bewegung des Zeigers einer Uhr entgegengesetzt, südlich gleich gerichtet ist. Um welchen Winkel dreht sich hiernach die Schwingungsebene eines Pendels in Berlin, wo $\varphi = 52°30′17″$ ist, binnen einer Stunde? Und nach wieviel Stunden würde sie einen Umlauf vollendet haben?

12. Durch Beobachtung der Sekundenpendel-Längen an vielen Orten und mit Berücksichtigung der Abplattung der Erde, wie sie sich aus Gradmessungen ergiebt, hat man für die Länge des Sekundenpendels die empirische Formel gefunden:

$$L_\varphi = L_0 \, (1 + 0{,}00507188 \sin^2 \varphi),$$

wo L_0 die Länge des Sekundenpendels am Äquator und L_φ diejenige an einem Orte von der geographischen Breite φ ist. — Ebenso gilt:

$$g_\varphi = g_0 \, (1 + 0{,}00507188 \sin^2 \varphi).$$

Dabei ist:

$$L_0 = 0{,}9910256 \text{ und } g_0 = 9{,}78103 \text{ m}.$$

Wie groß ist demnach die Länge des Sekundenpendels

in Berlin unter einer Breite von $52^\circ 30' 17''$
„ Kassel „ „ „ „ $51^\circ 19' 7''$
„ Hanau „ „ „ „ $50^\circ 8' 24''$?

13. Wenn ein Sekundenpendel am Meeresspiegel eine Länge $L = 0{,}99423$ m hat, welche Länge L_1 muß es unter derselben Breite in einer Höhe von $h = 1500$ m über dem Meeresspiegel erhalten? (Den Halbmesser der Erde $r = 6\,356\,000$ m gerechnet.)

Kegelpendel.

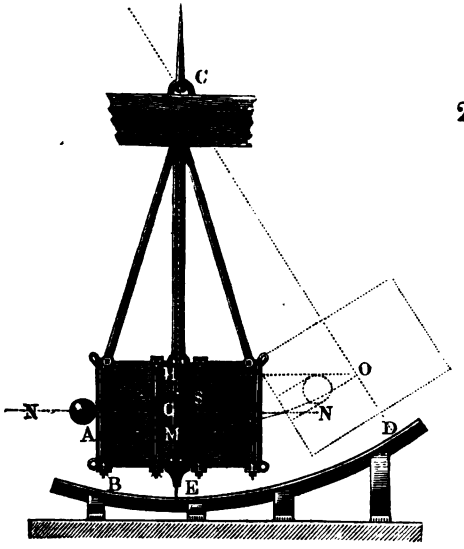
14. Welche Länge x hat ein Vertikalpendel, dessen Schwingungszeit t bei sehr kleinem Ausschlagwinkel halb so groß ist, als die Umdrehungszeit T eines Kegelpendels von der Länge l und dem Ausschlagwinkel a?
15. Die Kugeln des Zentrifugalregulators einer Dampfmaschine machen n Umläufe in der Minute, wie groß ist die Höhe h des dadurch gebildeten Kegels?
16. Wie groß berechnet sich aus der Winkelgeschwindigkeit w der Achse eines Zentrifugalregulators, dessen Pendelstangenlänge $= l$ ist, die Höhe x, um welche die auf der Achse gleitende Muffe gehoben wird?

Zusammengesetztes Pendel.

17. Bei einem zusammengesetzten Pendel hat man die Schwingungszeit $t = 1{,}5$ Sekunden beobachtet; wie groß ist die reduzierte Länge desselben, d. h. wie weit ist sein Schwingungsmittelpunkt vom Aufhängepunkte entfernt?
18. Man soll die Länge L des einfachen Pendels finden, welches dieselbe Schwingungszeit hat, wie eine dünne Stange von $l = 3$ m Länge und einem Gewicht von $Mg = 0{,}25$ kg, die um den einen ihrer Endpunkte schwingt.
19. Eine Kugel vom Halbmesser $r = 1$ cm und vom Gewicht Mg hängt an einem feinen Faden, dessen Aufhängepunkt vom Mittelpunkte der Kugel um $d = 90$ cm entfernt ist; wie weit ist der Schwingungsmittelpunkt vom Aufhängepunkte entfernt?
20. Ein Uhrpendel besteht aus einem Draht von 30 cm Länge und 0,025 kg Gewicht, woran eine Kugel hängt, deren Halbmesser $= 4$ cm und deren Gewicht $= 0{,}75$ kg ist; welche Entfernung x hat der Schwingungsmittelpunkt dieses Pendels von der Drehungsachse? Und wie groß ist die Schwingungszeit t desselben?
21. Ein Metronom (musikalischer Taktmesser) besteht im wesentlichen aus einer dünnen Metallstange, die sich um eine auf ihrer Längenrichtung senkrecht stehende Achse dreht, an ihrem unteren Ende eine Metallkugel, oberhalb der Achse aber ein verschiebbares Gewicht trägt, durch dessen Verschiebung also die Schwingungszeit des Pendels verändert werden kann. Gesetzt, die Metallkugel habe ein Gewicht $= p$ Kilogramm und sei a Meter vom Dreh-

punkte entfernt, ferner wiege das verschiebbare Gewicht q Kilogramm und seine Entfernung vom Drehpunkte betrage x Meter; wie groß berechnet sich annähernd genau die Schwingungszeit t dieses Pendels, wenn man p und q als bloße Massenpunkte in Rechnung bringt, die Masse des dünnen Stängelchens aber ganz unberücksichtigt läßt?

Fig. 32.



22. Ein ballistisches Pendel (Fig. 32) ist ein Pendel von großer Masse, das zur Bestimmung der Geschwindigkeit von Gewehr- und Geschützkugeln dient. Ein solches Pendel habe ein Gewicht von $Mg = 1439$ kg, sein Schwerpunkt S sei $e = 1{,}32$ m, sein Schwingungsmittelpunkt M aber $l = 1{,}5$ m von der Drehachse C entfernt. Die Kugel, welche in großer Nähe und in horizontaler Richtung abgeschossen wird, habe das Gewicht $mg = 3$ kg, treffe das Pendel in der Richtung nach dem Punkte G, der um $a = 1{,}4$ m vom Drehpunkte C entfernt ist, und das Pendel werde durch den Schuß, wobei die Kugel in dem Pendel stecken bleibt, um den Winkel $\alpha = 15^0$ gedreht. Man soll daraus die Geschwindigkeit der Kugel berechnen.

X. Stoß der Körper.

1. Ein unelastischer Körper von $M_1 g = 80$ g Gewicht, der sich mit einer Geschwindigkeit von $c_1 = 5$ m fortbewegt, wird von einem andern unelastischen Körper von $M_2 g = 20$ g Gewicht, der sich mit einer Geschwindigkeit von $c_2 = 8$ m in derselben Richtung fortbewegt, gestoßen; wie groß ist von da an die gemeinschaftliche Geschwindigkeit c?

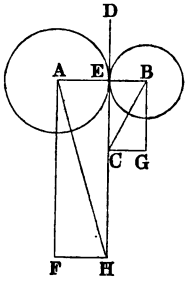
2. Wie groß würde aber die gemeinschaftliche Geschwindigkeit dieser beiden Körper sein, wenn die Richtungen ihrer Bewegungen einander entgegengesetzt wären?

3. Wie groß würde die gemeinschaftliche Geschwindigkeit sein, wenn der zweite Körper in Ruhe wäre?

4. Um einen unelastischen Körper von $M_1 g = 150$ kg Gewicht aus einer Geschwindigkeit von $c_1 = 2$ m in eine Geschwindigkeit von $c = 3$ m zu versetzen, läßt man ihn durch einen Körper von $M_2 g = 60$ kg stoßen; welche Geschwindigkeit c_2 muß dieser haben?

5. Von zwei unelastischen Kugeln A und B (Fig. 33) wiegt die eine 3 kg, die andere 2 kg. Die eine bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von 22,5 m unter einem Winkel von 25° gegen die Berührungsebene CD*) der beiden Kugeln, die andere mit einer Geschwindigkeit von 12 m unter einem Winkel von 36° gegen die Berührungsebene CD; welche Richtungen und Geschwindigkeiten haben die Kugeln nach dem Zusammenstoß? (Nach Kries.)

Fig. 33.



6. Es mögen bezüglich der Aufgaben 1, 2 und 3 sowohl die Summen der Bewegungsgrößen, als die Summen der lebendigen Kräfte vor und nach dem Stoß, sowie deren Differenzen berechnet werden.

7. Im §. 64 des Lehrbuches (Fl.) ist der Verlust an lebendiger Kraft beim Stoß zweier Kugeln von den Massen M_1 und M_2 und der bezüglichen Geschwindigkeiten c_1 und c_2 für den Fall berechnet worden, daß die Kugeln gleiche Bewegungsrichtung haben und $c_1 > c_2$ ist, die Kugeln also nach dem Stoß mit der gemeinschaftlichen Geschwindigkeit $c = \frac{M_1 c_1 + M_2 c_2}{M_1 + M_2}$ in der Richtung von c_1 weiter gehen, und es wurde dafür der Ausdruck $\frac{1}{2} M_1 (c_1^2 - c^2) - \frac{1}{2} M_2 (c^2 - c_2^2)$, oder, wenn man für c den vorhin angeführten Wert setzt, der Ausdruck $\frac{1}{2} \frac{M_1 . M_2}{M_1 + M_2} (c_1 - c_2)^2$ gefunden. Es möge nun dieselbe Aufgabe für den Fall gelöst werden, daß die beiden vor dem Stoß entgegengesetzte Bewegungsrichtungen haben, nach dem Stoß aber mit der gemeinschaftlichen Geschwindigkeit c in der Richtung der Geschwindigkeit c_1 sich bewegen, also $c < c_1$ sei.

8. Eine elastische Kugel vom Gewicht $M_1 = 30$ g bewegt sich mit einer Geschwindigkeit $c_1 = 20$ dm und stößt zentral auf eine andere elastische Kugel vom Gewicht $M_2 = 40$ g, die mit der Geschwindigkeit $c_2 = 12$ dm nach derselben Richtung fortgeht. Wie groß sind die Geschwindigkeiten v_1, v_2 der beiden Kugeln nach dem Zusammenstoß?

---

*) Nämlich die Ebene, welche auf der Zentrallinie der beiden Kugeln in ihrem Berührungspunkte senkrecht steht.

9. In voriger Aufgabe habe die zweite Kugel ein Gewicht von 105 g und eine Geschwindigkeit von 2 dm, alles übrige bleibt dasselbe; wie groß sind v_1 und v_2?

10. Zwei elastische Kugeln, die eine von 10 kg, die andere von 16 kg Gewicht, stoßen mit den Geschwindigkeiten von 4,5 m und 2,5 m in entgegengesetzter Richtung zentral aneinander; wie groß sind ihre Geschwindigkeiten v_1 und v_2 nach dem Stoß?

11. Wenn sich aber die zwei Kugeln mit jenen Geschwindigkeiten in einer und derselben Richtung bewegen, wie groß sind dann ihre Geschwindigkeiten v_1, v_2 nach dem Stoß?

12. Von zwei gleichen elastischen Kugeln hat die eine die Geschwindigkeit = 2 m, die andere ruht. Wie groß werden nach dem zentralen Stoß die Geschwindigkeiten beider sein?

13. Eine Anzahl elastischer Kugeln, wovon die erste 1 kg wiegt, die zweite halb so schwer ist wie die erste, die dritte halb so schwer wie die zweite, und so jede folgende halb so schwer ist wie die vorhergehende, sind in einer Reihe so aufgehängt, daß sie einander berühren und ihre Mittelpunkte in einer geraden Linie liegen. Wenn nun die erste Kugel mit einer Geschwindigkeit von 1 cm auf die zweite stößt, welche Geschwindigkeit erlangt die letzte Kugel, wenn es deren n oder 10 oder 100 sind?

14. Zwei elastische Kugeln wiegen zusammen 36 kg. Sie bewegen sich zentral gegeneinander, und zwar die eine mit einer Geschwindigkeit von 21, die andere von 10 m. Nach dem Stoß hat die erste eine Geschwindigkeit von 6 m in ihrer ursprünglichen Richtung; wie groß sind die Gewichte M_1, M_2 der beiden Kugeln und wie groß ist die Geschwindigkeit v_2 der zweiten? (Kries.)

15. Eine elastische Kugel A von 9 kg und eine andere B von $3^1/_2$ kg bewegen sich schief gegeneinander, die eine mit einer Geschwindigkeit von 10 m unter einem Winkel von 16° gegen die Berührungsebene beider Kugeln, die andere mit einer Geschwindigkeit von 3,5 m unter einem Winkel von 24° gegen die Berührungsebene; welche Bewegungen haben sie nach dem Stoß? (Kries.)

---

16. Bei einer Kunstramme fällt der 500 kg schwere Rammbär von einer Höhe von 1,5 m auf einen einzurammenden Pfahl von 300 kg Gewicht und verursacht in der letzten Hitze von 20 Schlägen ein Eindringen des Pfahls in den Erdboden um 0,08 m, also beim letzten Schlag ein Eindringen um 0,004 m; welche Belastung kann alsdann der Pfahl tragen, ohne tiefer einzudringen?

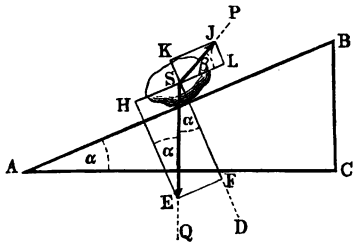
XI. Die Reibung.

(Die Koeffizienten der Reibung und der Steifigkeit des Seiles siehe im Anhang, Tabelle 8.)

---

1. Ein Körper drückt mit einem Gewicht von 52 kg auf eine horizontale Fläche, und seine Fortbewegung auf derselben erfordert eine Kraft von 18,2 kg; wie groß ist der Reibungskoeffizient f?
2. Ein mit Eisen beschlagener und geschmierter Schlitten von 400 kg Gewicht wird auf einer horizontalen Eisenbahn fortgezogen; der Reibungskoeffizient beträgt 0,06, wie groß ist die nötige Kraft P?
3. Wie groß ist die erforderliche Arbeit L, um eine Schleife mit 600 kg Belastung 400 m weit auf einem Straßenpflaster horizontal fortzuziehen, wenn der entsprechende Reibungskoeffizient $= 0{,}45$ ist?
4. Ein Körper von $G = 19{,}62$ kg Gewicht gelangt mit der Geschwindigkeit $v = 20$ m auf eine horizontale Eisfläche; wie weit (x) wird er auf derselben fortgleiten, wenn der Reibungskoeffizient $f = 0{,}02$ ist?
5. a) Wie groß ist die Reibung bei einem gußeisernen Sägegatter von 100 kg Gewicht, das in Bronzebahnen läuft und gut geschmiert ist? ($f = 0{,}07$.)
   b) Wenn dieses Sägegatter eine Hubhöhe von 50 cm hat und in der Minute 120 Züge macht, welche Arbeit geht zur Überwindung der Reibung verloren?
6. Welche Kraft ist zur Überwindung der Reibung des Kolbens im Cylinder einer Dampfmaschine nötig, wenn der Kolben von Metall ist, einen Umfang von 150 cm und eine Höhe von 8 cm hat, und wenn der relative Dampfdruck 1,25 kg auf den Quadratcentimeter beträgt?

Fig. 34.



7. Ein Körper vom Gewicht $Q = 500$ kg befindet sich auf einer schiefen Ebene (Fig. 34) von $\alpha = 36^0$ gegen den Horizont; wie groß muß die Kraft P sein, wenn ihre Richtung die schiefe Ebene unter dem Winkel $\beta = 20^0$ schneidet und der Reibungskoeffizient $= 0{,}3$ ist,
   a) damit sie bei der geringsten Abnahme den Körper nicht mehr am Hinabgleiten verhindern kann?
   b) damit sie bei der geringsten Zunahme den Körper aufwärts bewegt?

8. Wie groß müßte aber in den beiden Fällen der vorigen Aufgabe die Kraft sein, wenn sie 1. parallel zur Basis und 2. parallel zur Länge der schiefen Ebene wirkte?

9. Eine Kugel von 20 kg Gewicht hat auf horizontaler Bahn eine Anfangsgeschwindigkeit von 8 m; nachdem sie 5 m weit gelaufen, kommt sie an eine schiefe Ebene von 20° Neigungswinkel; wie weit wird sie auf der schiefen Ebene aufwärts gehen, wenn der Reibungskoeffizient auf dieser, sowie auf der horizontalen Bahn 0,02 ist?

10. Mittels einer hölzernen, in Holz gehenden Schraube von einer Gangweite $h = 3$ cm und einem mittleren Querschnittshalbmesser $r = 7{,}5$ cm soll eine Last von $Q = 100$ kg überwunden werden; wie groß ist die dazu erforderliche Kraft P, den Reibungskoeffizienten $f = 0{,}3$ angenommen?

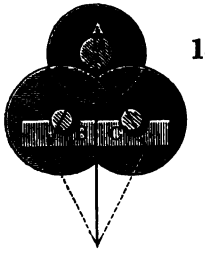
11. a) Welche Kraft P ist nötig, um einen Schlitten mit $Q = 300$ kg Belastung auf einer Holzbahn von $\alpha = 50°$ Neigung gegen den Horizont hinaufzuziehen, wenn der Reibungskoeffizient $f = 0{,}48$ ist.

b) Durch welche Kraft wird aber dieser Schlitten gerade am Heruntergleiten auf der Bahn gehindert?

12. Ein eisernes Rad von 10 000 kg Gewicht hat einen Halbmesser von 3 m, die Zapfen, die auf gußeisernen Lagern liegen, haben einen Halbmesser von 10 cm; wie groß ist die zur Überwindung der Zapfenreibung nötige Kraft am Umfange des Rades, und wie groß die dazu nötige Arbeit, wenn es in einer Minute fünf Umdrehungen macht? ($f = 0{,}075$.)

13. Wie groß ist der durch Zapfenreibung in einer Sekunde verlorene Nutzeffekt bei einem Wasserrade, dessen gußeiserne Zapfen $d = 20$ cm im Durchmesser haben, mit Talg geschmiert in bronzenen Lagern laufen und einen Druck von $Q = 12\,500$ kg zu ertragen haben, wenn das Rad in der Minute $n = 6$ Umdrehungen macht? ($f = 0{,}07$.)

Fig. 35.



14. a) Mittels einer festen Rolle soll eine Last $Q = 1000$ kg gehoben werden. Welche Kraft P ist dazu erforderlich, wenn der Halbmesser der Rolle einschließlich der halben Dicke des Seiles $r_1 = 1{,}2$ dm, der des Zapfens $r_2 = 0{,}15$ dm, das Gewicht der Rolle $G = 4{,}5$ kg ist und man den Koeffizienten der Zapfenreibung $f = 0{,}07$ annimmt, die Steifigkeit des Seiles aber unberücksichtigt läßt?

b) Welche Kraft ist aber erforderlich, wenn das Seil ein neues von 0,4 dm Durchmesser ist und die Steifigkeit desselben berücksichtigt werden soll?

15. Welche Kraft P ist nötig, um die (wälzende) Reibung einer 10 000 kg schweren Lokomotive auf einer horizontalen Bahn zu überwinden. Wie groß ist also die Arbeit L, welche nötig ist, um dieser Lokomotive eine Geschwindigkeit von 8 m zu erteilen? Und welche Arbeit L_1 ist alsdann während einer Minute erforderlich, damit die Lokomotive diese Geschwindigkeit konstant beibehalte?

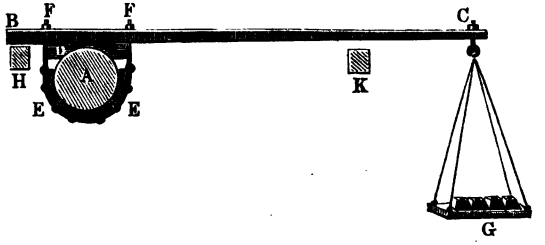
16. Ein Prisma vom Gewicht $= Q$ gleitet über festliegende Friktionsrollen hin, wovon jede einen Halbmesser $= R$, während ihr Zapfen einen Halbmesser $= r$ hat. Welche Kraft P ist zur Überwindung der Reibung erforderlich?

17. Ein Rad A (Fig. 35, a. v. S.) ruht mit jedem Ende seiner Achse D auf zwei Friktionsrädern B und C, wovon jedes einen Halbmesser $= R$ und einen Zapfen vom Halbmesser $= r$ hat. Wenn nun der bezügliche Koeffizient der Zapfenreibung $= f$ und das Gewicht des Rades A nebst seiner Achse $= Q$ ist, welche Kraft ist zur Überwindung der Reibung beim Umdrehen des Rades A nötig? (Nach Weisbach.)

---

18. Um die Leistungsfähigkeit einer Maschine, z. B. eines Mühlenwerks, dessen Motor fließendes Wasser ist, zu bestimmen, kann man sich des Prony'schen Zaums (Bremsdynamometers) bedienen. Derselbe besteht (Fig. 36) aus

Fig. 36.



einer Klemmvorrichtung $FEEF$, welche die Welle A des Rezeptors, hier des Wasserrades, umschließt, und einem mit ihm fest verbundenen Hebel BC, an dessen Ende eine Wagschale G hängt. Die Klemmvorrichtung besteht aus einem am Hebel befestigten kreisförmig ausgeschnittenen Holzstück D und einer aus Eisenblechstücken zusammengesetzten nach der Welle zu mit kleinen Holzbrettchen belegten Kette, die durch Schraubenmuttern bei FF mehr oder minder fest um die Welle angezogen werden kann. Bei der Anwendung des Apparats sind noch unterhalb des Hebels BC, aber ohne Verbindung mit demselben, zwei feste Stützpunkte H und K erforderlich, welche dazu dienen, daß der Hebel nicht allzu sehr aus der horizontalen Lage gedreht werden kann.

Dreht sich nun die Welle A, so strebt sie vermöge der Reibung der Klemmvorrichtung den Hebel BC mitzudrehen; durch auf die Wagschale G gelegte Gewichtstücke kann aber nicht bloß diese Drehung verhindert, sondern auch umgekehrt die Umdrehungsgeschwindigkeit der Welle vermindert und zugleich der Hebel in freier horizontaler Lage erhalten werden. Verursacht man nun durch entsprechende Anziehung der Kette eine solche Reibung, daß die Welle die nämliche Umdrehungsgeschwindigkeit erhält, welche sie gewöhnlich hat, wenn sie, mit der Arbeitsmaschine in Verbindung gebracht, durch diese einen Widerstand überwinden, z. B. Getreide mahlen soll, so leistet die

Reibung des Bremszaums in diesem Fall offenbar dieselbe Widerstandsarbeit, wie die von der Maschine zu überwindende, d. h. dieselbe Arbeit, welche die an der Welle wirkende Kraft durch deren Umdrehung leistet.

Nehmen wir, um diese Arbeit zu berechnen, an, der Hebel des Bremszaums sei $l = 5$ m lang, das Gewicht in der Wagschale nebst dem auf den Punkt C reduzierten Gewicht des Hebels betrage $P = 260$ kg und die Welle des Mühlrades sei so gebremst, daß sie sechs Umläufe in der Minute mache, dabei aber der Hebel eine horizontale Lage erhalte und beibehalte; wie groß berechnet sich hieraus die Arbeit der am Umfang der Welle wirkenden Kraft in einer Minute?

19. Wenn aber dieselbe Welle durch den nämlichen Pronyschen Zaum so gebremst wird, daß sie nur fünf Umläufe in der Minute macht, dabei aber das Gewicht im Punkte C 245 kg betragen muß, um den Hebel horizontal zu erhalten, wie groß ergiebt sich dann die Leistungsfähigkeit L der an der Welle wirkenden Kraft in einer Minute?

20. Welcher Schluß ergiebt sich aus den Resultaten der beiden vorigen Aufgaben?

XII. Elastizität und Festigkeit der Körper.

1. Eine Klaviersaite von $l = 1493$ mm Länge und 0,6586 mm Dicke, also $f = 0{,}34$ qmm Querschnitt, wurde nach Gerstner durch ein Gewicht von $P = 6{,}72$ kg um $D = 1{,}71$ mm gedehnt. Wie groß war der Dehnungsquotient d und der Elastizitätsmodul E dieses Drahtes?
2. Welches Gewicht (P) ist nötig, um einen Eisendraht von 2 m Länge und 0,4 qmm Querschnitt innerhalb der Elastizitätsgrenze um 0,5 mm zu verlängern, den Elastizitätsmodul $= 20\,800$ kg angenommen?
3. Ein Stab von Tannenholz hat einen Querschnitt von 1,5 qcm und wird durch ein Gewicht von 1200 kg gerade zerrissen; wie groß ergiebt sich daraus der Festigkeitsmodul K des Tannenholzes?
4. Welches Gewicht Q ist zum Zerreißen eines Messingdrahtes von 1,25 mm Durchmesser erforderlich, und welches kann er mit Sicherheit tragen?
5. Bei welcher Länge l würde eine Stange von Blei von durchgängig gleichem Querschnitt durch ihr eigenes Gewicht zerrissen?
6. Ein schmiedeeiserner Stab von quadratischem Querschnitt soll eine Last von 40 Ztr. tragen; wie groß muß die Seite seines Querschnittes sein?

7. Wie groß ist der Elastizitätsmodulus des Platins, wenn ein Platindraht von 3 m Länge und 1 qmm Querschnitt durch ein Gewicht von 5 kg eine Verlängerung um 0,88 mm erfährt?

---

8. Ein am einen Ende eingemauerter Balken von Eichenholz hat eine Breite von 1,8 dm, eine Höhe von 2 dm und eine freie Länge von 40 dm; welche an seinem andern Ende hängende (kleinste) Last würde ihn abbrechen und welche kann er dort mit Sicherheit tragen?

9. Welche Last würde aber dieser Balken mit Sicherheit tragen
   a) wenn er wie in 7. am einen Ende eingemauert, die Last aber über seine ganze Länge verteilt wäre?
   b) wenn er an beiden Enden unterstützt wäre, die Last aber in seiner Mitte wirkte?
   c) wenn er an beiden Enden unterstützt und die Last über seine Länge gleichmäßig verteilt wäre?

10. Ein Stab von Eichenholz mit quadratischem Querschnitt von 2,634 cm Seite, der mit seinen beiden Enden wagerecht auf Unterlagen gelegt war, die 98 cm voneinander abstanden, wurde nach Gerstner durch ein der Mitte angehängtes Gewicht von 100,8 kg gebrochen. Wie groß ergab sich daraus der relative Festigkeitsmodul?

11. Eine horizontal an beiden Enden aufliegende rechteckige Stange von Gußeisen ist 0,4 dm breit, 0,6 dm hoch und 3 m lang; welche in ihrer Mitte hängende Last würde sie brechen und welche kann sie mit Sicherheit tragen?

12. Der Boden eines Getreidemagazins ruht auf parallelen eichenen Balken von 3 dm Breite, 4 dm Höhe und 80 dm Länge, deren Mitten 7,5 dm voneinander entfernt sind. Wie hoch läßt sich Getreide, von welchem 1 Liter 0,8 kg wiegt, auf diesem Boden ohne Gefahr des Einbrechens aufschütten?

13. Ein prismatischer Körper vom Querschnitt $= a$ wird durch ein Gewicht $= q$ zerrissen; wenn nun der Querschnitt $= A$ wäre, welches (kleinste) Gewicht Q würde dann zum Zerreißen nötig sein?

XIII. Gleichgewicht und Druck tropfbarer Flüssigkeiten in Gefäßen.

---

1. Wieviel Kilogramme wiegt eine Wassermasse a) von 4,5 cdm, b) von 4,5 cbm, c) von 4,5 ccm?

2. Ein prismatisches Gefäß von 3 qdm Bodenfläche ist bis zu einer Höhe von 8 dm mit Wasser gefüllt; wie groß ist der Druck auf den Boden?
3. Der Boden eines Gefäßes ist ein Rechteck, dessen längere Seite = 0,6 m, dessen kürzere = 0,4 m ist. Das Gefäß ist bis zu einer Höhe von 0,5 m mit Wasser gefüllt; welchen Druck erleidet die Bodenfläche?
4. Wie groß ist der Bodendruck eines cylindrischen Gefäßes, dessen Bodenfläche einen Durchmesser von 5 dm hat, und das bis zu einer Höhe von 2 m mit Wasser gefüllt ist?
5. Die innere Bodenfläche einer Flasche hat 1,2 qdm, ihre Höhe ist 2,5 dm; wie groß ist der Bodendruck, wenn sie mit Wasser, und wie groß, wenn sie mit englischer Schwefelsäure gefüllt ist?
6. Ein Gefäß von der Form eines abgestumpften Kegels hat eine Bodenfläche von 132 qcm, der Durchschnitt der oberen Öffnung hat 88 qcm und seine Höhe beträgt 40 cm. Wenn dieses Gefäß mit Wasser gefüllt ist, wie groß ist der Bodendruck, und um wieviel ist dieser größer als das Gewicht des Wassers?
7. Wie groß ist aber der Bodendruck, wenn dieses Gefäß mit Quecksilber gefüllt ist?
8. Wie groß ist der Druck auf eine vertikale rechtwinkelige Seitenwand von 0,6 m Länge, wenn die Höhe des Wasserstandes an derselben = 0,8 m ist?
9. Die Bodenfläche eines rechtwinkelig-prismatischen Gefäßes hat 0,5 m Länge und 0,3 m Breite; das Gefäß ist bis zu einer Höhe von 0,8 m mit Wasser gefüllt; wie groß ist der Bodendruck, sowie der Druck auf die Seitenwände?
10. Wie groß wird aber der Boden- und Seitendruck des Wassers in diesem Gefäße beim freien Fall desselben sein?
11. In einem Gefäße steht Wasser 1,6 m über der Mitte einer Öffnung von 1 qcm. Welchen Druck erleidet dadurch der Pfropfen, welcher diese Öffnung verschließt?
12. Die eine Seitenwand eines 3 m hohen Gefäßes ist nach außen geneigt und hat die Form eines Rechtecks von 5 m Grundlinie und 4 m Höhe. Welchen Druck erleidet sie, wenn das Gefäß mit Wasser gefüllt ist?
13. Ein Gefäß hat die Form einer umgekehrten, abgestumpften Pyramide von quadratischer Grundfläche. Die Seite der unteren Grundfläche ist = 2 dm, die der oberen = 4 dm, die Höhe jeder Seitenfläche = 5 dm. Das Gefäß ist mit Wasser gefüllt, und es soll der Boden- und Seitendruck berechnet werden.
14. Wie groß ist der Druck, den eine Halbkugel von 4 dm Durchmesser erleidet, wenn sie mit Wasser gefüllt wird? Um wieviel ist er größer, als das Gewicht des Wassers?
15. Bei einem Segnerschen Wasserrad (Reaktionsrad) hat die drückende Wassersäule eine Höhe von 4 m und jede der beiden Seitenröhren (Schwungröhren) hat eine Ausflußöffnung von 1,5 qdm. Wie groß ist die Reaktionskraft des Wassers, welche die Umdrehung bewirkt?
16. Bei einer kommunizierenden Röhre hat der eine Schenkel eine horizontale Durchschnittsfläche von 25 qcm, der andere von 1 qcm, der erstere ist 2 dm,

…barer Flüssigkeiten in Gefäßen.

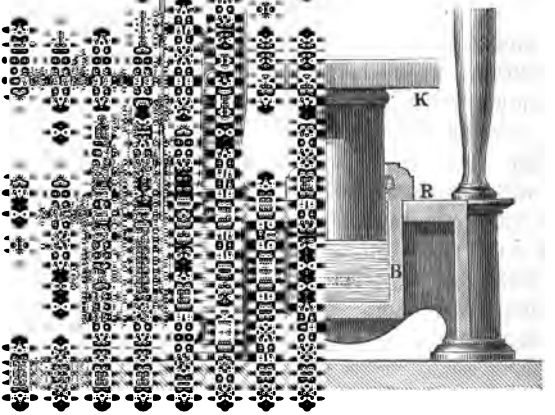
…kel ist mit einer genau schließenden …legte Gewicht Q sein, damit kein …ganz mit Wasser gefüllt sind?

…schen Hebers hat einen Durch… …t 2 m länger; welchen Druck P er… …kel, wenn der Apparat mit Wasser …

… Höhe, dessen innere Bodenfläche … einem andern prismatischen Gefäß …e 8 dm lang und 5 dm breit ist. … gefüllt und dann am Boden eine … wird, wie hoch wird nach Herstellung …stehen? (Die Wanddicke des inneren …

… kommunizierenden Röhre sind bis … gefüllt. Man will das Quecksilber …n, hat aber kein Quecksilber mehr; …

…nahschen) Presse (Fig. 37) sei der … des Druckcylinders $D = 9$ cm, der …



… 36 cm, der Hebelarm des Pumpen… …aft $P = 11$ kg am Hebelarm der … Druckcylinder erzeugte Druck Q?

…hen Presse, deren Druckkolben einen …esser d der Pumpe sein, wenn mit… …ewöhnlicher Arbeiter mit Leichtigkeit …uck von 2000 kg durch den Kolben

des Druckcylinders hervorgebracht werden soll und das Verhältnis der Hebelarme an der Pumpe = 1 : 4 ist?

22. Wie erklärt es sich, daß beim Anschwellen eines Flusses das Grundwasser gewöhnlich erst dann in die Keller der anliegenden Orte dringt, wenn der Wasserspiegel des Flusses wieder im Sinken ist?

23. Von zwei gläsernen Haarröhrchen hat das eine einen Durchmesser von d_1 = 1,3 mm, das andere von d_2 = 1 mm. Taucht man sie in Wasser und beobachtet in dem ersten eine Erhebung der Flüssigkeit um h_1 = 24 mm, wie groß wird die Höhe h_2 der Flüssigkeit im andern Röhrchen sein?

XIV. Gleichgewicht zwischen tropfbar flüssigen und starren Körpern.

---

1. Wieviel wiegen 6 ccm Gußeisen, dessen spezifisches Gewicht = 7,21 ist?
2. Welchen Raum nehmen 2,4 kg Messing ein, wenn das spezifische Gewicht desselben = 8 ist?
3. Welchen Rauminhalt haben 1,125 kg Gold vom spezifischen Gewicht = 19,36?
4. Eine Bleimasse wiegt in der Luft 8 kg; wieviel wiegt sie, wenn man sie während des Wägens in Wasser senkt?
5. Ein Mann kann einen Stein von 0,031 cbm Inhalt und 2,5 spezifischem Gewicht im Wasser gerade heben, aber kein Stück desselben über die Oberfläche des Wassers hinausbringen; wieviel wird dieser Mann außerhalb des Wassers heben können?
6. Man hat ein Gefäß mit Wasser auf einer Wage ins Gleichgewicht gebracht und einen festen, unlöslichen Körper an einem Faden ohne Verbindung mit der Wage so aufgehängt, daß er ganz in das Wasser des Gefäßes eintaucht, ohne indessen den Boden desselben zu berühren. Dadurch sinkt die Wagschale mit dem Gefäße, und um das Gleichgewicht wieder herzustellen, muß man auf die andere Wagschale ein bestimmtes Gewicht legen. Wenn nun dieses Gewicht 3 g beträgt, wie groß ergiebt sich daraus das Volumen des eingetauchten Körpers?
7. Ein schwimmender Körper hat ein Volumen von 36 cdm und ist mit $^1/_3$ seines Volumens in Wasser getaucht; wie schwer ist der Körper?
8. Ein homogener, prismatischer Körper von 6 dm Länge, 4 dm Breite und 3 dm Höhe und von 30 kg Gewicht ist mit seiner breiten Seitenfläche auf Wasser gelegt; wie tief sinkt er ein?

9. Desgleichen ein ähnlicher von 2 dm Länge, 1,5 dm Breite, 1,2 dm Höhe und 2 kg Gewicht?

10. Forster hat im nördlichen Eismeere schwimmende Eismassen von 2000 Fuß Länge, 400 Fuß Breite und 200 Fuß Höhe über der Oberfläche des Wassers gesehen; wie groß mußte das Volumen derselben unter dem Wasser sein, wenn man annimmt, daß sich die Gewichte gleicher Volume von Eis und Meerwasser wie 9 : 10 verhalten?

11. Mit welcher Kraft wird ein Stück Tannenholz von 30 cdm im Wasser aufwärts getrieben? (Das spezifische Gewicht des Tannenholzes zu 0,6 gerechnet.)

12. Um ein versunkenes Schiff vom Meeresgrunde heraufzuheben, hat man 20 leere und wasserdicht gemachte Fässer, jedes von 1,2 cbm Inhalt und 150 kg Gewicht an demselben befestigt und es dadurch gerade zum Aufsteigen gebracht. Wie groß ergiebt sich daraus das Gewicht des Schiffes im Wasser?

13. a) Wenn V das Volumen und s die Dichte (das spezifische Gewicht) eines Körpers, sowie γ das Gewicht der Volumeneinheit Wasser bezeichnet, wie groß ist das (absolute) Gewicht G dieses Körpers?

b) Wenn G das absolute und s das spezifische Gewicht eines Körpers ist, wie groß findet sich daraus das Gewicht des Wassers, welches den nämlichen Rauminhalt hat wie jener Körper?

14. a) In welchem Verhältnis $x : y$ muß man Blei und Korkholz dem Gewichte nach miteinander verbinden, damit diese Verbindung im Wasser schwimme, ohne daß ein Teil derselben über die Oberfläche hinausragt, das spezifische Gewicht des Bleies $= 11{,}35$, das des Korkholzes $= 0{,}24$ gesetzt?

b) Wieviel Kilogramme Blei müssen mit einem Kilogramm Korkholz verbunden werden, damit diese Verbindung dasselbe wiege, wie ein gleiches Volumen Wasser, also im Wasser schwimme?

15. Es soll das Gewicht eines korkenen Schwimmpanzers berechnet werden, der einen Menschen von 65 kg Gewicht im Wasser trägt, das spezifische Gewicht des Menschen zu 1,1 und das des Korkholzes zu 0,24 gerechnet.

16. Es soll aus einem Messingblech von einer Dicke $d = 1{,}25$ mm und vom spezifischen Gewicht $s = 8$ eine hohle Kugel verfertigt werden, welche bis zur Hälfte im Wasser einsinkt; wie groß müssen die äußeren und inneren Halbmesser R und r sein?

17. Wie tief wird eine Holzkugel von $r = 5$ dm Halbmesser und dem spezifischen Gewicht $s = 0{,}4$ in Wasser einsinken?

18. 1 kg Zinn verliert im Wasser 137,15 g, 1 kg Blei 88,09 g, 7 kg einer Mischung aus diesen beiden Metallen verlieren 812,87 g; wieviel Zinn und wieviel Blei ist in derselben enthalten?

19. Die Krone des Königs von Syrakus wog 20 Pfd. und verlor im Wasser $1\frac{1}{4}$ Pfd. Wie groß mußte Archimedes, der vermutete, daß das Gold der Krone mit Silber gemischt sei, die Gewichte der beiden Metalle finden, wenn er das spezifische Gewicht des Goldes $= 19{,}26$, das des Silbers $= 10{,}47$ kannte?

20. Das absolute Gewicht eines Körpers sei $= Q$, sein spezifisches Gewicht $= s_1$, und zwar größer als das des Wassers. Es soll eine solche Gewichtsmenge x eines zweiten Körpers, dessen spezifisches Gewicht $= s_2$ und kleiner als das des Wassers ist, gefunden werden, daß beide Körper miteinander verbunden gerade so im Wasser schwimmen, wie ein homogener Körper vom spezifischen Gewicht $= s$.

21. Es soll das Gewicht der Luft berechnet werden, die ein Mensch von Q Kilogr. Gewicht sich anhängen muß, um wie Tannenholz zu schwimmen? (Das spezifische Gewicht des Menschen $= 1{,}1$, das der Luft $= 0{,}0013$ und das des Tannenholzes $= 0{,}6$ gerechnet.)

XV. Bestimmung des spezifischen Gewichts starrer und flüssiger Körper.

1. Ein Stück Platin hat ein absolutes Gewicht von $G = 1{,}7$ kg und nimmt einen Raum von $V = 0{,}08$ cdm ein; wie groß ist das spezifische Gewicht s des Platins?

2. Man hat das absolute Gewicht eines Stückes Quarz $= 106$ g, sein Volumen $= 40$ ccm gefunden; wie groß ist das spezifische Gewicht des Quarzes?

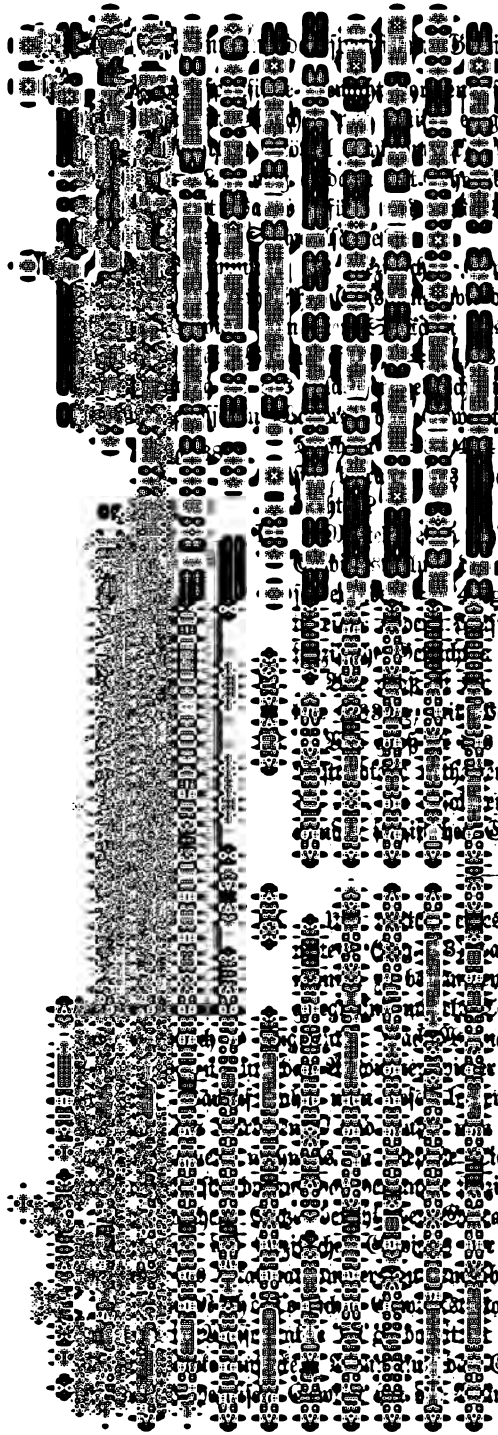
3. 4 Pfd. $25\frac{1}{2}$ Lot Quecksilber nehmen einen Raum von 10 Kubikzoll ein; wie groß ist sein spezifisches Gewicht?

4. Wie kann man mittels einer gewöhnlichen zweiarmigen Wage das spezifische Gewicht eines starren unlöslichen Körpers finden?

5. Mittels der hydrostatischen Wage hat man das absolute Gewicht eines Körpers $= P = 161{,}875$ g, sein Gewicht im Wasser $= P_1 = 99{,}375$ g gefunden; wie groß ist das spezifische Gewicht s dieses Körpers?

6. Um das spezifische Gewicht eines Körpers zu bestimmen, der im Wasser nicht untersinkt, z. B. des Korkholzes, verbindet man ihn mit einem andern Körper von großem spezifischem Gewicht, z. B. Blei. Es ist nun das Absolutgewicht des Korkholzes in der Luft $= P$, das Gewicht des Bleies im Wasser $= p_1$ und das Gewicht der beiden miteinander verbundenen Körper im Wasser $= \varphi$ gefunden; wie groß berechnet sich daraus das gesuchte spezifische Gewicht?

7. Ein mit Firnis überzogenes Stück Korkholz wiegt in der Luft 30 g, eine bleierne Kugel im Wasser 110 g, und wenn beide Körper miteinander verbunden werden, wiegen sie im Wasser nur 15 g. Wie groß ist das spezifische Gewicht des Korkholzes?



[illegible] ichts starrer und flüssiger Körper.

[illegible] scher Schwefelsäure zu bestimmen, [illegible] geschliffenem und seiner Länge nach [illegible] bestimmte das Gewicht des leeren [illegible] elsäure gefüllt und fand 38 g, wog [illegible] 2 g. Wie groß ist das spezifische [illegible]

[illegible] wichts einer Sorte Argentandraht [illegible] das eben beschriebene, hat man das [illegible] s Drahtes = 1,613 g, das des [illegible] 1 g gefunden, hat sodann die vier [illegible] und, nach sorgfältigem Abtrocknen [illegible] des Gläschens mit Wasser und [illegible] g gefunden. Wie groß berechnet [illegible] ezifische Gewicht jenes Argentan-

[illegible] drostatischen Wage fand man den [illegible] ein gewisser fester Körper im Was- [illegible] g, dagegen seinen Gewichtsverlust [illegible] ssigkeit = 60 g; wie groß ist das [illegible] dieser Flüssigkeit?

[illegible] Rauminhalt I eines Gefäßes, das [illegible] Wasser gefüllt 6,57 kg wiegt?

[illegible] spezifische Gewicht s eines mehrere [illegible] nden Gemenges, wenn G_1, G_2, [illegible] en und s_1, s_2, s_3 ... die entspre- [illegible] Gewichte der Bestandteile sind?

[illegible] s Nicholsonschen Gewichtsaräo- [illegible] as spezifische Gewicht eines Dia- [illegible] n, hat man diesen auf den Teller A [illegible] Tariergewichten das Instrument bis [illegible] nahme des Diamanten mußte man [illegible] r bis zur Marke zum Einsinken zu [illegible] re Gewicht wieder weg, legte den [illegible] 0,51 g auf den Teller legen, um [illegible] iefe wie vorher zu bringen. Wie [illegible] zifische Gewicht s?

[illegible] auch des Gewichtsaräometers zur [illegible] r Flüssigkeiten? Und worauf der [illegible] ben Zweck?

[illegible] ometer muß man 16 kg auflegen, [illegible] t in einer gewissen Sorte Weingeist [illegible] Gewicht des Instruments = 56 g [illegible] ngeist?

16. Ein Gay-Lussacsches Volumeter (das rationellste Skalenaräometer) besteht in seiner einfachsten Form aus einer gleichweiten, an beiden Enden zugeblasenen Glasröhre, die unten so beschwert ist, daß sie aufrecht schwimmt, und die von unten bis oben in gleiche durch Striche bezeichnete Volumteile so eingeteilt ist, daß sie im Wasser gerade bis zum 100sten Teilstrich, von unten gezählt, einsinkt (in dichteren Flüssigkeiten also bis zu einem Teilstrich unter 100, in weniger dichten bis zu einem über 100). Wenn nun dies Volumeter in vier verschiedenen Flüssigkeiten bis zu den mit 56, 80, 125, 140 bezeichneten Teilstrichen einsinkt, wie groß bestimmen sich hieraus die spezifischen Gewichte derselben?

17. Gewöhnlich wird, um die unbequeme Länge zu vermeiden, die das eben beschriebene, für die verschiedensten Flüssigkeiten brauchbare Volumeter hat, ein besonderes für Flüssigkeiten, die leichter sind als Wasser, und ein besonderes für schwerere angefertigt und gebraucht. Es soll angegeben werden, auf welche Weise man die Skalen dieser Volumeter wird anfertigen können?

(Bestimmung des spezifischen Gewichtes der Gase siehe XX.)

XVI. Bewegung des Wassers.

Ausfluß des Wassers aus Öffnungen und kurzen Röhren.

1. Wenn aus einer Mündung von 3 qcm fortwährend Wasser mit 2 m Geschwindigkeit (in der Sekunde) ausfließt, wieviel beträgt die in einer Stunde erhaltene Wassermenge?

2. Mit welcher Geschwindigkeit v (in der Sekunde) fließt Wasser aus einer Öffnung von 3 qcm, wenn man in der Stunde 720 cdm erhält?

3. Wie groß ist die theoretische Ausflußgeschwindigkeit v des Wassers aus einer Öffnung, über welcher das Wasser $h = 9$ m hoch steht? Wenn man aber Quecksilber statt Wasser hätte, wie groß würde dann v sein?

4. Wie hoch wird ein vertikal in die Höhe springender Wasserstrahl bei der Druckhöhe $= h$ steigen?

5. Welche Sprunghöhe x und welche Sprungweite y wird aber dieser Strahl erreichen, wenn seine anfängliche Richtung um 45° gegen den Horizont geneigt ist?

6. Aus einer Öffnung im Boden eines sehr hoch stehenden Gefäßes fließe ein dicker Wasserstrahl aus; weshalb muß derselbe immer dünner werden und sich zuletzt in Tropfen auflösen?

7. In einem Cylinder steht das Wasser 0,6 m hoch über der Ausflußmündung, und auf das Wasser drückt ein Kolben mit einer Kraft von

0,5 kg auf den Quadratzentimeter; wie groß iſt die Geſchwindigkeit des ausfließenden Waſſers?

8. In der Seitenwand eines bis zu 80 cm Höhe mit Waſſer gefüllten Gefäßes iſt 30 cm über dem Boden eine Öffnung angebracht; wie groß iſt die Sprungweite des Waſſerſtrahles, die verlängerte Bodenfläche des Gefäßes als Auffallfläche angenommen? — Wie groß iſt die Sprungweite, wenn die Höhe der Öffnung über dem Boden 50 cm beträgt?

9. Wie groß iſt die theoretiſche und wie groß die wirkliche Waſſermenge, welche man aus einer im dünnen Boden eines Gefäßes angebrachten Öffnung von $a = 3$ qcm bei einer konſtanten Druckhöhe von $h = 4$ m während einer Minute (t) erhält?

10. In der dünnen Seitenwand eines Gefäßes befindet ſich eine Öffnung von $a = 5$ qcm; wieviel Waſſer wird bei einer konſtanten Druckhöhe von $h = 40$ cm in einer Stunde (t) ausfließen?

11. In welcher Zeit wird aus der kurzen, cylindriſchen Anſatzröhre eines Gefäßes eine Waſſermenge von $V = 1{,}9$ cbm ausfließen, wenn das Waſſer durch Zufluß ſtets 1,21 m über der Mitte der Anſatzröhre erhalten wird, und der Querſchnitt dieſer letzteren $a = 4$ qcm beträgt?

12. Die Schützenöffnung eines Mühlengerinnes iſt 15 cm hoch und 45 cm breit und der Waſſerſpiegel ſteht 2 m über der Sohle des Gerinnes; wieviel Waſſer fließt in der Sekunde aus?

---

13. Aus einem cylindriſchen oder prismatiſchen Gefäß, das einen Querſchnitt $A = 0{,}06$ qm hat und in welchem das Waſſer $h = 1{,}3$ m hoch ſteht, fließt durch eine Öffnung von $a = 10$ qcm, die ſich in dem dünnen Boden befindet, ſämtliches Waſſer aus; in welcher Zeit t wird dies ſtattfinden?

14. In welcher Zeit t_1 wird ſich aber der Waſſerſpiegel bis zur Höhe $h_1 = 100$ cm geſenkt haben?

15. Die Griechen und Römer bedienten ſich zur Beſtimmung der Zeit der Waſſeruhren. Man will eine ſolche machen und dazu einen Glascylinder von 1 Fuß Länge und 5 Zoll Weite benutzen. Wenn ſich nun der volle Cylinder durch eine kreisförmige Öffnung in dem dünnen Boden binnen einer Stunde entleeren und durch das allmähliche Sinken des Waſſerſpiegels die Zeitintervalle von 10 bis 10 Minuten auf einer vertikalen Skala markiert werden ſollen, ſo fragt ſich: a) wie groß muß die Ausflußöffnung ſein? b) wie muß die vertikale Skala eingeteilt werden? (Nach Burg.)

16. Welche Form müßte aber das Gefäß einer Waſſeruhr haben, wenn der Waſſerſpiegel gleichförmig ſinken, die in gleiche Teile geteilte Skala alſo gleiche Zeiträume angeben ſollte?

Ausfluß des Waſſers aus langen Röhren.

17. Iſt h die Druckhöhe des aus einer langen Röhre ausfließenden Waſſers und bezeichnet h_1 den Teil dieſer Druckhöhe, der zur Überwindung des

Reibungswiderſtandes der Röhre, die wir hier als gerade und überall gleichweit vorausſetzen, erforderlich iſt, ſowie v die Geſchwindigkeit des ausfließenden Waſſers, ſo iſt $h - h_1 = \frac{v^2}{2g}$ oder $h = \frac{v^2}{2g} + h_1$. Nun iſt der Theorie und Erfahrung gemäß der Reibungswiderſtand der Länge l der Röhre und dem Quadrat der Geſchwindigkeit v des ausfließenden Waſſers direkt, dem Durchmeſſer d der Röhre aber umgekehrt proportional, ſo daß man, wenn e einen durch die Erfahrung zu beſtimmenden Faktor bezeichnet, $h_1 = \frac{e}{2g} \cdot \frac{l}{d} v^2$*) ſetzen kann. Durch Subſtitution dieſes Ausdrucks in die obige Gleichung erhält man $h = \frac{v^2}{2g} + \frac{e}{2g} \cdot \frac{l}{d} v^2$ und daraus

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + e\frac{l}{d}}} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(I.)}$$

Für Metermaße iſt nach Weisbachs Beobachtungen

$$e = 0{,}01439 + \frac{0{,}009471}{\sqrt{v}} \quad \ldots\ldots \text{(II.)}$$

alſo iſt e noch von der Geſchwindigkeit v abhängig, weshalb man zuerſt einen nur genäherten Wert von v, nämlich $v_1 = \sqrt{2gh}$ in (II.) ſubſtituiert, den gefundenen genäherten Wert von e in (I.) einſetzt, alsdann den jetzt noch mehr genäherten Wert v_2 abermals in (II.), ſowie den hieraus ſich ergebenden Wert von e in (I.) ſubſtituiert, wodurch man einen hinlänglich genäherten Wert von v erhält. Es ſoll auf dieſe Weiſe berechnet werden, mit welcher Geſchwindigkeit v und in welcher Menge Waſſer in einer Sekunde aus einer Röhre von $l = 20$ m Länge und $d = 0{,}1$ m Durchmeſſer bei der Druckhöhe $h = 4$ m ausfließt?

Stoß des Waſſers gegen feſte Körper nebſt Anwendungen.

18. Bezeichnet Q das Gewicht eines Körpers, h die Höhe, von welcher er fällt, v die Endgeſchwindigkeit, welche er erlangt, und g die Beſchleunigung der Schwerkraft, ſo beſteht nach den Lehren der Phyſik

erſtens das Geſetz $Qh = \frac{1}{2} \frac{Q}{g} v^2$, d. h. die Arbeit der auf den Körper wirkenden Schwerkraft iſt gleich der lebendigen Kraft, welche der Körper am Ende ſeines Falles erlangt (II, 16);

*) Der Diviſor $2g$ iſt hier hinzugefügt, um den Ausdruck für h_1 dem erſten Teil des Ausdrucks für h gleichartig und dadurch für die Rechnung bequemer zu machen; dafür iſt e aber $2g$mal ſo groß angenommen, als die Beobachtung den Erfahrungsfaktor ergiebt.

zweitens ist die Bewegung des fallenden Körpers eine gleichmäßig beschleunigte;

drittens ist es bezüglich der Endgeschwindigkeit v einerlei, ob der Körper lotrecht oder auf beliebig geneigter Ebene herabfällt (VI, 6).

Unter welcher Voraussetzung aber gelten diese Gesetze, und wie läßt sich insbesondere das Verhalten des fließenden Wassers mit ihnen in Übereinstimmung bringen, das doch in Flüssen und Kanälen nicht mit beschleunigter, sondern nur mit gleichmäßiger Geschwindigkeit fließt und darum niemals die seiner Fallhöhe entsprechende Geschwindigkeit erlangt?

19. Bei der Einwirkung des fließenden Wassers auf einen seinen Lauf hemmenden Körper spricht man zwar von einer Stoßkraft des Wassers, versteht aber darunter in der Regel einen Druck (den hydraulischen Druck) und stellt bei der technischen Verwendung der Wasserkraft, z. B. bei Mühlrädern, als Regel auf, daß ein eigentlicher Stoß des Wassers gegen die Schaufeln ꝛc. zu vermeiden und nur der Druck desselben zu verwenden sei. Warum?

20. Wie groß ist der Stoß P des mit der Geschwindigkeit $c = 3$ m gegen eine unbewegliche ebene Fläche von $f = 0{,}2$ qm senkrecht fließenden Wassers, vorausgesetzt, daß sämtliche Wasserteile die Fläche treffen?

21. In welcher Beziehung steht der hydraulische Druck oder Stoß eines fließenden Wassers zu dem hydrostatischen, der einer Druckhöhe entspricht, welche der Geschwindigkeitshöhe des fließenden Wassers gleich ist?

22. Wie modifiziert sich der in Aufgabe 20 gesuchte Ausdruck für den normalen Stoß des Wassers, wenn die Fläche, welche den Stoß erleidet, sich selbst mit einer Geschwindigkeit von $v = 2$ m in der Richtung des Wasserlaufs fortbewegt?

23. Ein unterschlächtiges Mühlrad (Schaufelrad) wird durch Wasser bewegt, das in einem geraden, eng geschlossenen Gerinne mit der Geschwindigkeit $c = 4$ m senkrecht auf die Schaufeln stößt und diesen die Geschwindigkeit $\frac{1}{2}\,c = 2$ m erteilt, wenn die Schaufeln mit einer Fläche $f = 0{,}24$ qm in das Wasser eintauchen. Wieviel Wasser V fließt in der Sekunde durch das Gerinne? Wie groß ist die Stoßkraft P und wie groß die Arbeits- oder Leistungsfähigkeit L desselben in der Sekunde?

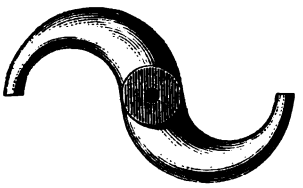
24. In einem Flusse, in welchem man die Geschwindigkeit des Wassers $= 1{,}5$ m gefunden hat, hängt ein Schiffmühlenrad, dessen Schaufeln 2,5 m breit sind und 1 m tief ins Wasser tauchen. Wenn nun durch den Gegendruck der Schaufeln die Geschwindigkeit des Wassers von 1,5 m auf 0,75 m vermindert wird, so daß jede Schaufel gleichfalls mit einer Geschwindigkeit von 0,75 m sich bewegt, wie groß berechnet sich dann die auf das Rad wirkende Kraft P, sowie die Leistung L oder die Arbeit des Rades in der Sekunde?

25. Während ein unterschlächtiges Schaufelrad nur durch den hydraulischen Stoß oder Druck des Wassers bewegt wird, wirkt das Wasser bei einem oberschlächtigen Zellenrad wesentlich nur durch sein Gewicht in den Radzellen. Denken wir uns, um das Folgende zu verstehen, vom Mittelpunkte des Rades die zwei Kreisbogen gezogen, zwischen welchen die Wasser enthal-

tenden Zellen liegen, sowie ferner mit dem mittleren Halbmesser derselben den zwischen ihnen liegenden Kreisbogen konstruiert. Für die Berechnung der Leistungsfähigkeit des Rades handelt es sich nun zunächst darum, das Gewicht zu bestimmen, welches an dem horizontalen mittleren Halbmesser gerade so wirkt, wie das Wasser enthaltende Ringstück des Rades. Wie groß wird dieses Gewicht Q sein, wenn während jeder Sekunde das Wasservolumen V (das Aufschlagwasser) mit der Geschwindigkeit c in die Zellen fällt und wir dabei annehmen, daß das Rad oder genauer jeder Punkt des beschriebenen mittleren Kreisbogens die nämliche Geschwindigkeit c erhalten hat, sowie die Höhe des Wasser enthaltenden Ringstücks oder genauer die Sehne des mittleren Kreisbogens $= h$*) ist? Und wie groß ist also die Leistungsfähigkeit des Rades?

26. Unter den horizontalen Reaktionsrädern (Turbinen) ist nächst dem Segnerschen Wasserrad eins der einfachsten die sogenannte schottische Turbine (Fig. 39), in welche das Wasser aus einem hochliegenden Behälter mittels eines gebogenen Rohrs von unten her einströmt, gegen die gekrümmten Wände des Rades drückt und dasselbe in einer dem Wasserausfluß entgegengesetzten Richtung dreht. In der Mitte des Rades nämlich, und zwar unterhalb desselben, befindet sich eine Öffnung mit konischer Fassung, diese sitzt auf dem konischen Ende des Wasserzuleitungsrohrs wasserdicht auf und um dieses konische Röhrenende dreht sich das Rad. Gesetzt nun, die Druckhöhe des Wassers über den Ausflußmündungen sei h, die Ausflußmündungen hätten zusammen den Flächeninhalt a und erlangten die (lineare) Geschwindigkeit c; wie groß ergiebt sich die Leistungsfähigkeit dieser Turbine?

Fig. 39.



XVII. Gleichgewicht und Druck der Luft.

Druck der Atmosphäre. — Mariottesches Gesetz. — Barometer. — Manometer.

1. Wie groß ist der Druck der Luft a) auf ein Quadratzentimeter bei einem Barometerstande von 0,76 m (= 28,07541 Par. Zoll = 29,95814 preuß.

*) h ist natürlich kleiner als der Durchmesser des Rades, da das Aufschlagwasser nicht in die oberste Zelle, sondern erst in die zweite oder dritte eintritt und auch früher, als der unterste Punkt des Rades erreicht ist, wieder aus den Zellen tritt. Gewöhnlich ist $h = \frac{4}{5}$ des Raddurchmessers.

Zoll)? b) auf einen Quadratzoll bei einem Barometerstande von 28 Par. Zoll (= 29,98 preuß. Zoll)?

2. Wie groß ist also bei einem Barometerstand von 0,76 m der Luftdruck a) auf einen rechteckigen Tisch von 0,8 m Länge und 0,6 m Breite, b) auf die Fläche eines Kreises von 3 dm Durchmesser, c) auf die Oberfläche einer Kugel von 6 m Durchmesser? (Luftdruck auf 1 qcm = 1,033 kg.)

3. Welchen Druck erleidet bei einem Barometerstand von 28 Par. Zoll, bezw. 760 mm, dem mittleren am Niveau des Meeres, die Oberfläche eines erwachsenen Menschen, wenn man diese zu 14 preuß. Quadratfuß, bezw. 1,4 qm annimmt? Und welchen bei einem Barometerstand von 27 Par. Zoll, bezw. 755 mm? (Luftdruck auf 1 Quadratzoll preuß. = 14,07 Pfd.)

4. Welche Höhe h muß eine Wassersäule haben, um dem mittleren Druck der Atmosphäre am Meeresspiegel das Gleichgewicht zu halten?

5. Welche Höhe aber eine Weingeistsäule, und welche eine Säule von Schwefelsäure?

6. Ein Trinkglas mit abgeschliffenem Rand, das mit Wasser gefüllt und mit einer Platte (von Glas, starkem Papier ꝛc.) so bedeckt ist, daß zwischen Wasser und Platte keine Luft zurückgeblieben ist, kann umgedreht werden, ohne daß das Wasser ausfließt. Wenn nun das Glas eine Höhe von 13 cm und seine Öffnung (es mag eine beliebige Form haben) einen Flächeninhalt von 50 qcm hat, mit welcher Kraft wird die Platte angedrückt?

7. Wie groß ist, in Atmosphären ausgedrückt, der Druck auf den Kolben einer Wassersäulenmaschine, über welchem das Wasser 45 m hoch steht?

8. Wieviel Atmosphärendrucken ist ein Fisch in einer Tiefe von 100 m unter der Meeresfläche ausgesetzt?

---

9. Die Dichtigkeit der Luft an der Oberfläche der Erde ist bei 0° Temperatur und 776 mm Barometerstand $\frac{1}{773}$ der Dichtigkeit des Wassers. Wenn sie nun in allen Höhen dieselbe wäre, wie hoch würde die Atmosphäre reichen? Und warum muß die so berechnete Höhe der Atmosphäre zu klein ausfallen?

10. Es soll die Höhe berechnet werden, welche die Atmosphäre haben würde, wenn sie sich bis zu derjenigen Entfernung von der Erdoberfläche erstrecken könnte, in welcher die Schwerkraft der durch die Umdrehung der Erde bedingten Zentripetalkraft gleich ist, in welcher also die Luftteilchen gewichtslos erscheinen würden?

11. Wie groß ist die Höhe einer Luftsäule an der Oberfläche der Erde, welche bei 0° Temperatur und einem Barometerstand von 760 mm denselben Druck ausübt, wie eine Quecksilbersäule von 1 mm Höhe?

12. Dem Vorhergehenden gemäß muß man vom Meeresspiegel aus 10,5 m in die Höhe steigen, damit die Barometerhöhe von 760 mm um 1 mm falle. Wenn nun die Luft in allen Höhen gleiche Temperatur hätte, wie hoch müßte man steigen, damit sie um 2, 3, 4 ꝛc. mm falle?

13. Wenn man bei einem Barometerstand von 76 cm die Luft in dem kürzeren, 24 cm langen Schenkel einer Mariotteschen Röhre bis zur Hälfte ihres anfänglichen Volumens zusammendrücken will, bis zu welcher Höhe muß man Quecksilber in den längeren Schenkel gießen?

14. Wenn in einer Mariotteschen Röhre bei einem Barometerstand von 76 cm das Quecksilber im längeren, offenen Schenkel 60 cm hoch steht, wie hoch wird es im 24 cm langen, verschlossenen Schenkel stehen? Und zu welchem Teil ihres ursprünglichen Volumens wird die darin enthaltene Luft zusammengedrückt sein?

15. Wenn man bei einem Barometerstand $B = 76$ cm eine $L = 98$ cm lange, gleich weite, unten verschlossene Glasröhre so hoch mit Quecksilber füllt, daß nur noch eine Röhrenlänge von $l = 30$ cm mit atmosphärischer Luft übrig bleibt, dann die Röhre mit dem Finger verschließt, umkehrt und das offene Ende knapp unter Quecksilber taucht, so setzt sich natürlich die Luft über das niederfallende Quecksilber, — es fragt sich aber, wie hoch (x) wird jetzt das Quecksilber in der Röhre stehen bleiben, und welchen Raum also die Luft ausfüllen?

16. Wenn aber die Glasröhre der vorigen Aufgabe nach der dort beschriebenen Behandlung mit dem offenen Ende so tief in das Quecksilber getaucht wird, daß das verschlossene Ende um $l_1 = 75$ cm über das äußere Quecksilberniveau hervorragt, welche Röhrenlänge (x) über diesem Niveau wird dann von Quecksilber und welche (y) von Luft eingenommen werden? Und welche Werte erhält man für x und y, a) wenn $l_1 = l$, b) wenn $l_1 = L$, c) wenn $l_1 = B$ ist?

17. Wenn man bei einem Barometerstand von $B = 760$ mm eine gleichweite, an beiden Enden offene Glasröhre so tief in ein Gefäß mit Quecksilber taucht, daß nur noch ein $l = 80$ mm langes Stück derselben aus dem Quecksilber hervorragt, hierauf die obere Öffnung verschließt und die Röhre in die Höhe zieht, so steigt das Quecksilber in der Röhre über das äußere Niveau; wie hoch (x) wird es über demselben stehen, wenn die in der Röhre abgesperrte Luft das $n = 3$fache ihres anfänglichen Volumens einnimmt? Und welche Länge l_1 hat jetzt der aus dem Quecksilber des Gefäßes hervorragende Teil der Glasröhre?

18. Eine Gasmenge nimmt bei einem Barometerstand $B = 72$ cm ein Volumen $V = 2$ Liter ein; wie groß ist sein Volumen V_1 bei einem Barometerstand $B_1 = 76$ cm.

19. In einer Glasglocke sind bei einem Barometerstand von 725 mm 1,9 Liter Sauerstoffgas über Quecksilber abgesperrt. Die Sperrflüssigkeit steht 5 mm über dem äußeren Niveau; wie groß ist das Volumen V dieses Glases bei einem Druck (nicht bloß Barometerstand) von 760 mm?

(Änderung des Volumens bei Änderung des Drucks und der Temperatur siehe XX.)

20. Es soll aus dem Mariotteschen Gesetz abgeleitet werden, daß (die Abnahme der Intensität der Schwerkraft unberücksichtigt gelassen) in einer gleichmäßig warmen Luftsäule die Barometerhöhen, also auch die durch sie gemessenen Expansivkräfte in geometrischer Progression abnehmen, während die Höhen in der Luft in arithmetischer Progression zunehmen.

21. Ein Barometer, welches am Meeresspiegel bei einer Temperatur von 0^0 760 mm hoch steht, fällt um 1 mm, wenn es ungefähr 10,5 m hoch über den Meeresspiegel gebracht wird (Aufgabe 11). Welche Barometerstände würden hiernach unter Voraussetzung gleicher Erwärmung, gleicher Feuchtigkeit der Luft und gleicher Intensität der Schwere in den Höhen von $2 . 10{,}5$, $3 . 10{,}5$, $4 . 10{,}5$, ... $n . 10{,}5$ m stattfinden?

22. Welches wird aber, unter derselben Voraussetzung wie in voriger Aufgabe, die Höhe H eines Ortes über dem Meeresspiegel sein, wo der Barometerstand 720 mm ist?

23. Wenn man die äußerste Grenze der Luft da annehmen wollte, wo ihre Spannkraft nur noch dem Druck einer Quecksilbersäule von $^1/_{100}$ Pariser Linie das Gleichgewicht hält, wie hoch würde sich dann, der vorigen Aufgabe gemäß, die Höhe H des Luftkreises ergeben?

24. Unter derselben Voraussetzung, wie in Aufgabe 22, den Höhenunterschied H zweier Orte zu finden, wenn der untere Barometerstand $= B$, der obere $= b$ ist?

25. Genauer, als durch die eben gefundene Formel, findet sich der Höhenunterschied H zweier Orte mittels der nachstehenden von Gauß aufgestellten:

$$H = C.(1 + 0{,}0026\ cos\ 2\varphi)\ [1 + {}^1/_{399}\ (T + t)]\ (log.B - log.b),$$

in welcher bezeichnet:

C einen konstanten Faktor $= 56\,588$ für Pariser Fuß, oder $= 18\,382$ für Meter.

B die Barometerhöhe an der unteren Station
b „ „ „ „ oberen „
} in beliebigem Maße, aber auf 0^0 R. reduziert*).

T die Temperatur der Luft und des Quecksilbers an der unteren Station
t die Temperatur der Luft und des Quecksilbers an der oberen Station
} in Graden nach R.

φ die geographische Breite

Wenn nun bei einer Höhenmessung in der geographischen Breite von 43^0 an der unteren Station die Barometerhöhe $= 27{,}17''$, die Temperatur der Luft und des Quecksilbers $= 15{,}3^0$ R., an der oberen Station die Barometerhöhe $= 19{,}845''$, die Temperatur der Luft und des Quecksilbers $= 3{,}2^0$ R. gefunden worden ist, wie groß ist der Höhenunterschied der beiden Stationen in Pariser Fuß?

26. Bei einer Höhenmessung in der geographischen Breite von 48^0 ergaben sich die Barometerstände 27,58 und 26,84 Pariser Zoll und die Temperaturen

*) Über Reduktion der Barometerstände siehe Aufgabe 23 in XX.

der Luft und des Queckſilbers beziehungsweiſe 19,5° R. und 18° R. Wie groß berechnet ſich der Höhenunterſchied H?

---

27. Wie erklärt es ſich, das häufig vor und bei Regen das Barometer fällt?
28. Worin liegt die gewöhnliche Urſache des Fallens und Steigens des Barometers?

---

29. In einem offenen Manometer, das an einem Gefäß mit verdichteter Luft (oder mit Dampf von hoher Spannung) angebracht iſt, ſteht das Queckſilber 570 mm hoch, während der Barometerſtand 730 mm beträgt; wie groß iſt die Expanſivkraft des Gaſes (oder Dampfes)?
30. Mit wieviel Atmoſphären iſt ein Gas in einem Behälter zuſammengedrückt, wenn in dem daran befindlichen offenen Manometer das Queckſilber 1,52 m hoch ſteht?
31. In einem Luftmanometer (Fig. 40) von $l = 677$ mm Länge, in welchem die Luft anfänglich die dem Barometerdruck $b = 760$ mm entſprechende Expanſivkraft hatte, iſt die Queckſilberſäule um $h = 352$ mm geſtiegen; welcher Queckſilberſäule H entſpricht die Expanſivkraft der auf das Manometer wirkenden verdichteten Luft (oder eines Dampfes von hoher Spannung), und wie groß iſt der Druck D derſelben auf ein Quadratcentimeter?

Fig. 40.

32. In einem Luftmanometer von $l = 677$ mm Länge ſteht bei einem Barometerſtand von $b = 760$ mm und einer Temperatur von $t = 10°$ C. das Queckſilber der Röhre mit dem des Gefäßes gleich hoch. Wenn es nun bei $t_1 = 21°$ C. eine Queckſilberhöhe von $h = 352$ mm zeigt, wie groß iſt die Expanſivkraft des Gaſes (oder Dampfes), womit das Manometer in Verbindung gebracht iſt?

Luftpumpe. — Waſſerpumpe.

33. Wenn der innere Rauminhalt des Stiefels einer Luftpumpe, den des Kolbens abgerechnet, $= a$, der Rauminhalt des Rezipienten nebſt dem des Kanals $= b$ und die Dichte der Luft $= d$ iſt, wie groß iſt dann die Dichte der Luft im Rezipienten nach 1, 2, 3, . . . n Kolbenzügen?
34. Der Stiefel einer Luftpumpe enthält, den Kolben abgerechnet, 0,7, der Rezipient nebſt dem Kanal 2,8 cdm, die Dichtigkeit der darin enthaltenen

atmosphärischen Luft sei = 1, wie groß ist die Dichtigkeit x dieser Luft nach acht Kolbenzügen?

35. Nach wie vielen Kolbenzügen wird bei einer Luftpumpe, deren Rezipient ein viermal so großes Volumen hat wie der Stiefel, die Luft bis zu $^1/_{10}$ ihrer anfänglichen Dichte verdünnt sein?

36. Wenn bei einem Barometerstand von 755 mm in dem abgekürzten Barometer unter dem Rezipienten einer Luftpumpe das Quecksilber des verschlossenen Schenkels bis auf 5 mm über dem im offenen gefallen ist, welche Luftverdünnung hat dann stattgefunden?

37. Das eine (untere) Ende einer beiderseits offenen Glasröhre ist in ein Gefäß mit Quecksilber getaucht, das andere (obere) luftdicht mit dem Rezipienten einer Luftpumpe in Verbindung gebracht. Wird alsdann Luft ausgepumpt, so steigt das Quecksilber in der Glasröhre in die Höhe; wenn nun so allmählich das Quecksilber 740 mm hoch über das Niveau des Quecksilbers im Gefäß gestiegen und der gleichzeitige Barometerstand 750 mm ist, wie verhält sich dann die Dichtigkeit der verdünnten Luft im Rezipienten zu der der äußeren?

38. Der innere Rauminhalt des Stiefels einer Luftpumpe ist = a; wie läßt sich der innere Rauminhalt x des Rezipienten und des Verbindungskanals finden?

39. Man kennt den inneren Rauminhalt = a des Stiefels einer Luftpumpe und den des Rezipienten = b und soll den inneren Rauminhalt x des Verbindungskanals finden.

40. Welche Kraft ist nötig, um den Kolben einer Luftpumpe von 16 qcm Grundfläche in die Höhe zu heben, wenn das Barometer im Rezipienten 4 cm, außerhalb 76 cm hoch steht?

41. Die erste von Clegg angelegte, sogenannte atmosphärische Eisenbahn zwischen Kingstown und Dalkey bei Dublin hat eine Röhre von 15 engl. Zoll Durchmesser. Auf der einen Seite des Kolbens dieser Röhre wird mittels einer großen, durch eine Dampfmaschine in Bewegung gesetzten Luftpumpe die Luft soweit verdünnt, daß der wirksame Druck auf den Kolben, nach Abzug des Gegendrucks der nicht ausgepumpten Luft, der Reibung ꝛc., noch $^3/_5$ des atmosphärischen Drucks beträgt. Welche Last kann dadurch in horizontaler Richtung fortbewegt werden, wenn man, wie gewöhnlich, annimmt, daß zur Fortbewegung einer Tonne (2240 engl. Pfd.) eine Kraft von 8 Pfd. nötig ist?

42. Der Erfinder der Luftpumpe, Otto von Guerike, Bürgermeister von Magdeburg, stellte im Jahre 1654 auf dem Reichstage zu Regensburg vor Kaiser und Reich Versuche mit der Luftpumpe an, wobei zum Erstaunen der Anwesenden die sogenannten Magdeburger Halbkugeln von 22 Zoll Durchmesser, nachdem sie möglichst luftleer gemacht waren, nur mit Hülfe von Pferden auseinander gerissen werden konnten. Mit welcher Kraft waren nämlich die beiden Halbkugeln durch die äußere Luft aneinander gedrückt?

43. Um sich zu überzeugen, ob die atmosphärische Luft schwer sei, nahm Aristoteles eine Blase, wog sie zuerst mit Luft gefüllt und dann im zu-

sammengedrückten Zustande, also möglichst luftleer. Da er bei beiden Wägungen dasselbe Gewicht fand, so schloß er daraus, die Luft sei nicht schwer. Welchen Umstand hatte er übersehen?

44. Eine Glaskugel, deren innerer Halbmesser $r = 14{,}1$ cm, wiegt mit atmosphärischer Luft gefüllt $q_1 = 349{,}321$ g, luftleer gemacht aber nur $q_2 = 333{,}975$ g; wieviel wiegt ein Liter atmosphärischer Luft*)?

45. Wenn V den Rauminhalt des Stiefels einer Luftpumpe, v den schädlichen Raum derselben bezeichnet, bis zu welcher Grenze kann die Luft mittels dieser Luftpumpe verdünnt werden, die Dichtigkeit der äußeren Luft $= d$ gesetzt?

---

46. Bei einer Kompressionspumpe ist der Rauminhalt des Stiefels $= A$, der des Rezipienten nebst dem des Kanals $= B$, die Dichtigkeit der atmosphärischen Luft $= d$; wie groß ist die Dichte d_1 der Luft nach n Kolbenstößen?

47. Der Rauminhalt des Rezipienten einer solchen Pumpe sei $= 360$ ccm, der des Stiefels $= 120$ ccm, wieviel Kolbenstöße sind erforderlich, um die Luft im Rezipienten auf das Zehnfache zu verdichten?

48. Eine Windbüchse, deren Kolben einen inneren Rauminhalt $= 400$ ccm hat, enthielt Luft, deren Expansivkraft achtmal so groß war, wie der mittlere atmosphärische Druck von 76 cm. Wenn nun bei einem Luftdruck von 755 cm ein Schuß gethan worden ist, und die dabei ausgetretene Luft ein Volumen $= 800$ ccm einnimmt, wie groß ist die Expansivkraft der noch in dem Kolben zurückgebliebenen Luft?

49. Bis zu welcher Höhe kann durch das Saugen des Kolbens in einer Pumpe das Wasser gehoben werden?

50. Eine Saug- und Hebepumpe hat einen Kolben, dessen Fläche $= a$; der Abstand ihrer Ausflußöffnung vom Wasserspiegel ist $= h$ und die Hubhöhe des Kolbens $= b$; wie groß ist die zum Auspumpen des Wassers nötige bewegende Kraft P, und wie groß die Arbeit L des Kolbens, abgesehen von Reibung und sonstigen Widerständen?

51. Wie groß ist aber die bewegende Kraft, sowie die Arbeit oder Leistung bei einer Saug- und Druckpumpe, welche dieselben Dimensionen hat, wie die vorhergehende Saug- und Hebepumpe?

52. Welches einfache Resultat folgt aus den beiden vorhergehenden Aufgaben für die Größe der Arbeit der Pumpen überhaupt?

53. Bei einer Saug- und Hebepumpe hat der Kolbendurchschnitt 60 qcm und die Ausflußöffnung eine Höhe von 3 m über dem Wasserspiegel; welche Kraft ist zum Auspumpen nötig?

54. Wie groß ist die zu dieser Pumpe nötige Arbeit, wenn der Kolben 15mal spielt und seine Hubhöhe 0,5 m ist?

55. Wieviel Wasser wird die vorige Pumpe in einer Minute geben, wenn der Kolben während dieser Zeit 15 mal spielt und wie groß ist der Effekt?

---

*) Genauere Bestimmung s. Aufgabe 66 und 69 in XX.

Wegen Undichtheit der Kolben soll nur 0,9 der berechneten Wassermenge als wirklich ausfließend angenommen werden.

Luftballon.

56. Das Volumen eines mit Gas gefüllten Ballons sei $= V$, das Gewicht der Kubikeinheit atmosphärischer Luft, worin er sich befindet, $= a$ und das der Kubikeinheit des Gases im Ballon $= \alpha$, sowie das Gewicht der Hülle nebst Zubehör $= Q$; wie groß ist die Steigkraft (der Auftrieb) P des Ballons?

57. Bei welchem Volumen V würde dieser Ballon in der Luft gerade schweben bleiben (aber keine Steigkraft haben)? Und gesetzt, das Volumen V habe der Ballon beim Barometerstand B gehabt, zu welchem Volumen V_1 würde er sich bei dem niedrigeren Barometerstand B_1 aufblähen?

58. Wie groß ist die Steigkraft eines bei 0° C. und einem Barometerstande von 0,76 m mit reinem Wasserstoff gefüllten Ballons von 600 cbm Inhalt, wenn dessen Gewicht nebst Zubehör 520 kg ist?

59. Wie groß muß der Durchmesser d eines kugelförmigen Luftballons sein, der, mit reinem Wasserstoff vom spezifischen Gewicht $= 0{,}07$ gefüllt, mit einem Gewicht von 363 kg, einschließlich der Hülle des Ballons, in die Höhe steigen soll?

60. Der erste Luftballon (Charliere), womit der Physiker Charles im Jahre 1783 in Paris aufstieg, hatte einen Inhalt von 10 000 Kubikfuß, und $^{27}/_{28}$ dieses Inhaltes waren bei einem Barometerstande von 28,3 Zoll mit unreinem Wasserstoff gefüllt, der $5^1/_4$ mal so leicht war wie atmosphärische Luft. Das Gewicht des nicht gefüllten Ballons nebst Zubehör betrug $604^1/_2$ Pfd. Es fragt sich: 1. mit welcher Kraft stieg der Ballon in die Höhe? 2. in welcher Höhe blähte er sich ganz auf? Das Gewicht eines Kubikfußes Luft soll zu 0,08 Pfd. angenommen werden.

XVIII. Bewegung und Widerstand der Luft.

---

1. Ein Gefäß sei mit Gas gefüllt, dessen Dichte $= d$, und wir wollen annehmen, es werde durch einen beweglichen Kolben stets in dieser Dichte erhalten. Das an dem Gefäße angebrachte offene Manometer zeige eine Quecksilberhöhe $= h$. Wenn nun die Dichte des Quecksilbers $= D$ gesetzt wird, mit welcher Geschwindigkeit v wird das Gas durch eine Öffnung vom

Querschnitt $= a$ ausfließen? Und wie groß wird die während einer Sekunde ausfließende Luftmenge M sein?

2. Der Kolben eines Cylindergebläses drückt mit einer Kraft von 400 kg während einer Minute 4 cbm Luft aus der Öffnung, wieviel werden in derselben Zeit durch einen Druck von 900 kg ausfließen?
3. Wenn das Gefäß der Aufgabe 1 atmosphärische Luft enthält, das Barometer b und das Manometer h Zentimeter Quecksilber zeigt und die Temperatur $= t^0$ C. ist, wie groß ist dann die Ausflußgeschwindigkeit v und die während einer Sekunde durch eine Öffnung vom Querschnitt a ausfließende Luftmenge M*)?
4. Mit welcher Geschwindigkeit strömt ein Gas bei einer Temperatur von 10° C. in einen absolut leeren Raum, wenn dabei keine Kontraktion stattfindet?
5. Mit welcher Geschwindigkeit muß ein Körper geworfen werden, damit er einen leeren Raum hinter sich zurückläßt?
6. Wie erklärt es sich, daß die Ausflußgeschwindigkeit eines Gases in einen luftleeren Raum von dem Drucke, den das Gas erleidet, völlig unabhängig ist, daß also ein und dasselbe Gas unter jedem Drucke und entsprechender Dichtigkeit, aber gleichbleibender Temperatur mit gleicher Geschwindigkeit ausfließt?
7. Ein Gasometer enthält Leuchtgas von 0,56 der Dichte der atmosphärischen Luft. Wieviel Kubikmeter strömen stündlich aus der kurzen, 0,02 m weiten Ansatzröhre desselben, wenn das Manometer 0,05 m Wassersäule zeigt, der mittlere Barometerstand 0,75 m beträgt und die Temperatur 15° C. ist?
8. Wieviel Leuchtgas strömt aber stündlich aus diesem Gasometer, wenn das Gas nicht durch eine kurze Ansatzröhre, sondern durch eine 400 Fuß lange, 0,05 Fuß weite Röhre ausfließt; alle sonstigen Verhältnisse aber dieselben sind wie vorher?
9. Wie groß ist die theoretische Ausflußgeschwindigkeit h der Luft durch einen Schornstein von $H = 20$ m Höhe, wenn die Temperatur der äußeren Luft $t = 15°$, sowie die Mitteltemperatur im Inneren des Schornsteins $T = 150°$ C. ist?
10. Wenn die theoretische Ausflußgeschwindigkeit der warmen Luft von T^0 C. aus dem Schornsteine $= v$ ist, wie groß ist theoretisch die Menge der in den Rost des Schornsteins einströmenden kälteren Luft von t^0 C.?
11. Welchen Einfluß haben die Höhe des Schornsteins, sowie die Temperatur der Luft in demselben auf die Geschwindigkeit des Zuges?
12. Nach Péclet's Versuchen erhält man die wirkliche Geschwindigkeit der verbrannten Luft in einem Schornsteine von der ganzen Länge L, der senkrechten Höhe H und dem lichten Durchmesser (oder auch der Seite des quadratischen Durchschnittes) D, in Metern ausgedrückt, mittels der Formel:

$$v = k\sqrt{\frac{Ha\,(T-t)}{k_1\,D + L}},$$

*) Der Ausdehnungskoeffizient der Gase beträgt 0,003665 oder abgekürzt 0,004.

worin für einen Schornstein aus Backsteinen oder Ziegeln

$$k = 8{,}85, \qquad k_1 = 4,$$

für einen Schornstein von Eisenblech

$$k = 14, \qquad k_1 = 10,$$

für einen Schornstein aus Gußeisen

$$k = 19{,}8, \qquad k_1 = 20.$$

Wie groß berechnet sich hiernach die Ausflußgeschwindigkeit der verbrannten Luft aus einem senkrechten quadratischen Schornsteine von Backsteinen, der 14 m hoch und 0,5 m weit ist, wenn die Luft in demselben 150° C., die äußere Luft aber + 13,5° C. hat?

13. Welche Kraft übt ein Wind gegen ein Segel von $F = 18$ qm aus, der mit einer Geschwindigkeit von $c = 10$ m senkrecht gegen dasselbe stößt?

14. Nach den Versuchen und Beobachtungen des Grafen de Pambour läßt sich der Widerstand der Luft, den ein einziger Eisenbahnwaggon*) bei einer Geschwindigkeit von einer Wegstunde (15 000 Fuß) in einer Zeitstunde zu überwinden hat, zu $1\frac{1}{2}$ Pfd. annehmen, wozu noch bei einem Bahnzuge für jeden Waggon $\frac{1}{8}$ dieses Widerstandes addiert werden muß. Wie groß berechnet sich hiernach der Widerstand der Luft bei einem Eisenbahnzuge von 10 Waggons, der acht Wegstunden in einer Zeitstunde zurücklegt?

15. Warum fliegt eine horizontal geschossene Flintenkugel weiter als ein Schrotkorn, auch wenn beide anfänglich gleiche Geschwindigkeit besitzen?

XIX. Schall.

Fortpflanzung des Schalles in der Luft**) ohne Rücksicht auf die Temperatur. — Schallwelle.

1. Wenn zwischen einem Blitz und dem Anfange des Donners ein Zeitraum von 40 Sekunden (die annähernd durch Pulsschläge bestimmt werden können) liegt, wie weit ist das Gewitter entfernt**)?

---

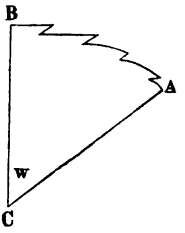
*) Nämlich wie sie auf Bahnen von 5 Fuß Spurweite allgemein gebaut zu werden pflegen.

**) Die Geschwindigkeit des Schalles in der Luft wird in diesem Abschnitte, besonders um der Einfachheit der Rechnungen willen, zu 1024 Par. Fuß (= 332,635 m) in der Sekunde gerechnet, falls nicht ein anderes Maß angegeben ist. Auf den Wärmezustand ist nur in den Aufgaben 69 bis 66 Rücksicht genommen.

2. Wenn der Donner eines Gewitters 20 Sekunden lang anhält, auf welche Länge der Gewitterwolke dürfte sich schließen lassen?

3. Einem Blitze, dessen durchlaufene Strecke AB (Fig. 41) unter einem Winkel erschien, der zu ungefähr 36° geschätzt wurde, folgte der Donner nach 13 Sekunden und hielt 17 Sekunden an. Wie groß ergiebt sich hieraus beiläufig die durchblitzte Strecke? (Nach Poppe.)

Fig. 41.



4. Wieviel Zeit wird zwischen dem Augenblicke, in welchem man einen Stein in eine 150 m tiefe Grube fallen läßt, und dem verstreichen, in welchem man das Aufschlagen des Steines hört?

5. Man läßt einen Stein in eine Grube fallen und hört ihn nach zehn Sekunden aufschlagen; wie tief ist die Grube?

---

6. Wieviel Oszillationen (n) während einer Sekunde macht ein Luftteilchen in einer Schallwelle von 10 m Länge?

7. Wie groß ist die Oszillationszeit (τ) eines Luftteilchens in einer Schallwelle von 1,3 m Länge?

8. Der tiefste musikalisch noch bestimmbare Ton entsteht durch 16 Schwingungen, der höchste, bis zu welchem noch die Tonintervalle zu bestimmen sind, durch 32 768, und der höchste überhaupt noch wahrnehmbare durch 36 500 Schwingungen in der Sekunde. Wie groß ist die Wellenlänge dieser drei Töne?

9. Wie weit müssen die Wellen zweier einfachen Schalle, die nacheinander unser Ohr erreichen, wenigstens voneinander entfernt sein, wenn beide noch getrennt wahrgenommen werden sollen?

10. Wie weit muß also eine Wand von einem Sprechenden entfernt sein, damit er eine oder zwei oder drei ꝛc. möglichst rasch ausgesprochene Silben durch Reflexion vollständig wahrnehme?

11. Wenn der erste Schall eines Echos nach drei Sekunden ins Ohr gelangt, wie weit ist die reflektierende Fläche entfernt?

---

12. Welche naheliegende Beobachtung beweist, daß sich hohe und tiefe Töne gleich schnell fortpflanzen?

13. Warum ruft man in die Ferne in höheren Tönen als in die Nähe? Und warum müssen, um vernommen zu werden, die Saiten des Kontrabasses weiter schwingen als die der Violine?

14. Warum ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in dichterer und in dünnerer Luft die nämliche, vorausgesetzt, daß die Temperatur die nämliche ist?

15. Warum hört man einen im Thale fallenden Schuß auf einem Berge beſſer, als umgekehrt einen auf dem Berge fallenden im Thale?
16. Beim Anſtoßen der Champagnergläſer tritt dann erſt der reine Klang hervor, wenn keine Kohlenſäure ſich mehr entwickelt. Warum?
17. Wenn man ſich einer Schallquelle raſch nähert oder davon entfernt (z. B. auf einer Eiſenbahn), ſo erſcheint der Ton bezüglich höher oder tiefer, als bei gleichbleibender Entfernung. Wie erklärt ſich dieſes?

Schallerregung. — Tonlehre.

18. Aus welcher naheliegenden Beobachtung kann man ſchließen, daß die Schwingungsdauer einer geſpannten Saite von der Größe ihrer Ablenkung faſt ganz unabhängig iſt?
19. Wie verhalten ſich die Schwingungszahlen zweier Saiten von 2 und 3 m Länge, die außerdem gleiche Dicke und gleiche Spannung haben und von gleichem Stoffe ſind?
20. Wie verhalten ſich die Schwingungszahlen zweier Saiten, wenn ſie gleiche Längen, gleiche Dicken und gleichen Stoff haben, ihre Spannungen aber wie 4 : 9 ſich verhalten?
21. Wie verhalten ſich die Tonhöhen zweier Saiten, die bei ſonſt gleichen Verhältniſſen die Längen 1,6 und 2 m, ſowie die Dicken 1,25 und 1,5 mm haben?
22. Wie verhalten ſich die Tonhöhen zweier Saiten von gleicher Dicke und gleichem Stoffe, wenn die eine Saite 1 m lang iſt und durch eine Kraft von 16 kg geſpannt wird, die Länge der andern aber = 0,75 m, ihre Spannung = 9 kg iſt?
23. Wie groß iſt die Schwingungszahl n einer Saite von $l = 1{,}2$ m Länge, $d = 2$ mm Dicke, $s = 0{,}5$ ſpezif. Gewicht, die durch eine Kraft von $P =$ 6 kg geſpannt wird?
24. Wenn eine Saite $l = 9$ preuß. Fuß lang iſt, $p = 0{,}5$ Lot wiegt und durch eine Kraft von $P = 4$ Pfd. geſpannt wird, wie groß ſind die Schwingungszeit t und die Schwingungszahl n?
25. Wieviel Schwingungen macht eine eiſerne Saite von 0,75 m Länge in der Sekunde, wenn ſie durch ein Gewicht von 13,2 kg geſpannt wird, und wenn 3 m davon 4 g wiegen?
26. Wie groß muß das ſpannende Gewicht einer meſſingenen Saite von 1,6 preuß. Fuß Länge und 0,0016 Fuß Dicke ſein, wenn ſie in der Sekunde 400 Schwingungen machen ſoll?
27. Von zwei Stäben aus gleichem Metall hat der eine eine Länge von $l_1 =$ 1,5 m und eine Dicke von $d_1 = 9$ mm, der andere eine Dicke von $d_2 =$ 4 mm; welche Länge l_2 muß der letztere haben, damit beide Stäbe gleichviel Schwingungen in der Sekunde machen?

28. Der Ton $\underline{C}$ (Kontra-C) entsteht durch 32 Schwingungen in der Sekunde*); wieviel Schwingungen entsprechen den Tönen C (großes C), c (kleines ungestrichenes c), d, e, f, g, a, h, $\overline{c}$ (einmal gestrichenes c)?

29. Man soll von g ausgehend eine Reihe von Tönen angeben, deren Schwingungszahlen dasselbe Verhältnis zu einander haben, wie die Töne c, d, e, f, g, a, h, $\overline{c}$ (*c dur*-Tonleiter), d. h. man soll die *g dur*-Tonleiter bestimmen?

30. Welche Töne müssen in die *c dur*-Tonleiter eingeschaltet werden, um die *d dur*-, und welche, um die *a dur*-Tonleiter zu geben?

31. Welche ist die *dur*-Tonleiter desjenigen Tones, auf welchen man gelangt, wenn man von c aus um fünf Quinten weiter schreitet?

32. Welche Regel ergiebt sich aus den letzten Aufgaben für die Auffindung der Grundtöne derjenigen Tonarten, in welchen beziehungsweise 1, 2, 3 ꝛc. Kreuze vorgezeichnet sind?

33. Welche ähnliche Regel läßt sich für die Tonarten aufstellen, in welchen 1, 2, 3 ꝛc. b vorgezeichnet sind?

34. Welche Töne muß man in die diatonische Tonleiter einschalten, um theoretisch genau die *dur*-Tonleitern aller Töne und somit die enharmonische Tonleiter zu erhalten? Und welche dieser Töne nimmt man in der chromatischen Tonleiter, die in der jetzigen praktischen Musik gebräuchlich ist, als zusammenfallend an?

35. Wie groß berechnen sich die Intervalle der aufeinander folgenden Töne der chromatischen Tonleiter in der gleichschwebenden Temperatur?

---

36. Welches sind die Obertöne eines Tons? welche derselben sind dem Grundton harmonisch? und welche sind also die harmonischen Obertöne des Grundtons C?

37. Warum ist es zur Erzeugung eines möglichst vollen Klanges zweckmäßig, die Saiten eines Klaviers in ungefähr $^1/_7$ ihrer Länge anzuschlagen?

38. Auf welche Weise kann man mittels eines Monochords darthun, daß in dem Klange, der durch Streichen (oder Rupfen) einer Saite in $^1/_7$ ihrer Länge entsteht, die sechs ersten Teiltöne, also außer dem Grundton noch seine fünf ersten Obertöne vorhanden sind?

39. Welcher Ton entspricht einer Saite, die 24 mal soviel Schwingungen macht, als zum Ton C erforderlich sind?

40. Welcher Ton entsteht durch den sechsten Teil der Schwingungen von $\overline{\overline{c}}$ (dem doppelt gestrichenen c)?

41. Um die Schwingungszahl eines gegebenen Tones zu bestimmen, hat man die Saite eines Monochords mit dem Tone $\overline{c}$ einer Stimmgabel (der durch 256 Schwingungen entsteht) gleichgestimmt und alsdann gefunden, daß man

---

*) Die Schwingungszahl von $\underline{C}$ wird gewöhnlich etwas größer, nämlich fast 33 angenommen, der einfacheren Rechnung wegen ist aber hier und im folgenden die Zahl 32 angenommen und die Schallgeschwindigkeit zu 1024 Pariser Fuß = 332 m.

jetzt dieſe Saite auf $^2/_5$ ihrer Länge verkürzen muß, um den gegebenen Ton zu erhalten; wie berechnet ſich daraus die geſuchte Schwingungszahl und wie heißt der Ton?

42. Ein an ſeinem einen Ende befeſtigter elaſtiſcher Stab macht in der Sekunde 512 (transverſale) Schwingungen; in welchem Verhältniſſe muß man ihn verkürzen, damit er die große Terz desjenigen Tones gebe, welcher der vorigen Länge entſpricht?

43. Eine Saite iſt durch ein Gewicht von 16 kg geſpannt und giebt einen gewiſſen Ton; durch welche Spannung erhält man die Quinte dieſes Tones?

44. Die eine von zwei Stimmgabeln macht in der Sekunde 480 Schwingungen, entſpricht alſo dem Ton $\overline{h}$, die andere macht 494 Schwingungen; wieviel Stöße geben ſie in der Sekunde bei gleichzeitigem Tönen?

45 a. Welcher Ton iſt der Differenzton α) von c und e; β) von c und g?

45 b. Welche Töne ſind aber die Summationstöne derſelben?

46. Zwei Töne haben das Intervall eines großen halben Tones und machen in der Sekunde ſechs Stöße; welche Töne ſind es;

47. Während der Schwingungsdauer eines Pendels von 0,28 m Länge machen zwei Töne, die das Intervall eines großen halben Tones haben, vier Stöße; welche Töne ſind es?

48. Die Schwingungszahl einer Stimmgabel iſt genau $= 432$; man ſoll die Schwingungszahl des Tones einer zweiten Stimmgabel berechnen, wenn man beobachtet hat, daß die beiden Gabeln während der Schwingungszeit eines Pendels, das in der Minute 104,6 Schwingungen macht, vier Stöße geben*)?

---

49. Wie groß iſt in der Luft die Wellenlänge des Tones c?

50. Wie verhalten ſich die Tonhöhen der beim Anblaſen zweier Röhren von 3 und 4 Fuß Länge entſtehenden Töne?

51. Wie lang muß eine offene (ungedeckte) Orgelpfeife ſein, welche den tiefſten Ton von 32 Schwingungen in der Sekunde, alſo $\underline{C}$, geben ſoll?

52. Wie lang muß eine offene und wie lang eine gedeckte Orgelpfeife ſein, die den Ton $\overline{\overline{c}}$ geben ſoll?

53. Wie lang muß eine gedeckte Pfeife ſein, um den Ton $\overline{a}$ zu geben, den gewöhnlich die Stimmgabeln haben?

54. Wieviel Schwingungsknoten und wieviel Bäuche können in einer ungedeckten Pfeife liegen?

55. Wieviel in einer gedeckten Pfeife?

56. α) Eine ungedeckte Pfeife hat den Grundton C; welche Töne wird ſie bei ſtärkerem Anblaſen geben?

β) Welche Töne würden aber durch dieſelbe Pfeife entſtehen, wenn ſie gedeckt würde?

---

*) Man kann mittels eines einfachen Pendels von veränderlicher Länge leicht die Länge eines Pendels beſtimmen, während deſſen Schwingungszeit genau vier Stöße erfolgen.

57. Warum klingt ein Akkord aus ungedeckten Labialpfeifen voller und harmonischer, als aus gedeckten, deren Akkorde weicher und dumpf erklingen?

[58. Welche Relation findet zwischen den Transversal- und Longitudinalschwingungen einer Saite von bestimmter Länge und Spannung statt?]

[59. Welche zwischen den Transversal- und Longitudinalschwingungen eines cylindrischen Stabes?]

Fortpflanzung des Schalles in verschiedenen Körpern und bei verschiedenen Temperaturen.

60. Man findet die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in einem Gase aus der Formel $v = \sqrt{\frac{g\,B}{d} \cdot k}$ (Lehrbuch §. 120), worin g die Beschleunigung der Schwere, B die auf 0^0 reduzierte Barometerhöhe, d die Dichte des Gases, auf die des Quecksilbers bei 0^0 bezogen, und k den Quotienten der beiden Wärmekapazitäten des Gases bezeichnen. Wie groß berechnet sich daraus die Geschwindigkeit des Schalles in der atmosphärischen Luft bei einer Temperatur von 0^0 und wie groß bei 16^0 C., wenn $k = 1{,}4$ angenommen wird?

61. Genaue, durch Arago, Humboldt und andere im Jahre 1822 angestellte unmittelbare Beobachtungen haben die Geschwindigkeit des Schalles in der Luft bei 16^0 C. = 340,88 m = 1049,38 Par. Fuß = 1086,11 preuß. Fuß ergeben; wie groß ist sie bei 0^0 und wie groß bei 10^0 C.?

62. Wie erklärt es sich, daß die Schallgeschwindigkeit in der Luft mit der Temperatur wächst, aber vom Barometerstande unabhängig ist?

63. Warum verstimmen sich gewöhnlich die Blasinstrumente bei einem länger dauernden Konzerte, und zwar so, daß alle Töne etwas höher werden?

64. Warum hören wir ferne Töne (z. B. Glockengeläute) weniger deutlich bei warmem als bei kaltem Wetter?

65. Eine Pfeife giebt bei einer Luftwärme von 10^0 C. den Ton C; wie groß muß die Temperatur sein, damit sie die große Terz dieses Tones giebt?

66. Nach Dulongs Versuchen giebt eine 2 Fuß lange, offene Pfeife, mit Wasserstoff angeblasen, einen Ton, der sehr wenig von $\overline{h}$ verschieden ist; wie groß berechnet sich daraus die Geschwindigkeit des Schalles im Wasserstoffe?

---

67. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in den festen und tropfbar flüssigen Körpern läßt sich durch die Formel $v = \sqrt{\frac{g}{d}}$ (vergl. Lehrbuch

§. 120) berechnen, worin g die Beschleunigung der Schwere, d die Größe bezeichnet, um welche eine Säule des betrachteten Körpers von der Längeneinheit, in welcher g gegeben ist, durch eine dem Gewicht dieser Säule gleiche Zug- oder Druckkraft verlängert oder verkürzt wird. Wie groß berechnet sich hiernach die Geschwindigkeit des Schalles im Wasser an einem Orte, wo $g = 9{,}8088$ m ist, und wenn man weiß, daß das Wasser durch den Druck einer Atmosphäre um 0,00004785 seines Volumens zusammengedrückt wird?

68. Ein in der Mitte gehaltener Silberstab von 1 Fuß Länge giebt, wenn man ihn am einen Ende reibt, einen Ton, der dem fünfmal gestrichenen d sehr nahe liegt; wie groß ist hiernach die Geschwindigkeit des Schalles im Silber?

69. Ein 4 Fuß langer Stab von Weidenholz giebt, in der Mitte festgehalten und am einen Ende gerieben, das viergestrichene c; wie groß ist also die Geschwindigkeit des Schalles in diesem Holze?

70. Da der Erfahrung gemäß alle Körper den Schall fortpflanzen, welcher Schluß läßt sich daraus auf die Konstitution der Körper machen?

XX. Ausdehnung der Körper durch die Wärme.

Berechnung der Ausdehnung bei gegebenem Ausdehnungskoeffizienten.

1. Wieviel betragen n^0 R. nach C. und F.? Wieviel n^0 C. nach R. und F.? Wieviel n^0 F. nach R. und C.?

2. Die Länge eines Körpers ist $= L$ bei 0^0 und $= L_1$ bei t^0; wie groß ist der dem Körper zugehörige Ausdehnungskoeffizient a?

3. Die Länge eines Körpers ist $= L$ bei 0^0, der Koeffizient der linearen Ausdehnung $= a$; welche Länge hat der Körper bei t^0?

4. Die Länge einer Eisenbahnschiene ist $= 2{,}5$ m bei 0^0 C.; wie lang ist sie bei 30^0 C.?

5. Eine Zinkstange hat bei 0^0 C. eine Länge von 0,3 m; wie lang ist sie bei 40^0 C.?

6. Die Länge eines Körpers ist $= L$ bei t^0, der Ausdehnungskoeffizient ist $= a$; welche Länge hat er bei $t_1{}^0$?

7. Eine Messingstange hat bei 40^0 C. eine Länge von 0,5 m; wie lang ist sie bei 0^0 C.?

8. Eine gußeiserne Röhre ist bei 20^0 C. 2 m lang; wie lang ist sie bei 100^0 C.?

9. Eine Glasstange hat bei 25^0 C. eine Länge von 2 m; wie lang ist sie bei 400^0 C.?

9a. Bei den elektrischen Glühlampen wird als Material für die in die Glasbirne eingeschmolzenen Zuleitungsdrähte zu den Kohlefäden Platin genommen. Warum?

10. Welche Länge muß ein messingener Stab bei 15° C. haben, damit er bei 0° C. genau 2 m lang sei?

11. Eine rechtwinkelige Platte habe bei 0° einen Flächeninhalt $= F$; wie groß ist sie, wenn sie zur Temperatur $t°$ C. erwärmt wird, und der lineare Ausdehnungskoeffizient $= a$ ist?

12. Eine rechtwinkelige Platte von Gußeisen hat bei 0° C. einen Flächeninhalt von 20 qdm; wie groß ist sie, wenn sie bis auf 80° C. erwärmt wird?

13. Ein messingener Kreis hat bei 0° C. einen Halbmesser von 5 cm; um wieviel ist der Flächeninhalt dieses Kreises bei 36° C. größer als bei 0°?

14. Eine gußeiserne Platte hat bei 10° C. einen Flächeninhalt von 2 qm; wie groß ist sie bei 20° C. und wie groß bei 0°?

15. Ein parallelepipedischer Körper hat bei 0° einen Körperinhalt $= K$; wie groß ist er, wenn er um $t°$ C. erwärmt wird und der lineare Ausdehnungskoeffizient $= a$ ist?

16. Ein Sandsteinblock hat bei — 10° C. ein Volumen von 2 cbm; um wieviel dehnt er sich aus, wenn er bis 40° erwärmt wird?

17. Eine messingene Kugel hat bei 0° C. einen Durchmesser $=$ 5 cm; wie groß ist er bei 100° C.?

18. Eine Quantität Quecksilber hat einen Rauminhalt von 5 ccm bei 0° C.; welchen bei 80° C.?

19. Ein gläserner Ballon enthält bei 10° C. ein Liter Wasser; wie groß ist sein Rauminhalt, wenn er mit Wasser von 90° C. gefüllt ist?

20. Welchen Raum nehmen 24 ccm Quecksilber von 15° C. ein, wenn man bis 100° C. erwärmt?

21. Welchen Raum nehmen 20 Liter Wasser von 0° ein, wenn sie bis 100° erwärmt werden? (Natürlich von dem Verlust durch Verdampfung abgesehen.)

22. Die Dichtigkeit des Quecksilbers ist bei 0° $= 13{,}6$, wie groß bei $t°$?

23. An einem Barometer ist bei $t°$ C. die Höhe der Quecksilbersäule $= H$ beobachtet worden; wie groß ist sie bei 0°, und wie groß also die an H anzubringende Korrektion, um diesen Barometerstand auf die Normaltemperatur 0° zu reduzieren?

24. Man hat bei 18° R. einen Barometerstand von 336,45 Linien beobachtet; wie groß ist er, auf die Normaltemperatur 0° reduziert?

25. Es soll die bei 20° C. beobachtete Barometerhöhe von 764,4 mm auf 0° reduziert werden? (Siehe Aufgabe 23.)

26. Desgleichen die bei — 12° C. beobachtete Barometerhöhe von 745,3 mm.

27. Bei genauen Barometerbeobachtungen ist außer der Korrektion wegen der Ausdehnung des Quecksilbers durch die Wärme auch noch eine solche rücksichtlich der metallenen Skala anzubringen, besonders wenn, wie wir hier voraussetzen wollen, die Teilung auf einem beweglichen Metallstreifen angebracht ist, der vom unteren Quecksilberende bis zum oberen reicht. Wäre nun t die (auf der Skala bemerkte) Temperatur, bei welcher die Teilung derselben vor-

…er durch die Wärme.

…x die auf 0° bereits reduzierte Baro-
…chnungskoeffizient des Metalles der
… x bei $t_1{}^0$ und wie groß also die an
…tion sein?

…. 754 mm; die Skala von Messing
…ffizient des Messings sei 0,0000192
…von 0° bis 1°). Wie groß ist der

…s Pendel von der Länge = 0,994 m,
… Sekunden schlägt, täglich weniger
…bestiegen ist?

…(Fig. 42) ist an dem eisernen Auf-
…ssen oberer Teil aus einer Uhrfeder
…r Rahmen $CEFD$ befestigt, das
… F trägt zwei gleich lange Stangen
…einem Metall, das durch die Wärme
…wird als Eisen, und das obere Ver-
…dieser Stange trägt die eiserne Pen-
…che durch ein Loch des unteren Teiles
…Rahmens durchgeht. Wenn nun bei
… die Länge AM des Pendels $= L$,
…effizient des Eisens aber $= a$ und
…der inneren Stangen $= a_1$ ist, wie
…ge x der inneren Stangen genommen
…r Einfluß der Wärme auf die Länge
…nsiert werde?

…ssen die inneren Stangen GH und
…e von Zink und die Länge AM des
…n sein soll?

…ber statt des Zinks Messing nehmen

…pendel besteht aus einer gläsernen
…Aufnahme von Quecksilber bestimmtes
…ndels sei $= L$; wie hoch muß, in
…er in den Gefäßen stehen, damit bei
…tange und des Quecksilbers durch die
…bleibt?

…olumen $= V$ hat, geht nach Hall-

… $t + 0{,}0000075601 \cdot t^2$
…91 $\cdot t^3$) L

über, wenn t zwiſchen 0^0 und 30^0 C. liegt, dagegen in

$$V_1 = V\,(1 - 0{,}000094178\,.\,t + 0{,}0000053366\,.\,t^2 - 0{,}000000010409\,.\,t^3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{II.}$$

wenn t zwiſchen 30^0 und 100^0 C. liegt.

Wie groß iſt hiernach V_1 bei $11{,}5^0$, wie groß bei $8{,}9^0$ und wie groß bei 50^0 C.?

34. Ein Glas mit engem Hals hat man bei der Temperatur von 0^0 mit Waſſer gefüllt und das Gewicht des Waſſers $= 124\,g$ gefunden. Nach der Erhitzung des Gefäßes bis zu 100^0 C. waren $6\,g$ Waſſer ausgefloſſen; wie groß ergiebt ſich hieraus die Ausdehnung der Volumeneinheit des Waſſers, den kubiſchen Ausdehnungskoeffizienten des Glaſes $= 0{,}000026$ angenommen?

---

35. Das Volumen eines Gaſes iſt $= V_0$ bei 0^0; wie groß bei t^0 C. und gleichbleibendem Druck?

36. a) Das Volumen eines Gaſes iſt $= V_0$ bei 0^0 C. und dem Druck 0,76 m; wie groß iſt ſein Volumen V bei t^0 C. und dem Druck B?
    b) Das Volumen eines Gaſes iſt V bei t^0 C. und dem Druck B, wie groß iſt ſein Volumen (V_0) bei der Normaltemperatur und dem Normaldruck?

37. Eine Luftmaſſe hat bei 20^0 C. ein Volumen von 5 ccm; wieviel bei 0^0 C., aber gleichbleibendem Druck?

38. Bis zu welcher Temperatur muß eine Luftmaſſe von 0^0 erwärmt werden, um bei gleichem Druck den doppelten Raum einzunehmen?

39. Das Volumen eines Gaſes iſt $= V$ bei einer Temperatur von t^0; wie groß iſt ſein Volumen: a) bei 0^0, b) wie groß bei $t_1{}^0$ C., wenn der Druck derſelbe bleibt? c) Wie ändert ſich aber das Volumen V_1 in b), wenn der darauf wirkende Druck von B in B_1 übergeht?

40. Wenn ein Glas vom Volumen V durch Erwärmen in das Volumen V_1 übergeht und dabei auch der auf das Gas wirkende Druck ſich ändert, ſo findet zwiſchen den Volumina V, V_1, ihren bezüglichen Temperaturen t, t_1 und Drucken B, B_1 folgende Relation ſtatt:

$$\frac{V}{V_1} = \frac{1 + at}{1 + t_1} \cdot \frac{B_1}{B} = \frac{273 + t}{273 + t_1} \cdot \frac{B_1}{B}$$

(Gay-Luſſac-Mariotteſches Geſetz), in welchen Ausdrücken für Grade der 100teiligen Thermometerſkala

$$a = 0{,}003665 = {}^1/_{273},$$

dagegen für Grade der 80teiligen Skala

$$a = 0{,}004581 = {}^1/_{218}$$

zu ſetzen iſt.

41. In neuerer Zeit zählt man oft die Thermometergrade (nach Celſius) nicht vom Eispunkte, ſondern von einem 273^0 tiefer liegenden, alſo von einem Punkte, bei welchem auf der gewöhnlichen Skala die Zahl -273^0 ſtehen

müßte, und nennt diesen Punkt den absoluten Nullpunkt (Lehrbuch §. 197, 2), sowie die von ihm an gerechnete Temperatur die absolute Temperatur. Die absolute Temperatur $273 + t$, wo t vom Eispunkte an gezählt ist, wird gewöhnlich mit einem (großen) T bezeichnet. Das in voriger Nummer angeführte Mariotte-Gay-Lussacsche Gesetz kann daher in folgender Form geschrieben werden:

$$\frac{VB}{V_1 B_1} = \frac{T}{T_1}.$$

Welche bemerkenswerten, in Worten auszudrückenden Gesetze ergeben sich daraus

a) wenn die Drucke B und B_1 einander gleich sind,

b) wenn die Volumina V und V_1 einander gleich sind?

42. 1,5 Liter Luft von 27° C. stehen unter einem Druck von 0,72 m Quecksilberhöhe; welchen Raum nimmt diese Luft bei der Normaltemperatur und dem Normaldruck, nämlich bei 0° C. und 0,76 m Quecksilberhöhe ein?

43. Eine Luftmasse von 200 cbm Inhalt, 1 kg Spannkraft (auf den Quadratzoll) und 10° C. Wärme wird in einem Hohofen bis 200° erwärmt und erhält eine Spannung von 1,266; welchen Raum nimmt sie ein?

44. a) Ein Luftvolumen von 0° C. und 0,76 m Druck wiegt Q_0 Gramm; wieviel wiegt ein gleiches Luftvolumen von $t°$ C. und B Meter Druck?

b) Ein Luftvolumen von $t°$ C. und B Meter Druck wiegt Q Gramm; wieviel wiegt ein gleiches Luftvolumen von 0° und 0,76 m Druck?

45. Wo in der Stube wird man es gewöhnlich zuerst riechen, wenn auf den heißen Ofen Räucherwerk gestreut wird?

---

46. Eine Glaskugel, deren Hals mit einem Hahn verschlossen und auf eine Luftpumpe aufgeschraubt werden kann, ist mit atmosphärischer Luft gefüllt, deren Temperatur $= t°$ und deren Druck $= B$; auf welche Weise findet man das Gewicht dieser Luft bei der Normaltemperatur 0° und dem Normaldruck von 0,76 m?

47. Eine Glaskugel mit atmosphärischer Luft von 0,76 m Druck und 0° Temperatur wurde gewogen, alsdann unverschlossen (so daß der Druck der nämliche blieb) bis zu 100° C. erwärmt und hierauf verschlossen. Nach abermaliger Wägung fand sich, daß eine Luftmenge von 1 g Gewicht ausgetreten war. Wie groß war das Volumen der Kugel und das Gewicht der darin befindlichen Luft?

48. Es soll der Rauminhalt eines Glasballons bestimmt werden, der bei 20,5° C. und bei 0,755 m Druck mit trockener Luft gefüllt 567,949 g, mit reinem Wasser von derselben Temperatur gefüllt 6133,162 g, und luftleer bis zu einem Druck von 0,005 m 561,291 g wog.

Thermometrie und Bestimmung der Ausdehnungskoeffizienten.

49. Es soll der innere Rauminhalt V einer engen Glasröhre von überall gleichem Kaliber bei der Temperatur t bestimmt werden.

50. Auf welche Art kann man eine enge Glasröhre von ungleichem Kaliber in Teile von gleichem Rauminhalte teilen?

51. Man hat eine in Teile von gleichem Rauminhalte geteilte Glasröhre, an deren einem Ende sich eine hohle Kugel befindet. Man soll bestimmen, wievielmal der Rauminhalt der Kugel größer ist, als der einer Abteilung der Röhre?

52. Man soll die scheinbare Ausdehnung des Quecksilbers bestimmen durch eine in Teile von gleichem Rauminhalte geteilte Glasröhre mit daran befindlicher hohler Kugel, welche N Raumteile der Röhre enthält (vergl. Aufgabe 51).

53. Man will ein Quecksilberthermometer machen, wodurch man Temperaturen von 200° C. über und 40° unter 0° bestimmen kann; wievielmal muß der Rauminhalt der an die Röhre anzublasenden Kugel größer sein als der der Röhre.

54. Eine Glasröhre ist in 260 Teile von gleichem inneren Rauminhalte geteilt, und wenn man sie erst leer und dann mit einer Quecksilbersäule, welche 40 Abteilungen einnimmt, wägt, so erhält man einen Gewichtsunterschied von 2 g. Wie groß muß der Halbmesser der Kugel sein, welche man an diese Röhre anblasen muß, damit die 260 Abteilungen der Röhre 180 Zentesimalgrade bilden?

55. Der durch Beobachtung bestimmte Siedepunkt eines Thermometers ist nur dann richtig, wenn der zugleich beobachtete Barometerstand, auf 0° Temperatur reduziert, = 336,9 Par. Linien (= 760 mm) war. Für jeden andern Barometerstand ist eine Berichtigung nötig. Angenommen, man habe nur 334‴ (753,8 mm) gefunden, und die beobachtete Entfernung des Siedepunktes vom Eispunkte sei = e, wie groß ergiebt sich dann die berichtigte Entfernung e_1?

56. Mittels eines Gewichtsthermometers, das aus einem ungefähr 4 Zoll langen und 1 Zoll weiten Glasrohr besteht, an dessen einem Ende eine fein ausgezogene enge Röhre sich befindet, soll man die Temperatur des Dampfes von siedendem Schwefel bestimmen. — Das Gewicht des den Apparat ausfüllenden Quecksilbers sei = 610 g gefunden worden. — Nachdem man die Röhre mit trockener Luft angefüllt und alsdann dem Schwefeldampf so lange ausgesetzt hat, bis man sicher war, daß durch die feine Öffnung keine Luft mehr entweiche, hat man sie mittels eines Lötrohrs zugeschmolzen, nach ihrem Erkalten bis auf 13° C. aber durch Abbrechen der Spitze unter Quecksilber wieder geöffnet, worauf 317 g Quecksilber in die Röhre eindrangen, wenn nämlich das innere Niveau des Quecksilbers dem des äußeren gleich stand; wie groß berechnet sich hieraus die Temperatur x des Schwefeldampfes?

57. Ein Bordasches Thermometer (Pyrometer) besteht (Fig. 43) aus einer Platin- und einer Kupferstange, die aufeinander liegen und an einem Ende fest miteinander verbunden sind. Das freie Ende des etwas kürzeren Kupferstabes dient als Index, und die Graduierung geschieht so, daß das Instrument successiv in schmelzendes Eis und siedendes Wasser gelegt und die Lage des Index auf dem Platinstab mit zwei Strichen bezeichnet wird; wie groß

Fig. 43.

wird der Zwischenraum x dieser zwei Striche sein, wenn der Kupferstab 1,5 m lang ist*)?

58. Das Verfahren von Dulong und Petit zur Bestimmung des absoluten Ausdehnungskoeffizienten des Quecksilbers beruht auf dem hydrostatischen Gesetz, daß sich die spezifischen Gewichte zweier Flüssigkeiten in einer kommunizierenden Röhre umgekehrt verhalten wie ihre Höhen (Lehrbuch §. 73). Das Quecksilber wurde nämlich in eine kommunizierende Röhre gefüllt, deren beiden vertikalen Schenkel je mit einem weiteren Gefäß umgeben waren, von welchen das eine mit schmelzendem Eis, das andere mit Öl gefüllt und erwärmt wurde. Neben Bestimmung der Temperatur des erwärmten Queckfilbers wurden alsdann mittels eines Kathetometers**) die Höhen der beiden Queckfilbersäulen beobachtet. Wenn nun dabei die Höhe des in dem einen Schenkel enthaltenen Queckfilbers von $0^0 = h$, dagegen die Höhe des im zweiten Schenkel enthaltenen von $t^0 = h_1$ gefunden wurde, wie groß berechnet sich daraus der absolute Ausdehnungskoeffizient des Queckfilbers?

59. Eine Quantität Queckfilber füllt einen Glasballon mit eingeteilter enger Röhre bei 0^0 bis zur Zahl $n = 1027$ der Röhrenteilung (vergl. 51), bei 100^0 C. bis zur Zahl $n_1 = 1042$ Volumeinheiten. Wie groß berechnet sich daraus der kubische Ausdehnungskoeffizient des Glases (K), wenn der absolute Ausdehnungskoeffizient des Queckfilbers $D = \frac{1}{5550}$ $= 0{,}00018$ nach der vorigen Aufgabe gefunden ist?

60. Um den Ausdehnungskoeffizienten des Platins oder Eisens zu bestimmen, hat man folgendes Verfahren angewendet. Man nahm eine Stange des

*) Die Kleinheit dieses Raumes x gestattet nicht, ihn in 100 Teile zu teilen, er wird daher nur in 5 oder 10 gleiche Teile geteilt und diese Einteilung auf dem Platinstabe weiter fortgesetzt, das freie Ende des Kupferstabes aber mit einem Nonius versehen, mit welchem man $1/20$ oder $1/10$ eines Grades bestimmen kann.

**) Das Kathetometer besteht aus einem geteilten Metallstabe, der möglichst genau vertikal gestellt werden kann, mit einer auf dem Stabe auf und ab zu bewegenden Hülse, welche ein genau horizontal liegendes Fernrohr trägt.

Metalles, deren Gewicht $= P$, brachte sie in eine kurze Glasröhre, deren eines Ende zugeblasen war, und zog dann das andere Ende in eine feine Spitze aus. Nachdem nun der Apparat mit Quecksilber gefüllt und dessen Gewicht $= P_1$ bestimmt war, brachte man ihn in horizontaler Lage in ein mit Öl gefülltes Gefäß, so daß die feine Röhre durch die Gefäßwand hervorragte. Hierauf wurde das Ölgefäß erhitzt, bis die Temperatur des Apparates von t auf t_1 gebracht und dadurch eine (aufgefangene) Quecksilbermenge vom Gewicht P_2 aus der Röhre ausgeflossen war. Wenn nun die Dichte des Metalles $= d$, der Ausdehnungskoeffizient des Quecksilbers $= D$, seine Dichte $= d_1$, sowie der Ausdehnungskoeffizient des Glases $= K$ gegeben ist, durch welche Bestimmungsgleichung findet sich der Ausdehnungskoeffizient C des Metalles?

61. Ein Metallstab, dessen Ausdehnung durch die Wärme man messen will, stößt mit seinem einen Ende gegen einen festen Widerstand, mit seinem andern gegen den kurzen Arm eines Winkelhebels (sogenannten Füllhebels). Dieser kürzere Arm hat eine Länge $= l_1$, während der längere (der Zeiger) eine Länge $= l_2$ hat. Wenn nun der Metallstab bei der Temperatur t eine Länge $= L$ hat, durch Erwärmen desselben bis zu t_1 aber der Zeiger um den Winkel w gedreht wird, wie berechnet sich daraus der Ausdehnungskoeffizient des Metalles?

62. Um die Ausdehnung des Wassers zu finden, hat man ein Glasrohr mit fein ausgezogener Spitze mit Wasser gefüllt und das Gewicht dieser Wassermenge bei 0^0 Temperatur $= 186\,g$ gefunden. Wenn nun durch Erwärmen bis zu 100^0 C. $9\,g$ ausgetrieben wurden, der kubische Ausdehnungskoeffizient des Glases aber $= 0{,}000026$ ist, wie groß ist die Ausdehnung des Wassers von 0^0 bis 100^0?

63. Zur Bestimmung des Ausdehnungskoeffizienten eines Gases wurde eine graduierte Glasröhre nebst Kugel mit trockenem Gas gefüllt, bis auf 100^0 C. erhitzt und alsdann unter Beobachtung des gerade stattfindenden Barometerstandes b zugeschmolzen. Nachdem nun der Apparat bis auf 0^0 erkaltet war, wurde die vorhin zugeschmolzene Spitze unter Quecksilber wieder abgebrochen, die Höhe β der in die Röhre eingedrungenen Quecksilbersäule sowie der Barometerstand b_1 bestimmt, hierauf die Öffnung mit Wachs verstopft und dann das Gewicht des eingedrungenen Quecksilbers $= p$, sowie hernach auch das Gewicht des bei 0^0 die ganze Röhre nebst Kugel ausfüllenden Quecksilbers $= p_1$ bestimmt. Man soll aus diesen Beobachtungen die Koeffizienten der scheinbaren und absoluten Ausdehnung des Gases ableiten.

64. Das Luftthermometer von Regnault besteht in seiner einfachsten Gestalt aus einem cylindrischen Glasgefäß mit angeblasener enger und zu einer feinen Spitze ausgezogenen Röhre. Nehmen wir an, man wolle mit ihm die Temperatur einer Flüssigkeit genau bestimmen. Der Apparat habe

I. bei 0^0 den Rauminhalt V, sei mit trockener Luft gefüllt und wiege mit dieser bei 0^0 Q. Man setzt nun

II. den Cylinder in die Flüssigkeit, beobachtet den gerade stattfindenden Barometerdruck B und schmilzt die feine Spitze zu. Alsdann dreht man

III. den Cylinder um, so daß die Röhrenspitze in ein untergesetztes Gefäß mit Quecksilber reicht, während der Cylinder mit Schnee umgeben wird, um ihn auf 0^0 zu bringen. Es steigt nun eine gewisse Menge Quecksilber in den Cylinder, deren Höhe h über dem äußeren Niveau des Quecksilbers man mißt, worauf die Röhrchenspitze unter Quecksilber abgebrochen und die Öffnung (etwa mit Wachs) verstopft wird. Endlich

IV. bestimmt man das jetzige Gewicht Q_1 des Cylinders mit Inhalt. Wie groß findet sich daraus die Temperatur der zu bestimmenden Flüssigkeit?

Bestimmung des spezifischen Gewichtes der Körper mit Rücksicht auf ihre Ausdehnung durch die Wärme.

65. Man hat mit Hilfe der hydrostatischen Wage das Gewicht eines festen Körpers $= P$ und seinen Gewichtsverlust im Wasser $= p$ bei der Temperatur t gefunden; wie groß ist das spezifische Gewicht des Körpers auf die Temperatur 0^0 und die große Dichtigkeit des Wassers (bei 4^0 C.) bezogen?

66. Man hat das Gewicht einer Flüssigkeit $= P_1$ bei der Temperatur t und das Gewicht des gleichen Volumens Wasser $= P$ bei der Temperatur t gefunden, indem man beide in derselben Flasche abgewogen hat; wie groß findet sich daraus das genaue spezifische Gewicht der ersten Flüssigkeit bei der Temperatur 0^0 und auf die größte Dichtigkeit des Wassers bezogen?

67. Um die Dichtigkeit der atmosphärischen Luft zu bestimmen, hat man einen Ballon genommen, dessen Inhalt gerade 10 Liter beträgt. Bei einer Temperatur von 18^0 C. und 754 mm Barometerstand wiegt dieser Ballon, wenn er mit trockener Luft gefüllt ist, 12,01 g mehr, als wenn er so weit leer gepumpt ist, daß die Barometerprobe nur noch 5 mm zeigt; wie groß berechnet sich hieraus die Dichtigkeit der Luft bei 0^0 C. und 760 mm Barometerstand?

68. Ein Gas hat bei der Temperatur t und unter dem Druck B ein Volumen $= V$ und ein Gewicht $= P$; wie groß ist die Dichtigkeit dieses Gases, die der Luft bei 0^0 Temperatur und unter dem Drucke von 0,76 m als Einheit genommen?

69. Wie groß ist die Dichtigkeit der atmosphärischen Luft bei t^0 C. und einem Barometerdruck von B Millimeter, auf die Dichtigkeit des Wassers von 4^0 C. bezogen?

70. Wie groß ist das Gewicht a) eines Kubikmeters; b) eines Kubikfußes atmosphärischer Luft bei einer Temperatur von t^0 C. und dem Barometerstand B?

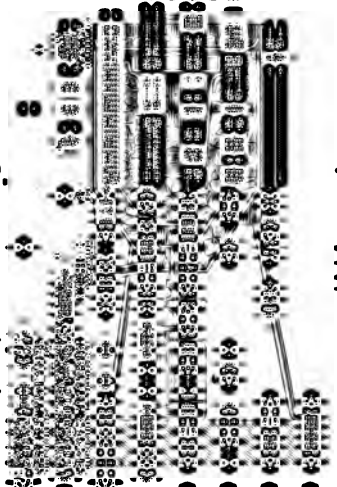
XXI. Wärmekapazität und Änderung des Aggregatzustandes der Körper.

1. Nimmt man diejenige Wärmemenge, welche erforderlich ist, um die Temperatur von 1 kg Wasser von 0^0 um 1^0 C. zu erhöhen, als Wärmeeinheit (Kalorie) an; wie groß ist dann die Wärmemenge, welche erforderlich ist, um m Kilogramm Wasser von 0^0 auf t^0 zu erwärmen?
2. Wenn man zwei Massen m_1, m_2 der nämlichen Flüssigkeit von den bezüglichen Temperaturen t_1, t_2 zusammenmischt, welche Gleichung ergiebt sich zwischen jenen Größen und der Mischungstemperatur t?
3. Wenn man 7 kg Wasser von 25^0 mit 3 kg Wasser von 65^0 mischt, welche Temperatur hat die Mischung?
4. Welche Temperatur hat eine Mischung von 6 kg Quecksilber von 20^0 und 4 kg Quecksilber von 50^0?
5. Man hat 10 kg Eisen von 100^0 mit 18 kg Wasser von 15^0 gemischt und darauf eine Temperatur von 20^0 beobachtet; wie groß ergiebt sich daraus die spezifische Wärme des Eisens?
6. Zur Auffindung der spezifischen Wärme des Quecksilbers hat man 1 kg Quecksilber von 100^0 mit 1 kg Wasser von 7^0 gemischt und eine Mischungstemperatur von 10^0 beobachtet; wie groß ergiebt sich hieraus die spezifische Wärme des Quecksilbers?
7. Die Massen m_1 und m_2 zweier verschiedenen Materien haben die Temperaturen t_1 und t_2, sowie die spezifischen Wärmen w_1 und w_2, ihre Mischungstemperatur ist $= t$; welche Gleichung findet zwischen diesen Größen statt?
8. Welche Temperatur erhält eine Mischung a) aus 8 kg Wasser von 100^0 mit 10 kg Quecksilber von $22{,}5^0$? b) aus 15 kg Quecksilber von 10^0 und 8 kg Eisen von 60^0 C.?
9. Zur Bestimmung der Temperatur in einem Schmelzofen hat man eine Platinkugel von 100 g Gewicht in denselben gebracht, nach einiger Zeit wieder herausgenommen, in eine Wassermenge von 1 kg Gewicht und 9^0 C. Wärme geworfen und nach Ausgleichung der Temperatur diese $= 13^0$ C. gefunden. Welche Temperatur war im Schmelzofen?
10. Von zwei Stoffen hat der eine eine Temperatur von $t_1{}^0$ und eine spezifische Wärme $= w_1$, der andere eine Temperatur von $t_2{}^0$ und eine spezifische Wärme $= w_2$. Es soll eine Mischung von p Kilogramm gemacht werden, deren Temperatur $= t^0$; wieviel Kilogramm sind von jedem Stoffe zu nehmen?

Aggregatzustandes der Körper.

ng der spezifischen Wärme eines
fischen Wärme des Gefäßes nötig
gieße eine Masse Wasser $= M$
nd eine Masse $= m_1$ habe, und
$= t_1{}^0$. Alsdann bringt man
höheren Temperatur $t_2{}^0$ in das
Mischung; wie groß ergiebt sich
s?

n Laplace und Lavoisier
s zu finden, hat man eine 3 kg
hwere Kugel dieses Metalles, die
zu 100° C. erwärmt war, in
s Kalorimeter gebracht, worauf
38 kg Wasser ausfloß; wie groß
rechnet sich hieraus die spezifische
ärme w des Kupfers?



5 kg Eisen von 80° C. schmol-
u im Eiskalorimeter 0,57 kg Eis;
ie groß ist die spezifische Wärme
s Eisens?

Angenommen, man habe eine
stimmte Luftmenge, die sich in
rem Behälter frei ausdehnen konnte,
ren Druck also konstant blieb, durch
ne konstante Wärmequelle in 14
Minuten von 0° auf 273° C., also
ach Aufgabe 39 in XX.) ihr
olumen verdoppelt, während die-
er Wandung eingeschlossen, durch
0° auf 273° C. gebracht wurde;
der spezifischen Wärme der Luft
Volumen ergeben?

en Zahlen, welche das spezifische
) eines Körpers ausdrücken, die
Bedeutung hat diese Zahl?

e relative Wärme oder Wärme-
Anzahl von Metallen angegeben;
hen sich aus dieser Tabelle?

Grund von Versuchen mit dem
S. 423) ist zu einfach, als daß
zu stellen.

mit 7 kg Wasser von 100° C.
ie groß berechnet sich daraus die
anum gebundene Wärme?

18. Welche Temperatur hat das Wasser, welches man erhält, wenn man 3 kg Eis von 0° mit 4 kg siedendem Wasser übergießt?

19. Wieviel Kilogramm Schnee von 0° muß man mit 6 kg Wasser von 95° C. mischen, um Wasser von 10° zu erhalten?

20. Setzt man Eis von 0° einer konstanten Wärmequelle von solcher Intensität aus, daß 8 Minuten Zeit nötig sind, bis es zu Wasser von 0° wird, so lehrt die Erfahrung, daß von da an ungefähr in 10 Minuten das Wasser auf 100° erwärmt wird und nun bei dieser Temperatur bleibt, bis während der folgenden 54 Minuten alles Wasser in Dampf übergegangen ist; wie groß ergiebt sich aus dieser Beobachtung die latente Wärme des Wassers und des Wasserdampfes?

21. Um die latente Wärme des Wasserdampfes zu finden, hat man den Dampf von 2 kg Wasser mittels eines Schlangenrohres durch ein Gefäß geleitet, das 120 kg Wasser von 30° C. enthielt, und hat dadurch die Temperatur dieses Wassers bis auf 40° erhöht, während der durchstreichende Dampf zu Wasser von 40° sich verdichtet hatte. Wie berechnet sich daraus die latente Wärme des Wasserdampfes?

22. Leitet man den Dampf von 1 kg Wasser in 5,4 kg Wasser von 0°, so erhält man 6,4 kg von welcher Temperatur?

23. Leitet man den Dampf von 4 kg siedendem Wasser in 60 kg Wasser von 0°, auf welche Temperatur wird dieses dadurch gebracht?

24. Wenn aber die 60 kg Wasser der vorhergehenden Aufgabe anstatt 0° die Temperatur 16° gehabt hätten, auf welchen Wärmegrad würden sie dann gebracht worden sein?

25. Wieviel Kilogramm Dampf von 121° C. braucht man, um 300 kg Wasser von 11° auf 28° C. zu erwärmen?

---

26. Wasser kann bei ruhigem Stehen bis auf 10 und mehr Grade unter 0° C. erkaltet werden, ohne zu gefrieren; wird es aber dann bewegt, so gefriert plötzlich ein Teil desselben; wie groß wird dieser Teil sein?

27. Bis zu welcher Temperatur würde das Zinn über den Schmelzpunkt (Tabelle 15 im Anhange) hinaus erwärmt werden, wenn die zum Schmelzen erforderliche latente Wärme bloß zur Erhöhung der Temperatur verwendet werden könnte?

28. Wieviel Kilogramm Schwefeläther würde man durch diejenige Wärme, welche beim Verdampfen von 1 kg Äther gebunden wird, von 0° bis zur Siedehitze, nämlich 35,6° C., bringen können?

XXII. Dichtigkeit, Volumen und Expansivkraft der Dämpfe, insbesondere der Wasserdämpfe.

1. Die Dichte der atmosphärischen Luft von t^0 C. und B Millimeter Druck ist (nach XX, 69) $= \frac{1}{773} \cdot \frac{273}{273 + t} \cdot \frac{B}{760} = \frac{0{,}0012932}{1 + 0{,}003665\,t} \cdot \frac{B}{760}$, und nach Beobachtungen von Gay-Lussac und anderen ist die Dichte des Wasserdampfes von 100° C. und 760 mm Druck nahe $= \frac{1}{1700}$*), beide Dichten auf die des Wassers von 4° C. bezogen. Wie groß ist hiernach die Dichte des Wasserdampfes von 100° C. und 760 mm Druck, auf die Dichte der Luft von gleicher Temperatur und gleichem Druck bezogen?
2. 1 Volumen Sauerstoff und 2 Volumen Wasserstoff verbinden sich zu 2 Volumen Wasserdampf von derselben Temperatur und Spannkraft; wie groß ergiebt sich daraus die Dichte des Wasserdampfes, auf die der atmosphärischen Luft bezogen?
3. Man kennt durch Beobachtung (siehe Tabelle 18) die Spannkraft des Wasserdampfes von 0°; wie groß berechnet sich daraus die Dichtigkeit desselben?
4. Wie groß ist die Dichtigkeit des Wasserdampfes von 40° C. im gesättigten Zustande?
5. Wieviel wiegt ein Kubikmeter Wasserdampf von 100° C.?
6. Wie groß ist das Gewicht des Wassers, das in einem Kubikmeter Wasserdampf von 25° C. enthalten ist?
7. Welche Spannkraft erhält Wasserdampf von 100° C., wenn er, nicht mehr mit Wasser in Verbindung, auf 121° C. erwärmt wird, ohne daß er sein Volumen ändern kann?
8. Welchen Raum würden 1700 cbm Wasserdämpfe von 100° C. einnehmen, wenn sie, vom Wasser getrennt, um weitere 21° erwärmt würden und sich dabei ungehindert ausdehnen könnten, der Druck also derselbe bliebe?
9. Warum nimmt die Spannkraft der Dämpfe, welche mit Wasser in Verbindung sind, schneller zu, als die Temperatur des Raumes, den sie erfüllen?
10. Wie groß ist die Dichtigkeit des gesättigten Wasserdampfes bei 121° C.?
11. Welchen Raum nehmen also die aus 1 cbm Wasser entwickelten gesättigten Dämpfe von 121° C. ein?

*) Genauer $\frac{1}{1696{,}4}$.

12. Wie groß ist die Dichtigkeit des gesättigten Wasserdampfes bei einer Spannung von fünf Atmosphären? Und wieviel wiegt ein Kubikdezimeter eines solchen Dampfes?

13. Wie groß ist die Expansivkraft des gesättigten Wasserdampfes von 110° C.*)?

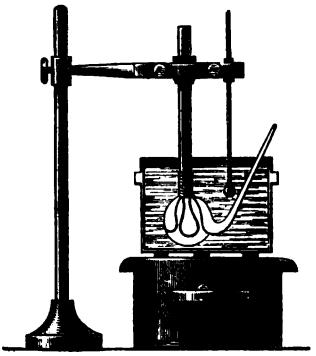
14. Welchen Druck erleidet jedes Quadratzentimeter der inneren Oberfläche eines geschlossenen Gefäßes, in welchem Wasser bis auf 165° C. erhitzt wird?

15. Wie erklärt es sich, daß gesättigter Wasserdampf von hoher Spannung, also höherer Temperatur als 100°, der aus einem Ventil ausströmt, nahe an der Öffnung eine Temperatur weit unter 100° hat?

16. Man hat bei einer thermometrischen Höhenmessung gefunden, daß das Wasser an der unteren Station bei 99,5° C., an der oberen bei 97° C. siedet; wieviel Fuß ist die letztere Station höher als die erstere?

17. Zur Bestimmung der Dichtigkeit eines Dampfes (nach dem Verfahren von Dumas) (Fig. 45) hat man einen Glasballon mit ausgezogener Spitze genommen, dessen (nach XX, 48 bestimmbares) Volumen 10 000 ccm betrug, hat ihn zuerst mit Luft von 0° gewogen und dabei sein Gewicht = 1015 g gefunden, sodann die Flüssigkeit, deren Dampf man bestimmen will, in denselben gebracht und diese durch Eintauchen in ein Gefäß mit erhitztem Öl so lange sieden lassen, bis alle Flüssigkeit in Dampf verwandelt war, worauf man rasch die Öffnung der ausgezogenen Spitze mit Hilfe eines Lötrohres zuschmolz. Das Gewicht des Ballons betrug jetzt 1010 g. Wie groß ist die Dichte dieses Dampfes, bezogen auf die atmosphärische Luft von 0°?

Fig. 45.



---

18. Bei einer Dampfmaschine von doppelter Wirkung und mit Kondensation sei der Durchmesser des Kolbens = 50 cm, seine Hubhöhe = 1,25 m, die Anzahl der Kolbenhube in der Minute = 48, der Dampfdruck betrage 1,6 kg, der Gegendruck 0,1 kg auf das Quadratzentimeter; wie groß ist der Nutzeffekt dieser Maschine? (Über den Kohlenbedarf siehe XXIII, 4.)

19. Bei einer Hochdruckmaschine sei der Querschnitt des Dampfkolbens = 0,05 qm = 500 qcm, die Geschwindigkeit des Kolbens = 1,5 m in der

*) Die Expansivkraft berechnet sich aus der Holzmannschen Interpolationsformel $\log . p = 0{,}656 + \frac{7{,}4804 \cdot t}{236{,}22 + t}$, worin p Millimeter, t Zentesimalgrade bezeichnen, die nahe mit der Formel von Magnus, sowie mit den Beobachtungsresultaten Regnaults in Tabelle 18 des Anhanges übereinstimmt.

…xpansivkraft der Dämpfe ꝛc.

…e eine Spannung von fünf Atmo-
…e des Kolbens durch eine hinreichend
…der Nutzeffekt und der Wasserbedarf

…des Effektes der Dampfmaschine in
…aschine ist, in welcher der Dampf je
…ird?
…gkeit des Dampfes von 1 Pfd. bezw.
…a und b mit verschiedenen Maßen).

…dem Kubikmeter atmosphärischer Luft
…mperatur von 25° C. und bei völliger

…t mit Wasserdampf gesättigt ist, der
(Lehrbuch §. 212.)
…fand sich der Taupunkt an einem
…i 13° C.; wieviel Prozent derjenigen
…ampfmenge, welche im Zustande der
…ättigung aufgenommen werden könnte,
…chält die Luft?

Es soll die Regenmenge berechnet
…rden, die aus einer 1000 m hohen,
…er einen Flächenraum von 14 Mil-
…onen Quadratmeter (nahe einer Viertel-
…adratmeile) befindlichen, 20° C. war-
…en und mit Wasserdämpfen völlig
…ättigten Luftmasse niederfällt, wenn
…Temperatur auf 11° C. herabsinkt.
Wie groß würde aber in der vorher-
…henden Aufgabe die Regenmenge ge-
…sen sein, wenn die 20° C. warme Luft
…ern der Taupunkt dieser Luft bei 15°

…mpe bildet sich häufig nach den ersten
…später wieder verschwindet. Woraus

28. Man soll ein inwendig feuchtes Glas mit engem Halse trocken machen. Wie wird dies am besten geschehen?
29. Wann beschlagen die Fenster innen, wann außen mit Wasserdampf?
30. Tauchen wir die Hand in Wasser und ziehen sie heraus, so fühlen wir Kälte, bei Öl dagegen nicht; warum?

XXIII. Verbrennung und Heizung.

---

1. Wieviel Kalorien (XXI, 1) werden bei der Verbrennung von 5 kg reiner Kohle erzeugt?
2. Wenn ein Klafter lufttrockenen Holzes 1500 kg wiegt und 36 Mk. kostet, dagegen 1000 Stück Torf 350 kg wiegen und 7 Mk. kosten, wie verhalten sich die Brennwerte dieser Brennstoffe zu einander?
3. Vielfachen Erfahrungen gemäß rechnet man, daß bei Dampfkesseln mit zweckmäßig eingerichteter Feuerungsstätte durch 1 kg gute Steinkohle durchschnittlich 6 kg Wasser verdampft werden. Es soll die dabei verloren gehende Wärme berechnet werden.
4. Man soll den Steinkohlenbedarf eines Dampfkessels berechnen, der stündlich 0,3 cbm Wasser verdampft.
5. Wieviel Kubikfuß atmosphärische Luft sind zur Verbrennung von 1 kg Steinkohle erforderlich, wenn die Steinkohlen einen reinen Kohlenstoffgehalt von $^6/_7$ ihres Gewichtes haben?

---

6. Man soll den Wärmeeffekt*) a bei der Verbrennung einer Kohlenwasserstoffverbindung, verglichen mit dem des Kohlenstoffs $= 1$, berechnen, wenn in der Gewichtseinheit der Verbindung w Gewichtsteile Wasserstoff und k Gewichtsteile Kohlenstoff enthalten sind.
7. Den Wärmeeffekt a einer Verbindung zu berechnen, die in der Gewichtseinheit w Teile Wasserstoff, k Teile Kohlenstoff und s Teile Sauerstoff enthält, in welcher aber der Sauerstoff oder ein Teil desselben als mit Wasserstoff zu Wasser verbunden angenommen werden muß.

---

*) Unter dem Wärmeeffekt eines Brennmaterials versteht man die Wärmemenge, in Kalorien ausgedrückt, welche bei der vollständigen Verbrennung eines bestimmten Gewichtes desselben entwickelt werden.

8. Der Alkohol besteht aus 52,66 Proz. Kohlenstoff, 12,90 Proz. Wasserstoff und 34,44 Proz. Sauerstoff, und seine chemische Formel ist C_2H_6O; es soll daraus der Wärmeeffekt des Alkohols berechnet werden.

9. Wenn man die Gewichtsmengen des Sauerstoffes, welche gleiche Gewichtsmengen von Kohlenstoff und Wasserstoff bei ihrer Verbrennung zu Kohlendioxyd und Wasser aufnehmen, miteinander vergleicht, so findet man, daß sie in demselben Verhältnisse stehen wie die Wärmeeffekte des Kohlenstoffes und des Wasserstoffes, nämlich wie 1 : 3. Daraus folgt, daß ein Gewichtsteil Sauerstoff bei der Verbrennung stets dieselbe Wärmemenge entwickelt. Wie groß ist diese?

10. Um nach dem Berthierschen Verfahren den Wärmeeffekt einer Steinkohlenart zu erfahren, hat man 1 g davon fein gepulvert, mit Bleiglätte (Bleioxyd) in großem Überschuß*) gemengt und in einem Tiegel geglüht. Nach vollständiger Verbrennung der Kohle fanden sich n Gramm reduziertes Blei. Wie groß berechnet sich daraus der Wärmeeffekt der Steinkohle?

---

11. Es soll die Verbrennungstemperatur des Kohlenstoffes bei seiner Verbrennung in reinem Sauerstoffe gefunden werden.

12. Desgleichen die des Wasserstoffes.

13. Es soll die Verbrennungstemperatur des Kohlenstoffes bei seiner Verbrennung in atmosphärischer Luft gefunden werden.

14. Desgleichen die des Wasserstoffes.

15. Wie erklärt es sich, daß die Verbrennungstemperatur des Kohlenstoffes über dreimal so groß ist, als die des Wasserstoffes (s. Aufg. 11 und 12), während doch in Beziehung auf den Wärmeeffekt dieser Stoffe das Umgekehrte stattfindet?

XXIV. Zur Theorie der Wärme.

1. Wenn man zwei Eisstücke aneinander reibt, entsteht flüssiges Wasser. Warum kann man diese Thatsache nicht durch Annahme eines Wärmestoffes erklären?

2. Nach der mechanischen Wärmetheorie nimmt man an, daß die Atome und Moleküle eines Körpers in fortwährender Bewegung sind. Von welcher Art

*) Mit 1 g des Brennmaterials werden gewöhnlich 40 g Bleiglätte gemengt und das Gemenge noch mit 30 g Bleiglätte bedeckt. Wegen des Aufschäumens beim Glühen darf der Tiegel nur halb gefüllt sein.

sind diese Bewegungen und wie unterscheiden sie sich in den drei Aggregatzuständen?

3. Wie erklärt die mechanische Wärmetheorie den Vorgang der Erwärmung eines festen Körpers, z. B. eines Stückes Eisen?

4. Wie erklärt sich die große Menge der (gebundenen oder latenten) Wärme, welche zur Überführung des festen Zustandes eines Körpers in den flüssigen und des flüssigen in den gasförmigen erforderlich ist?

5. Nach den Beobachtungen über die spezifische Wärme der Körper (Tab. 13) besitzt 1 kg Wasserstoff bei gleicher Temperatur 16 mal soviel Wärme als 1 kg Sauerstoff und 14 mal soviel als 1 kg Stickstoff, enthält aber auch 16 mal soviel Atome als 1 kg Sauerstoff und 14 mal soviel als 1 kg Stickstoff*); welchen Schluß darf man daraus bezüglich der spezifischen Wärme der Atome dieser Elemente ziehen?

6. Aus welcher Beobachtung schließt man, daß die Atome aller Elemente bei gleicher Temperatur gleiche Wärme besitzen?

7. Da eine Wärmequelle auf die Moleküle eines Körpers in ähnlicher Weise wirkt wie eine Kraft, welche einen schweren Körper der Anziehung der Erde entgegen in die Höhe hebt, da ferner (wahrscheinlich) die Atome aller chemischen Elemente gleiche spezifische Wärme haben, so liegt die Frage nahe, welche Arbeitsgröße bei der Temperaturerhöhung eines Körpers durch das Auseinanderdrängen der Moleküle verrichtet wird, oder bestimmter ausgedrückt, wie groß das mechanische Äquivalent (Arbeitsäquivalent) der Wärmeeinheit, d. h. dasjenige Gewicht ist, welches durch eine Kalorie (XXI, 1) 1 m hoch gehoben werden kann?

8. Welche Wärmemenge wird mittels einer Dampfmaschine verbraucht, d. h. in Arbeit umgesetzt, um ein Gewicht von 1275 kg 20 m hoch zu heben?

9. Wenn ein Körper von 1 kg Gewicht von einer Höhe $= h$ Meter herabfällt, welche Wärmemenge wird dadurch erzeugt?

10. Wenn ein Körper von 1 kg Gewicht und einer Geschwindigkeit $= v$ Meter in Ruhe gebracht wird; welche Wärmemenge entsteht dadurch?

11. Es soll die Wärmemenge berechnet werden, welche entsteht, wenn ein Asteroid, das eine Geschwindigkeit von sechs geographischen Meilen hat, zur Ruhe gebracht wird.

12. Wenn eine massive Kugel von Platin auf eine feste unelastische Unterlage von einer Höhe $h = 40$ m herabfällt, um wieviel Grade wird sie erwärmt? (Spezifische Wärme des Platins $w = 0{,}0324$.)

---

*) Das Gewicht eines Sauerstoffatomes $= 16$, das eines Stickstoffatomes $= 14$, das eines Wasserstoffatomes $= 1$ angenommen. Die Chemiker, welche das Äquivalentgewicht des Sauerstoffes $= 8$ und das des Wasserstoffes $= 1$ setzen (Tab. 28), nehmen Atomgewicht und Äquivalentgewicht als nicht zusammenfallend, sondern das Äquivalentgewicht des Wasserstoffes doppelt so groß an als sein Atomgewicht; sie setzen voraus, daß sich zwei Atome Wasserstoff mit einem Atom Sauerstoff zu einem Wassermolekül verbinden. Das Äquivalentgewicht findet man, wenn man das Atomgewicht durch die Wertigkeitszahl dividiert.

13. Die Schwerkraft, wie sie sich an der Oberfläche der Erde äußert, ist verschwindend klein gegen die Molekularkräfte, welche bei der Erwärmung oder Erkaltung eines Körpers thätig sind. Um dies nachzuweisen, soll die Größe der Arbeit berechnet werden, welche verrichtet wird,

a) wenn 1 kg Wasserstoff und 8 kg Sauerstoff zu Wasser verbrennen (wobei die beiderseitigen Atome einander anziehen, aufeinander stürzen und so die Moleküle des Wasserdampfes bilden);

b) wenn 9 kg Wasserdampf von 100° C. sich zu tropfbar flüssigem Wasser verdichten;

c) wenn 9 kg Wasser von 0° in Eis übergehen.

14. Wie unterscheidet sich die Fortpflanzung der Wärme durch Strahlung von der durch Leitung?

XXV. Geradlinige Fortpflanzung des Lichtes. — Sehwinkel. — Schatten. — Geschwindigkeit des Lichtes.

1. Unter welchem Sehwinkel erscheint eine Linie von 30 m Länge, deren Endpunkte gleichweit vom Auge entfernt sind, in einer senkrechten Entfernung von 18 m?

2. Der scheinbare Durchmesser des Mondes beträgt 31 Min. 3 Sek. Wie groß berechnet sich daraus sein wirklicher Durchmesser, wenn man seine Entfernung von der Erde = 51 830 geographische Meilen rechnet?

3. Für ein gewöhnliches Auge ist ein Gegenstand bei mäßiger Beleuchtung und reiner Luft unter einem Sehwinkel von 40 Sekunden noch sichtbar.

a) In welcher Entfernung wird man demnach das 6 cm im Durchmesser haltende Schwarze einer Schießscheibe noch sehen?

b) In welcher Entfernung aber einen Pfahl von 6 cm Dicke und 2 m Höhe?

4. In welcher Entfernung (x) von einem ein Meter im Durchmesser haltenden Kreise beträgt der Sehwinkel eine Sekunde?

(Leuchtende Körper auf dunklem Grunde sind unter einem Winkel von einer Sekunde noch sichtbar.)

5. Unter welchem Sehwinkel (a) erscheint ein Millimeter in der Entfernung von einem Meter?

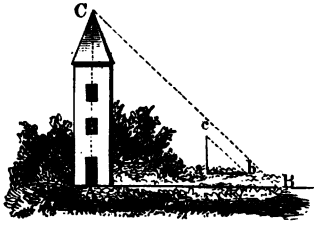
6. Es soll der geometrische Ort aller der Punkte gefunden werden, in welchen eine gegebene Strecke unter demselben Sehwinkel erscheint.

7. Wie erklärt es sich, daß uns die Sonne und der Mond bei ihrem Auf- und Untergange größer erscheinen, als wenn sie hoch am Himmel stehen, während sich doch bei genauen Messungen mit Instrumenten der scheinbare Durchmesser immer als derselbe herausstellt?

8. Wie erklärt sich der Aberglaube der Schützen, daß die Kugel vom Wasser angezogen werde?

9. Die Länge AB (Fig. 47) des Schattens eines von der Sonne beschienenen Turmes AC sei $= 10{,}4$ m, die Schattenlänge ab eines daneben stehenden Stabes ac von 2 m Höhe sei $= 0{,}5$ m; wie hoch ist der Turm?

Fig. 47.

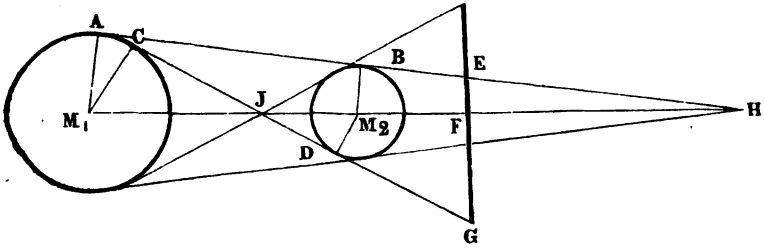


10. Wie lang ist der Schatten eines 10 m hohen Baumes, wenn die Sonne 30^0 über dem Horizont steht?

11. Wenn man durch eine Öffnung in dem Fensterladen eines dunkeln Zimmers direktes Sonnenlicht auf einen Schirm fallen läßt, so erhält man auf diesem einen hellen Kreis, der, wenn die Öffnung sehr eng ist, einem bei der Öffnung befindlichen Auge nahe unter demselben Sehwinkel erscheint wie die Sonne, nämlich unter einem Winkel von 32 Minuten. Dabei ist die Form der Öffnung gleichgültig, so daß auch, wenn diese z. B. ein Quadrat ist, ein kreisförmiges Bild auf dem Schirm entsteht. Mit Vergrößerung der Öffnung wird aber das Bild größer und zwar der Größe und Gestalt nach gleich der Öffnung vermehrt nach jeder Richtung um den Halbmesser des Kreises, der bei möglichst enger Öffnung entsteht. Es soll diese Erscheinung erklärt werden.

12. Vom Mittelpunkte M_1 (Fig. 48) einer leuchtenden Kugel, welche einen

Fig. 48.



Halbmesser von 12 cm hat, ist der Mittelpunkt M_2 einer andern dunkeln Kugel von 4 cm Halbmesser 40 cm weit entfernt. Es soll gefunden werden:

I. die Länge des Kernschattens hinter der dunkeln Kugel, vom Mittelpunkte M_2 dieser Kugel an gerechnet,

II. der Halbmesser FE eines senkrechten Durchschnittes dieses Kernschattens in einer Entfernung von 5 cm vom Mittelpunkte des dunkeln Körpers, sowie

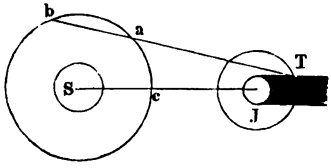
III. der Halbmesser FG des Halbschattens in demselben Durchschnitte.

13. Wenn der Halbmesser der Erde = 1, der der Sonne = 112, der Abstand der Mittelpunkte beider = 23 984, sowie der Abstand des Mondes von der Erde = 60 Erdhalbmesser gesetzt wird, wie groß berechnet sich
   I. die Länge des Kernschattens hinter der Erde;
   II. der Halbmesser eines senkrechten Durchschnittes dieses Kernschattens in einer dem Abstande des Mondes von der Erde gleichen Entfernung;
   III. der Halbmesser des Halbschattens in derselben Entfernung?

---

14. Die Erde befinde sich (Fig. 49) in Beziehung auf den Jupiter J in einer solchen Gegend a ihrer Bahn abc, daß sie sich bei ihrem Weiterrücken schon **während eines Umlaufes des ersten Jupitertrabanten** T, der ungefähr $42^1/_2$ Stunden dauert, merklich vom Jupiter entfernt. Ein Astronom beobachtet wiederholt den Austritt jenes Trabanten aus dem Jupiterschatten und findet die Umdrehungszeit desselben um 14 Sekunden länger als sie beobachtet wird, wenn sich die Erde in der geraden Linie SJ zwischen Sonne und Jupiter oder doch **nahe** in derselben befindet. Zugleich berechnet er, daß sich die Erde während jener Umdrehungszeit um 590 000 Meilen vom Jupiter entfernt hat. Wie groß ergiebt sich hieraus die Geschwindigkeit des Lichtes?

Fig. 49.

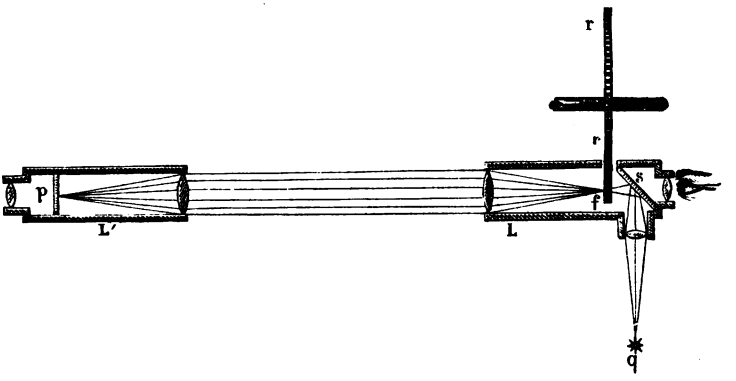


15. Wenn man einen Fixstern beobachtet, dessen Verbindungslinie mit dem Auge des Beobachters auf derjenigen Richtung senkrecht steht, nach welcher sich die Erde in ihrer Bahn bewegt, so sieht man, wie dies aus astronomischen Beobachtungen hervorgeht, den Stern in einer Richtung, welche gegen die, in welcher der Stern wirklich steht, um einen Winkel von 20,25 Sekunden nach derjenigen Seite geneigt ist, wohin sich die Erde bewegt (vergl. I, 13). Wie erklärt sich diese unter dem Namen **Aberration des Lichtes** bekannte Erscheinung und wie groß ergiebt sich daraus die Geschwindigkeit des Lichtes? (Die mittlere Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn = 4,12 Meilen gerechnet.)

16. Um die Geschwindigkeit des Lichtes auch durch terrestrische Beobachtung zu finden, wendete **Fizeau** folgendes Verfahren an: Er stellte (Fig. 50) zwei Fernrohre L und L' an den Endpunkten einer Strecke von 8633 m so auf, daß deren Objektivgläser einander zugekehrt waren und ihre Achsen in **eine** gerade Linie fielen. In dem Fernrohr L befand sich zwischen dem Okular und dem Brennpunkte f des Objektives ein gegen die Achse des Rohres um 45^0 geneigtes unbelegtes Spiegelglas s, vermittelst dessen die von einem leuchtenden Punkte q kommenden Strahlen nach ihrer Brechung in einer Linse so reflektiert wurden, daß sie genau im Brennpunkte f des Objektives sich

vereinigten, also nach ihrer Brechung im Objektiv parallel der Achse nach dem zweiten Fernrohre L' fortgingen. Genau im Brennpunkte des Objektives dieses Fernrohres war ein Spiegel p senkrecht auf der Achse befestigt, vermittelst dessen also die auf dieses Fernrohr fallenden Strahlen parallel der Achse wieder nach dem Fernrohre L zurückkehrten, so daß ein hinter dessen Okular befindliches Auge durch das unbelegte Spiegelglas s hindurch das Bild des Punktes q in f so lange sah, als die Fortpflanzung der Lichtstrahlen nicht gehindert wurde. Nun war aber neben dem Fernrohre L ein Zahnrad r mit 720 Zähnen so befestigt, daß es in eine Öffnung des Fernrohres hineinragte und bei seiner Umdrehung vermittelst seiner Zähne und Zahnlücken die Fortpflanzung der Lichtstrahlen von einem Fernrohre zum andern

Fig. 50.



abwechselnd verhinderte und wieder gestattete. — Mittels dieses Apparates wurde folgendes beobachtet: Wurde das Rad langsam gedreht, so war das Bild des Lichtpunktes p im Brennpunkte f für das hinter dem Fernrohre L befindliche Auge abwechselnd sichtbar und unsichtbar, je nachdem eine Zahnlücke oder ein Zahn vor dem Brennpunkte f vorbeiging. Bei allmählich schnellerer Umdrehung des Rades wurde das Bild in f entweder ununterbrochen oder gar nicht gesehen, und zwar trat die erste dauernde Verdunkelung ein, wenn sich das Rad 12,6 mal in der Sekunde umdrehte, während das Bild bei der doppelt so großen Umdrehungsgeschwindigkeit des Rades wieder dauernd hervortrat, bei der dreifachen Geschwindigkeit wieder verschwand, bei der vierfachen wieder dauernd hervortrat u. s. w.

Es soll erklärt werden, inwiefern man aus dieser Beobachtung schließen kann, daß das Licht zu seiner Fortpflanzung einer gewissen Zeit bedarf, und soll die daraus sich ergebende Geschwindigkeit des Lichtes berechnet werden.

XXVI. Lichtstärke und Beleuchtung. — Photometrie.

1. Die Oberflächen zweier leuchtenden Körper seien F und f, ihre bezüglichen Lichtstärken (Lichtintensität, Glanz) verhalten sich zu einander wie $L:i$; in welchem Verhältnis stehen ihre Lichtmenge (Gesamthelligkeiten) L, l?
2. Nimmt man die Lichtmenge eines leuchtenden Körpers von der Oberfläche $= 1$ und der Lichtstärke $= 1$ ebenfalls $= 1$ an, durch welche Zahl wird dann die Lichtmenge eines leuchtenden Körpers von der Oberfläche $= 3$ und der Lichtstärke $= 2$ ausgedrückt?
3. Wie verhalten sich die scheinbaren Helligkeiten*) eines und desselben leuchtenden Körpers in verschiedenen Entfernungen von demselben? Und wie die scheinbaren Lichtstärken?
4. Wenn B_1, B_2 die relativen Beleuchtungen zweier Ebenen,
   E_1, E_2 die Entfernungen dieser Ebenen von der Lichtquelle,
   L_1, L_2 die relativen Lichtmengen, die von der Lichtquelle ausgehen,
   α_1, α_2 die Winkel, unter welchen die Strahlen gegen die Ebene auffallen,

   bezeichnen, welche Relationen finden zwischen diesen Größen statt, wenn der Einfluß der Mittel, durch welche das Licht geht, unberücksichtigt bleibt?
5. Wie verhalten sich die Beleuchtungen B_1, B_2 zweier Ebenen, die von einem leuchtenden Punkte bezüglich 5 und 7 m entfernt sind und gleiche Neigung gegen die auffallenden Strahlen haben?
6. Wieviel gleiche Lichter werden eine ebene Fläche in der Entfernung von 4 m gerade so erleuchten, wie eines dieser Lichter in der Entfernung von 1 m?
7. In welcher Entfernung (x) würde ein kreisförmiger Teil der Sonnenoberfläche von 5 cm Durchmesser eine gegebene Fläche gerade so erleuchten, wie das volle Sonnenlicht? (Die Entfernung der Sonne von der Erde zu 20 Millionen, ihren Durchmesser zu 192 000 geographischen Meilen, die Meile zu 7420 m gerechnet.)

   Bemerkung. Die einer Fläche zugewendete Hälfte der Sonnenkugel beleuchtet, wie sich leicht nachweisen läßt, diese Fläche gerade so, wie eine leuchtende Kreisscheibe vom Durchmesser der Sonnenkugel, die auf der Richtung der die Fläche treffenden Strahlen senkrecht steht.

*) Von der wirklichen Helligkeit oder der gesamten Lichtmenge, die von einem leuchtenden Körper ausgeht, kann man die scheinbare Helligkeit oder die Lichtmenge, welche in unser Auge gelangt, unterscheiden. Da man aber, wie aus den beiden ersten Aufgaben hervorgeht, unter Lichtstärke die von einer Flächeneinheit ausgehende Lichtmenge versteht, so kann man auch von wirklicher und scheinbarer Lichtstärke sprechen.

8. Eine Lampe und ein Wachslicht sind 5 m voneinander entfernt und ihre Lichtmengen verhalten sich wie 6 : 1. In der Verbindungslinie beider soll ein Schirm so aufgestellt werden, daß er von beiden Flammen gleich beleuchtet wird. Welche Stellung muß der Schirm erhalten?

9. Eine Lichtquelle ist von einer Ebene 1 m, von einer andern $3\frac{1}{3}$ m entfernt; ihre Strahlen fallen parallel auf beide Ebenen und bilden mit der zweiten Ebene einen Winkel von 45°. Unter welchem Winkel muß die erste Ebene gegen die auffallenden Strahlen geneigt sein, damit die Beleuchtung beider Flächen dieselbe ist?

10. Um die Lichtmengen einer Argandschen Lampe und einer Stearinkerze miteinander zu vergleichen, wurde ein Rumfordsches Photometer angewandt und gefunden, daß die beiden Schatten des schwarzen Stabes gleich waren, wenn die Argandsche Lampe 2,5 m, die Stearinkerze 0,98 m davon entfernt waren; in welchem Verhältnis stehen die Lichtmengen L, l der beiden Lichter?

11. Bei einem Versuche mit dem Bunsenschen Photometer verschwand der Stearinfleck, sowohl wenn eine Normalkerze (Wachskerze, wovon 6 Stück auf ein Pfund gehen) 30 cm, als auch wenn eine Gasflamme 70 cm vom Papierdiaphragma entfernt war. In welchem Verhältnis stehen die Lichtmengen l, L dieser Flammen?

12. Wie verhalten sich die Leuchtkräfte*) K, k, sowie die Beleuchtungswerte W, w von Öl und Stearin bei ihrer Verwendung beziehungsweise in einer Argandschen Lampe und als Kerze, wenn sich ihre Lichtmengen wie 100 : 14,4 verhalten, und wenn man weiß, daß die Lampe in der Stunde 42 g Öl verbraucht, während in derselben Zeit 10 g Stearin verbrennen, und daß Stearin dreimal soviel kostet, als eine gleiche Gewichtsmenge Öl?

13. Das Licht einer Carcelschen Uhrlampe, einer Talg- und einer Wachskerze wurde miteinander verglichen und gefunden, daß diese Lichtquellen bezüglich 3 m, 1,2 m und 1,4 m von einer Ebene entfernt sein mußten, wenn diese gleiche Beleuchtung erhalten sollte. Wie verhalten sich die Lichtmengen L_1, L_2, L_3, die Leuchtkräfte K_1, K_2, K_3 und die Beleuchtungswerte W_1, W_2, W_3 jener drei Lichtquellen, wenn sich die Gewichtsmengen, die sie in gleicher Zeit verbrauchen, wie 40 : 10 : 9, die Preise gleicher Gewichtsmengen aber wie 1 : 1,4 : 4,6 verhalten?

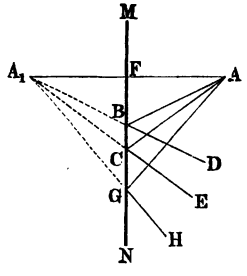
---

*) Unter dem Verhältnis der Leuchtkräfte zweier Leuchtmittel, z. B. Öl und Stearin, versteht man das Verhältnis der Lichtmengen, die sie bei gleicher Verbrauchsmenge während gleicher Zeit erzeugen, unter dem Verhältnis ihrer Beleuchtungswerte das der Lichtmengen, die sie bei gleichen Kosten in gleicher Zeit hervorbringen.

XXVII. Reflexion des Lichtes.

1. Es soll bewiesen werden, daß alle Strahlen AB, AC ... (Fig. 51), welche von einem leuchtenden Punkte A auf einen ebenen Spiegel MN fallen, in solchen Richtungen BD, CE ... reflektiert werden, als kämen sie alle direkt von einem einzigen Punkte A_1, der in der Normalen von A auf den Spiegel und zwar ebenso weit hinter dem Spiegel liegt, als der leuchtende Punkt A vor demselben.

Fig. 51.



2. Es seien auf einer Papierebene die Lage eines ebenen Spiegels, ein leuchtender Punkt und der Ort eines Auges vor demselben gegeben; man soll durch Zeichnung den Weg eines Strahles finden, der nach seiner Reflexion ins Auge gelangt*).

3. Es soll in ähnlicher Weise die Lage des Bildes einer vor einem ebenen Spiegel befindlichen geraden Linie, sowie die Richtung der Strahlen gefunden werden, die von den Endpunkten dieser Linie in ein Auge vor dem Spiegel gelangen.

4. Es soll durch Zeichnung die Lage der Bilder eines vor einem Winkelspiegel befindlichen Punktes, sowie der Gang der Lichtstrahlen nach einem Auge vor dem Spiegel gefunden werden,
   a) wenn der Winkel der beiden Spiegel 90^0,
   b) wenn er 60^0 beträgt (Kaleidoskop).

5. Wieviel Bilder entstehen von einem Gegenstande vor einem Winkelspiegel, dessen Winkel $\frac{360^0}{n}$ beträgt, wenn n eine ganze Zahl und ein Faktor von 360^0 ist, und welche Lage haben sie?

6. Man soll durch Zeichnung die Bilder eines zwischen zwei parallelen Spiegeln befindlichen Gegenstandes, sowie den Weg der ins Auge gelangenden Strahlen finden.

7. a) Wenn ein ebener Spiegel parallel seiner Lage und in einer auf seiner Ebene normalen Richtung um 15 cm fortgerückt wird; um wieviel wird dadurch das Bild eines vor dem Spiegel befindlichen Punktes in demselben Sinne fortgerückt?

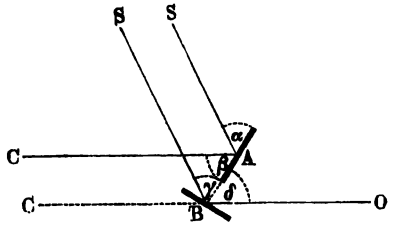
*) Unter einem in ein Auge gelangenden Lichtstrahl wird hier immer die Achse des Lichtkegels verstanden, der, vom leuchtenden Punkte ausgehend, auf die Pupille des Auges fällt.

b) Wie groß muß wenigstens ein Spiegel sein, damit sich ein dicht vor demselben befindlicher Mensch ganz darin sehen kann?

c) Durch Zeichnung zu finden, in welcher Lage horizontale Gegenstände einem unter 43° geneigten Spiegel erscheinen.

8. Wenn zwei Spiegel A und B (Fig. 52) senkrecht aufeinander stehen, so werden die von einem entfernten Lichtpunkte in der Richtung SA auf den Spiegel A fallenden Strahlen in einer Richtung AC zurückgeworfen, welche der Richtung BO, in welcher die auf den Spiegel B fallenden jenen parallelen Strahlen reflektiert werden, gerade entgegengesetzt ist. Wenn daher ein Beobachter bei O durch ein Fernrohr, vor welchem eine solche Spiegelverbindung angebracht ist, ein Bild der Sonne im Spiegel B sieht, so muß ein in der Richtung des Fernrohres befindlicher Beobachter gleichfalls ein Sonnenbild im Spiegel A sehen. Beweis?

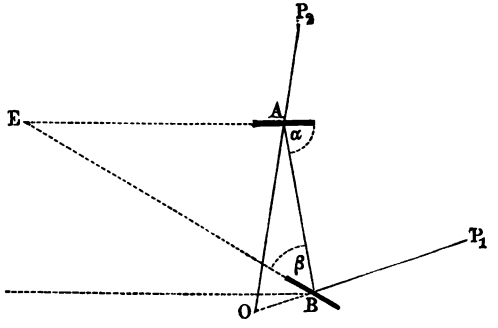
Fig. 52.



Darauf beruht der Heliotrop von Gauß, der bei geodätischen Messungen dazu dient, einen viele Meilen weit entfernten Ort durch einen Lichtpunkt zu markieren, der selbst dem unbewaffneten Auge sichtbar ist. Der Verfasser hat einst auf dem Inselsberg mittels eines solchen Instrumentes, dessen Spiegel A nur einige Quadratzolle groß war, mit einem andern Beobachter, der sich auf dem nahe 216 000 Par. Fuß entfernten Berge Knill befand und ein gleiches Instrument bei sich hatte, Stunden lang telegraphische Unterhaltung geführt, wobei die Bezeichnung der Buchstaben durch abwechselndes Bedecken des Spiegels nach ähnlichen Prinzipien erfolgte, wie bei dem damals noch nicht erfundenen Morseschen elektrischen Telegraphen.

9. Zwei Spiegel A und B (Fig. 53) stehen auf der nämlichen Ebene senkrecht. Fällt ein Lichtstrahl P_1B auf den Spiegel B und von diesem

Fig. 53.

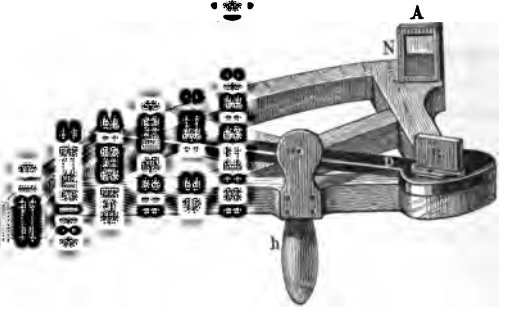


reflektiert auf den Spiegel A, so schließt der von dem letzteren reflektierte Strahl AO mit dem Strahle P_1B einen Winkel O ein, der doppelt so groß ist, als der von den beiden Spiegeln eingeschlossene Winkel E. Beweis?

[illegible] des Lichtes.

[illegible] dienende Spiegelsextant (Fig. 54). [illegible] Gestell MN stehen die Spiegel A [illegible] A ist unbelegt, man kann durch den- [illegible] Der Spiegel A steht ganz fest, der [illegible] des Gestelles senkrechte Achse drehbar. [illegible] man das Instrument so, daß durch [illegible] en unbelegten Teil von A der Punkt [illegible] ls der Schiene CD den Spiegel B

[illegible] 54.



[illegible] unktes P_1 im Spiegel A unter dem [illegible] ruktion des Instrumentes gemäß der [illegible], wenn die Schiene CD auf dem [illegible] s MN steht, so würde man den bei [illegible] gelesenen Winkel, der dem Winkel E [illegible] haben, um den Winkel P_1OP_2 zu [illegible] öhnliche wäre. Meist sind aber beim [illegible] Teilung als ganze bezeichnet, so [illegible] P_2 unmittelbar ablesen kann.

[illegible] Ebene liegende Achse, so beschreibt [illegible] es einen Bogen von doppelt soviel [illegible] en als ein Punkt des Spiegels [illegible] d. h. der Zentriwinkel des Bogens, [illegible] en das Spiegelbild beschreibt, ist [illegible] lt so groß als der Winkel, um [illegible] en sich der Spiegel dreht. Beweis?

[illegible] ne Höhe BS (Fig. 55) soll mittels [illegible] Spiegels gemessen werden.

[illegible] soll durch Zeichnung die Richtung [illegible] von einem Hohlspiegel reflek- [illegible] n Strahles dargestellt werden.

[illegible] r Hauptachse des Spiegels auffällt,

[illegible] em Spiegel zu divergiert,

[illegible] em Spiegel zu konvergiert.

13. Es soll durch Zeichnung der Vereinigungspunkt aller von einem Hohlspiegel reflektierten Strahlen gefunden werden, die von einem Punkte in der Hauptachse ausgehen und nahe derselben auffallen, wenn dieser Punkt
   a) unendlich weit, oder
   b) in endlicher Entfernung, aber weiter als der Mittelpunkt der Spiegelkrümmung vom Spiegel entfernt ist, oder
   c) wenn er gerade im Mittelpunkte der Spiegelkrümmung, oder
   d) zwischen dem Mittelpunkte der Spiegelkrümmung und dem Brennpunkte, oder
   e) im Brennpunkte, oder endlich
   f) zwischen dem Spiegel und dem Brennpunkte liegt.

14. Es soll durch Zeichnung die Lage des Vereinigungspunktes aller von einem Hohlspiegel reflektierten Strahlen gefunden werden, welche von einem Punkte ausgehen, der außerhalb der Hauptachse, aber nahe derselben liegt, und zwar
   a) wenn er weiter als der Mittelpunkt der Spiegelkrümmung vom Spiegel entfernt ist,
   b) wenn er zwischen dem Brennpunkte und dem Mittelpunkte der Spiegelkrümmung,
   c) wenn er zwischen Brennpunkt und Spiegel liegt.

15. Es seien auf einer Papierebene die Lagen eines Hohlspiegels, eines leuchtenden Punktes und eines Auges gegeben, es soll der Weg desjenigen Strahles gefunden werden, der die Achse des auf die Pupille fallenden Lichtkegels bildet.

16. Es soll durch Zeichnung die Lage des Bildes einer vor dem Hohlspiegel befindlichen geraden Linie, sowie die Richtung der beiden Strahlen gefunden werden, welche die Achsen der von den beiden Endpunkten der geraden Linie auf die Pupille eines Auges fallenden Lichtkegel bilden, wenn das Auge nach dem Spiegel gerichtet ist.

17. Bei direktem Auffallen des von einem Punkte kommenden Lichtes auf einen Hohlspiegel können zwar die Strahlen nicht nach dem Spiegel zu konvergieren, indessen kommt dieses Konvergieren der Strahlen doch z. B. bei optischen Instrumenten vor, und es möge daher der Vereinigungspunkt zweier solcher Strahlen nach ihrer Reflexion von einem Hohlspiegel gefunden werden.

18. Ähnliche Aufgaben, wie die unter 12 bis 17 lassen sich für Konvexspiegel stellen und in ähnlicher Weise lösen. Es soll sich indessen hier auf die den Aufgaben 13 und 16 entsprechenden beschränkt werden, nämlich:
   1. das Bild eines in der Hauptachse liegenden Punktes zu bestimmen,
      a) wenn dieser Punkt unendlich weit vom Spiegel entfernt ist, die Strahlen also parallel der Hauptachse auffallen,
      b) wenn der Punkt in endlicher Entfernung liegt, die Strahlen also mit der Hauptachse nach dem Spiegel zu divergieren.
   2. Das Bild einer vor dem Spiegel befindlichen geraden Linie zu bestimmen.

19. Wenn p die Brennweite eines Hohlspiegels,
a die Entfernung eines leuchtenden Punktes vom Hohlspiegel,
α die Bildweite bezeichnet,
welche Beziehung findet zwischen p, a und α statt, vorausgesetzt, daß der leuchtende Punkt in oder doch nahe der Hauptachse liegt, und die auf den Spiegel fallenden Strahlen mit der Hauptachse einen sehr kleinen Winkel schließen?

20. Es soll die Bildweite α eines leuchtenden Punktes von einem Konkavspiegel bestimmt werden, wenn 1) $a = \infty$; 2) $a > 2p$ und zwar $a = 10p$; 3) $a = 2p$; 4) $a > 2p$ und zwar $a = 1{,}25p$; 5) $a = p$; 6. $a < p$ und zwar $a = 0{,}1p$ ist?

21. Welche Bedeutung hat ein negativer Wert von a und welche Werte nimmt α an, wenn $a = -2p$ oder $= -p$, oder $= -0{,}5p$ oder $= -0{,}1p$ ist?

22. Wie ändern sich die in Aufgabe 19 für einen Hohlspiegel gefundenen Formeln für einen Konvexspiegel?

23. Es soll die Entfernung α des geometrischen Bildes eines leuchtenden Punktes von einem Konvexspiegel bestimmt werden, wenn 1) $a = \infty$; 2) $a > p$ und zwar $a = 10p$; 3) $a = p$; 4) $a < p$ und zwar $a = 0{,}1p$ ist?

24. Wie groß ist bei einem Konvexspiegel die Bildweite α, wenn a negativ ist, d. h. die Strahlen konvergierend auf den Spiegel fallen, und wenn der Absolutwert von a 1) $> p$ und zwar $= 10p$; 2) $= p$; 3) $< p$ und zwar $= 0{,}1p$ ist?

---

25. Ein Hohlspiegel hat eine Brennweite von 31,5 cm, wie weit ist das Bild eines Gegenstandes von demselben entfernt, wenn der Gegenstand selbst in einer Entfernung a) von 100 cm; b) von 200 cm; c) von 300 cm liegt?

26. Wenn die Entfernung eines Gegenstandes von einem Hohlspiegel 50 dm, die seines Bildes 2 dm beträgt; wie groß ist die Brennweite?

27. a) Man soll die lineare Größe des Bildes eines leuchtenden Gegenstandes bestimmen, der von einem Hohlspiegel von der Brennweite p eine Entfernung $= a$ hat.
b) Dieselbe Aufgabe in Beziehung auf einen Konvexspiegel von der Zerstreuungsweite p.

28. Der Halbmesser eines Hohlspiegels sei $= 6$ cm; welche Lage und Größe hat das Bild eines Gegenstandes, der a) 12 cm, b) 6 cm, c) 4 cm, d) 3 cm, e) 2 cm vom Spiegel entfernt ist?

29. Welche Lagen und Größen würden aber die Bilder desselben Gegenstandes und bei denselben Entfernungen von einem Konvexspiegel von 6 cm Halbmesser haben?

30. Man soll die Apertur oder Öffnung, d. h. den Mittelpunktswinkel eines Konkavspiegels vom Halbmesser r berechnen, bei welchem die parallel der Spiegelachse auffallenden Strahlen nach ihrer Reflexion sämtlich durch oder doch nahe durch den Brennpunkt gehen.

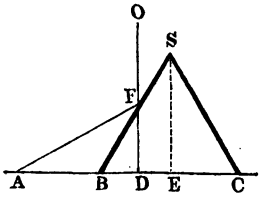
31. Einem Hohlspiegel von 3 dm Brennweite steht in einer Entfernung von 4 dm ein kleiner Planspiegel so gegenüber, daß die Achse des Hohlspiegels durch seine Mitte geht und mit seiner Ebene einen Neigungswinkel von 45° bildet. Wo liegt das von beiden Spiegeln reflektierte Bild eines leuchtenden Punktes, der 8 dm weit vom Hohlspiegel in der Achse desselben sich befindet?

32. Läßt man auf einen Hohlspiegel direktes Sonnenlicht fallen, so entsteht in der Brennweite ein kreisrundes Sonnenbild und die Verdichtung der Strahlen erzeugt dort eine sehr hohe Temperatur. Es soll berechnet werden:

a) wie groß der Halbmesser dieses Sonnenbildes ist, wenn man den scheinbaren Halbmesser der Sonne, wie er vom Krümmungsmittelpunkte des Spiegels aus erblickt wird, zu 16 Minuten annimmt, und die Brennweite des Spiegels = 4 dm ist?

b) wie groß ist die Verdichtung der Sonnenstrahlen im Sonnenbilde?

33. Fig. 56.



Ein Kegelspiegel BSC (Fig. 56), dessen Seiten SB und SC einen Winkel von 60° einschließen, steht auf einer Ebene AC; es soll die Lage eines Punktes A in dieser Ebene bestimmt werden, der von einem über dem Kegelspiegel befindlichen Auge O in der Richtung OD gesehen wird*). (Verfahren zum Zeichnen katoptrischer Anamorphosen.)

XXVIII. Brechung des Lichtes.

Brechung des Lichtes im allgemeinen.

1. a) Wie groß ist das Brechungsverhältnis für einen Lichtstrahl, der aus Luft in Wasser geht, wenn man durch Messung gefunden hat, daß für einen Einfallswinkel von 30° der Brechungswinkel = 22° ist?

*) Es wird dabei vorausgesetzt, das Auge befinde sich über der Spitze S des Kegels und soweit von S entfernt, daß die Richtung von OD parallel der Kegelachse SE betrachtet werden kann.

b) Wie groß berechnet sich das Brechungsverhältnis für einen Strahl, der aus Luft in Glas geht, wenn für einen Einfallswinkel von 24° der Brechungswinkel = 15°45′ gefunden worden ist?

2. a) Wie groß ist der Brechungswinkel β für einen Strahl, der unter einem Einfallswinkel von 60° aus Luft in Wasser übergeht?

b) Wie groß ist der Brechungswinkel β für einen Strahl, der aus Wasser in Luft unter einem Einfallswinkel von 11°15′ übergeht?

3. Es soll durch Zeichnung die Richtung des gebrochenen Strahles gefunden werden, wenn die Richtung des einfallenden Strahles, sowie das Brechungsverhältnis gegeben ist.

4. Warum erscheint ein Punkt auf dem Boden eines Gefäßes von seiner Stelle gerückt und gehoben, wenn bei unveränderter Lage des Auges Wasser in das Gefäß geschüttet wird?

5. Es soll bewiesen werden, daß der Boden eines Wasserbehälters (Flusses ꝛc.) um $^1/_3$ tiefer unter dem Wasserspiegel liegt, als er unter ihm zu liegen scheint.

6. a) Warum erscheint ein in Wasser getauchter Stab gebrochen?

b) Warum erscheinen die Gegenstände unter Wasser größer als außerhalb desselben?

7. Man sieht oft, besonders an recht heißen Tagen, die Spitzen ferner Gegenstände lebhaft zittern. Worauf beruht dieses?

8. Wie erklärt sich das Funkeln der Sterne? und warum bemerken wir es stärker an den Fixsternen als an den Planeten?

9. Wenn man Papier mit Öl tränkt, so wird es durchsichtiger. Wie erklärt man dies, da doch die Luft, die vorher die Poren des Papiers einnahm, für sich durchsichtiger ist als Öl?

10. Warum erscheinen in der Regel ferne Gegenstände deutlicher kurz vor und nach einem Regen?

---

11. Was versteht man unter astronomischer und was unter terrestrischer Refraktion oder Strahlenbrechung?

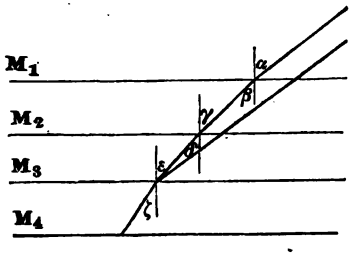
12. Wie erklärt sich a) die etwas abgeplattete Gestalt, unter welcher die Sonne und der Mond bei ihrem Auf- und Untergange erscheinen? b) die bei Mondfinsternissen zuweilen vorkommende Erscheinung, daß Sonne und Mond zugleich über dem Horizont gesehen werden, während sie doch einander diametral gegenüber, d. h. mit der Erde in gerader Linie stehen müssen, damit der Schatten der Erde den Mond treffen kann?

13. Ein Lichtstrahl, der (Fig. 57) durch mehrere Mittel M_1, M_2, M_3, M_4... mit parallelen Grenzflächen geht, hat im letzten Mittel M_4 die nämliche Richtung, welche er haben würde, wenn er unmittelbar aus dem ersten Mittel M_1 auf die Grenzfläche des letzten fiele. Es soll dieser Satz aus der Wellentheorie des Lichtes, wonach der Quotient aus den Fortpflanzungsgeschwindig-

keiten des Lichtes in zwei anstoßenden Mitteln den Brechungsquotienten bezüglich dieser Mittel darstellt, abgeleitet werden.

14. Vermöge der astronomischen Strahlenbrechung ist die wahre Zenithdistanz z eines Himmelskörpers, wenn sie nicht $= 0$ ist, größer als die scheinbare z_1, oder die Richtung nach dem Zenith eines Beobachters schließt mit der Richtung seines Auges nach dem scheinbaren Orte des Himmelskörpers einen kleineren Winkel ein, als mit der Richtung nach dem wirklichen Orte desselben. Welche einfache Gleichung zwischen z und z_1 ergiebt sich aus der vorigen Aufgabe unter der Annahme, daß die Erdatmosphäre aus Luftschichten mit parallelen Grenzflächen bestehe, deren Dichte zwar von unten nach oben abnehme, in jeder einzelnen Schicht aber eine gleichmäßige sei?

Fig. 57.



---

15. a) Wie groß ist der Grenzwinkel φ des aus Luft in Wasser gebrochenen Strahles, d. h. welche Größe kann der Brechungswinkel höchstens erreichen?

b) Wie groß ist der Grenzwinkel φ des gebrochenen Strahles beim Übergange aus Luft in Glas?

16. Kann nach den Brechungsgesetzen für jede beliebige Größe des Einfallswinkels eines Lichtstrahles ein Übergang desselben aus Glas in Luft oder aus Wasser in Luft stattfinden? Und welches sind die Grenzen der Einfallswinkel, bei deren Überschreitung die Brechung in eine Reflexion übergeht?

17. Ein in einem stillstehenden Wasser befindliches Auge, z. B. das eines Fisches, sieht die außerhalb des Wassers befindlichen Gegenstände nur gleichsam durch eine kreisförmige Öffnung, indem alle äußeren Gegenstände bis zum Horizont herab nur in diesem Raume sichtbar werden, die nahe am Horizont befindlichen allerdings sehr verzerrt und zusammengezogen. Jenseits der Grenzen dieses Kreises ist der Grund des Wassers durch Zurückwerfung sichtbar, und zwar so lebhaft, als bei unmittelbarer Betrachtung. Es soll diese Erscheinung erklärt und zugleich die Größe des Sehwinkels angegeben werden, unter welchem der Durchmesser jenes Kreises erscheint.

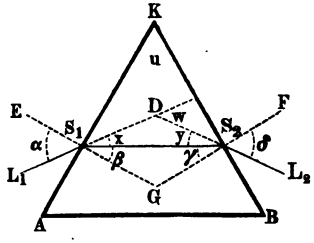
18. Während durch die atmosphärische Lichtbrechung ferne irdische Gegenstände oft über ihre wirkliche Lage gehoben erscheinen (vergl. 11), wird manchmal vermöge der Luftspiegelung zugleich mit einem direkt gesehenen Gegenstande auch ein tiefer liegendes umgekehrtes Bild desselben gesehen. Wie erklärt sich diese Erscheinung?

Brechung des Lichtes durch Prismen.

19. Es soll durch Zeichnung der Weg eines durch ein Glasprisma gehenden Lichtstrahles gefunden werden,
   a) wenn der brechende Winkel des Prismas kleiner ist als 83° 36′;
   b) wenn er gleich oder größer ist als 83° 36′.

20. Der brechende Winkel eines Glasprismas (Fig. 58) sei = 60°. In der Ebene eines auf seiner Kante senkrechten Schnittes falle ein Lichtstrahl auf dasselbe, der mit seinem Einfallslot einen Winkel von 50° bildet. Unter welchem Winkel wird dieser Strahl aus dem Prisma treten?

Fig. 58.



21. Unter welchem Winkel muß ein Lichtstrahl auf dieses Prisma fallen, damit er dasselbe parallel seiner Basis durchlaufe?

22. Welchen Weg nimmt ein Lichtstrahl, der senkrecht auf die eine Seite eines rechtwinkeligen Glasprismas fällt?

23. Die allgemeinere Lösung der Aufgabe 20 kann auch durch die Formel:

$$\sin \delta = n \,.\, \sin u \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n_2}} - \cos u \,.\, \sin \alpha$$

$$= \sin u \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \cos u \,.\, \sin \alpha$$

geschehen, worin (Fig. 58) u den brechenden Winkel des Prismas, α den Einfallswinkel des Lichtstrahles beim Eintritt ins Prisma, δ den Brechungswinkel nach dem Austritt aus demselben und n das Brechungsverhältnis bezeichnet. Es soll die Richtigkeit der Formel dargethan werden.

24. Wie groß berechnet sich unter den in Aufgabe 20 beschriebenen Verhältnissen der Ablenkungswinkel, d. h. der Winkel w, welchen der ausfahrende Strahl mit dem einfallenden einschließt?

25. Wie groß berechnet sich der kleinste Ablenkungswinkel eines Glasprismas, dessen brechender Winkel = 60° ist?

26. Durch Messungen hat man den brechenden Winkel eines Prismas von kieselsaurem Bleioxyd = 21° 12′, sowie den kleinsten Ablenkungswinkel desselben für einen Strahl von rotem Lichte = 24° 46′ gefunden; wie groß ist das Brechungsverhältnis μ für diesen Strahl?
   (Eine andere Methode, das Brechungsverhältnis eines Mittels zu finden, siehe in Aufgabe 61.)

27. Die in Tabelle 21 des Anhanges aufgeführten Zahlen geben die absoluten Brechungsverhältnisse der Mittel an, d. h. die Brechungsverhältnisse für Lichtstrahlen, welche aus dem leeren Raume in die betreffenden Mittel

übergehen. Wie groß berechnet sich daraus das relative Brechungsverhältnis n für einen Lichtstrahl, der aus Wasser in Crownglas (Spiegelglas) übergeht?

Brechung des Lichtes durch Linsengläser.

28. Es sei auf einer Papierebene der Durchschnitt einer dicken Bikonvexlinse von ungleichen Krümmungshalbmessern gegeben; es soll der Weg eines durch dieselbe gehenden Lichtstrahles gezeichnet werden.

29. Es sei der Durchschnitt einer Bikonvexlinse von gleichen Krümmungshalbmessern und sehr geringer Dicke gegeben; man soll den Vereinigungspunkt aller derjenigen Strahlen durch Zeichnung finden, welche parallel mit der Hauptachse und nahe derselben auf die Linse fallen. (Brechungsquotient $= 3/2$.)

30. Bei einer bikonvexen Linse von gleichen Krümmungshalbmessern und sehr geringer Dicke soll durch Zeichnung der Weg eines Strahles gefunden werden,
   a) der in die Richtung der Hauptachse fällt;
   b) der, mit der Hauptachse konvergierend, durch den optischen Mittelpunkt (hier die Mitte) der Linse geht*);
   c) der mit der Hauptachse parallel ist;
   d) der mit der Hauptachse divergierend auffällt;
   e) der mit ihr konvergierend auffällt, ohne durch den optischen Mittelpunkt zu gehen.

31. Man soll für die vorige Linse die Lage des Bildes eines leuchtenden Punktes bestimmen, der in der Hauptachse liegt, aber
   a) weiter als die Brennweite von der Linse entfernt ist;
   b) innerhalb der Brennweite sich befindet.

32. Man soll für die vorige Linse die Lage des Bildes eines leuchtenden Punktes finden, der außerhalb der Hauptachse, aber nahe derselben liegt,
   a) wenn er weiter als die Brennweite von der Linse entfernt ist;
   b) wenn er sich innerhalb der Brennweite befindet.

33. Es soll die Lage des Bildes einer leuchtenden geraden Linie für dieselbe Linse und dieselben beiden Fälle durch Zeichnung gefunden werden.

34. Es sei der Durchschnitt einer Bikonkavlinse von gleichen Krümmungshalbmessern und sehr geringer Dicke gegeben; man soll den Zerstreuungspunkt aller derjenigen Strahlen durch Zeichnung finden, welche parallel mit der Hauptachse auf die Linse fallen.

35. Bei einer ähnlichen Linse, wie die vorige, soll durch Zeichnung der Weg eines Strahles gefunden werden,
   a) der mit der Hauptachse divergierend auffällt;
   b) der mit der Hauptachse konvergierend auffällt.

---

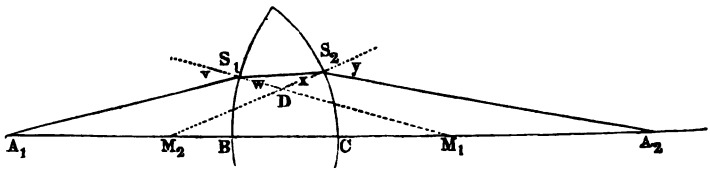
*) Hier und im folgenden ist immer vorausgesetzt, daß der Strahl mit der Linsenachse einen kleinen Winkel einschließt und nahe der Mitte der Linse auf diese fällt.

36. Es soll für dieselbe Linse, wie die vorige, die Lage des Bildes einer leuchtenden geraden Linie durch Zeichnung gefunden werden,
a) wenn die Linie außerhalb der Zerstreuungsweite,
b) wenn sie innerhalb derselben liegt.

---

37. Bezeichnen r, $\mathfrak{r}$ die Krümmungshalbmesser einer Konvexlinse $B\,C$ (Fig. 59), n das Brechungsverhältnis aus der Luft in die Materie der Linse, a die

Fig. 59.



Entfernung des leuchtenden Punktes A_1 von der Linse, α die Entfernung seines Bildes A_2 von der Linse; welche Beziehung findet unter der Voraussetzung, daß die Dicke der Linse vernachlässigt werden kann, und daß die Einfallswinkel der Lichtstrahlen nur klein sind, zwischen diesen Größen statt?

38. Die in voriger Aufgabe gefundene Gleichung

$$(n-1)\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{\mathfrak{r}}\right)=\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \text{I.}$$

geht für den besondern Fall, daß $a=\infty$ ist, also α den Wert der Brennweite, welchen wir durch p bezeichnen wollen, erhält, in die folgende über:

$$(n-1)\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{\mathfrak{r}}\right)=\frac{1}{p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{II.}$$

Es soll nun die Brennweite p der verschiedenen Arten von Konvexlinsen aus den Radien r und $\mathfrak{r}$ und dem Brechungsverhältnis n bestimmt werden, sowohl allgemein, als auch in besonderer Beziehung auf Linsen von Glas, für welche $n=3/2$ ist.

39. Aus den beiden Formeln der vorigen Aufgabe ergiebt sich eine einfache Relation zwischen der Entfernung des leuchtenden Punktes, der Bildweite und der Brennweite, nämlich

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{p}, \text{ oder } \alpha=\frac{ap}{a-p},$$

wobei zu bemerken ist, daß bei der Ableitung dieser Gleichung a und α als auf verschiedenen Seiten der Konvexlinse liegend angenommen wurden. Welcher Wert ergiebt sich daraus bei konstant bleibendem Werte von p für die Bildweite α, wenn 1) $a=\infty$, 2) wenn $a>p$, 3) wenn $a=2p$, 4) wenn

$a = p$, 5) wenn $a < p$, 6) wenn a negativ ist, d. h. wenn die Strahlen konvergierend auffallen?

40. Die Krümmungshalbmesser einer Bikonvexlinse von Glas seien 6 cm und 8 cm; wie groß ist ihre Brennweite? ($n = 1{,}5$.)

41. Die Brennweite einer Bikonvexlinse von Glas sei = 12 cm, der Halbmesser der einen Fläche = 9 cm; wie groß ist der Halbmesser der zweiten?

42. Der Halbmesser einer Plankonvexlinse von Glas sei 24 cm; wie groß ist ihre Brennweite?

43. Die Entfernung eines leuchtenden Punktes von einer Konvexlinse sei = 450 cm, die Bildweite = 24 cm; wie groß ist die Brennweite des Glases?

44. Eine gleichgekrümmte Bikonvexlinse (Brechungszahl 1,563) liefert von einem 25 cm entfernten Gegenstande ein 2 m entferntes Bild; wie groß ist der Krümmungsradius und wie hoch ist das Bild, wenn der Gegenstand 6 cm hoch ist?

45. Wird der Gegenstand bei der vorigen Linse in die Entfernung von 10 cm gerückt, so entsteht ein scheinbares Bild; welche Entfernung von der Linse und welche Höhe hat es? (Höhe des Gegenstandes 6 cm wie vorhin.)

46. Eine Konvexlinse hat eine Brennweite von 60 cm; es sollen die Bildweiten von Gegenständen berechnet werden, welche a) 100 cm; b) 150 cm; c) 200 cm; d) 236,5 cm von der Linse entfernt sind.

47. Es soll der Vereinigungspunkt der konvergierend auf dieselbe Linse fallenden Strahlen gefunden werden, von denen man weiß, daß sie, einfach verlängert, 20 cm hinter der Linse sich schneiden würden.

48. Man soll die Vergrößerung oder Verkleinerung eines Gegenstandes durch eine Konvexlinse finden, wenn die Brennweite der Linse = p und die Entfernung des Gegenstandes von ihr = a gegeben ist.

49 a. Eine Konvexlinse hat eine Brennweite von 3,6 dm, und vor ihr befindet sich ein Gegenstand in einer Entfernung von 1,44 m; wievielmal ist das Bild hinter dem Glase verkleinert?

49 b. Wie groß ist hinter einer Konvexlinse von 4 dm Brennweite das Bild einer 4 cm hohen Lichtflamme, die sich 24 dm vor der Linse befindet?

49 c. Wie groß ist aber hinter derselben Linse das Bild der nämlichen Lichtflamme, wenn sie sich nur 2,4 dm vor der Linse befindet?

50. Wie groß ist das Bild der Sonne im Fokus einer Konvexlinse von 30 cm Brennweite, den scheinbaren mittleren Durchmesser der Sonne = 32 Minuten gerechnet?

51. Wenn hinter derselben Linse das Bild fünfmal so groß als der Gegenstand sein soll, wie weit muß der Gegenstand vor der Linse von dieser entfernt sein?

52. Wie weit muß aber der Gegenstand von der Linse entfernt sein, damit ein fünfmal größeres virtuelles (geometrisches) Bild desselben entsteht?

53. Wie groß muß die Brennweite einer Konvexlinse sein, damit ein 3 dm von ihr entfernter Gegenstand, durch sie hindurchgesehen, viermal vergrößert erscheine?

54. Wenn man durch eine Linse von 2 cm Brennweite einen 1,8 cm von dieser entfernten Gegenstand betrachtet, wievielmal erscheint er vergrößert?

---

55. Welche Änderungen braucht man nur mit den in Aufgabe 38 gefundenen Ausdrücken für die Brennweiten vorzunehmen, damit sie die Zerstreuungsweiten der Konkavlinsen angeben, sowohl allgemein, als auch in besonderer Beziehung auf Linsen von Glas, für welche $n = \frac{3}{2}$ ist?

56. Welcher Änderung bedarf es nur, um die Gleichung, welche für eine Konvexlinse die Beziehungen zwischen der Entfernung des leuchtenden Punktes (a), der Bildweite (α) und der Brennweite (p) ausdrückt, nämlich

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{p}, \text{ oder } \alpha = \frac{ap}{a-p},$$

für Konkavlinsen geltend zu machen? Und welcher Wert ergiebt sich daraus bei konstant bleibendem Wert von p für die Bildweite α, 1) wenn $a = \infty$, 2) wenn a positiv und zwar größer, gleich oder kleiner ist als p, 3) wenn a negativ ist (d. h. wenn die Strahlen konvergierend auffallen), und a größer, gleich oder kleiner als p ist?

57. Die Zerstreuungsweite einer Hohllinse sei = 10 cm. Wenn man einen Gegenstand in 30 cm Entfernung durch dieselbe betrachtet, wie weit erscheint er entfernt und wievielmal verkleinert?

---

58. Wie bestimmt man die Brennweite einer Konvexlinse? Und wie die Zerstreuungsweite einer Konkavlinse?

59. Man soll für die in optischen Instrumenten oft gebrauchte Plankonvexlinse die Grenze finden, welche der Durchmesser der Öffnung nicht überschreiten darf, wenn parallel auffallende Strahlen im Brennpunkte der Linse sich vereinigen sollen, also keine sphärische Aberration stattfinden soll?

60. Wenn man auf eine bikonvexe Glaslinse sieht, vor welcher und hinter welcher ein leuchtender Gegenstand sich befindet, so sieht man bei angemessener Entfernung des Auges von der Linse in der Regel drei Bilder, nämlich: 1) zwischen dem Auge und der Linse ein umgekehrtes Bild des jenseits der Linse befindlichen Gegenstandes; 2) jenseits der Linse ein aufrechtes Bild des zwischen der Linse und dem Auge befindlichen Gegenstandes, und 3) zwischen Auge und Linse auch ein umgekehrtes Bild des letzteren Gegenstandes. Es soll die Entstehung dieser Bilder erklärt werden.

61. Um das Brechungsverhältnis einer Glassorte zu bestimmen*), hat man mittels einer Schleifschale von 16 cm Krümmungshalbmesser eine Plan-

*) Genauer ist die Methode der Aufgabe 26.

konvexlinse daraus geschliffen und alsdann nach einer der Methoden der vorhergehenden Aufgabe 60 ihre Brennweite = 31 cm gefunden. Wie groß ergiebt sich daraus das Brechungsverhältnis n jener Glassorte?

62. Die Formel $\frac{r}{r} = \frac{4 + n - 2n^2}{2n^2 + n}$ giebt das Verhältnis der Krümmungshalbmesser einer Linse von bester Form an, d. h. einer Linse, bei welcher die Abweichung wegen der Kugelgestalt der Linsenflächen für parallele Strahlen am kleinsten ist, vorausgesetzt, daß r den Halbmesser der vorderen, den einfallenden Lichtstrahlen zugewendeten, r den der hinteren Linsenfläche und n das Brechungsverhältnis des Stoffes der Linse bezeichnet. Welche Halbmesser müssen die beiden Flächen einer Glaslinse von bester Form erhalten, wenn dieselbe eine Brennweite von $p = 36$ cm haben soll und $n = 1{,}5$ ist?

XXIX. Zerlegung des Lichtes.

Zerlegung des Lichtes durch Prismen. — Farben.

1. Wenn man durch ein Glasprisma sieht, dessen brechende Kante horizontal und nach unten gekehrt ist, wie erscheint dann a) ein weißer Punkt, b) eine feine weiße Linie, die mit der Kante des Prismas parallel ist, c) eine feine weiße Linie, die auf der Kantenrichtung des Prismas normal steht, — auf schwarzem Grunde, und wie d) eine schwarze der Kante des Prismas parallele Linie auf weißem Grunde?

2. Welche Erscheinungen gewahrt man durch ein ebenso gehaltenes Prisma
   a) an einem weißen Rechteck auf schwarzem Grunde,
   b) an einem schwarzen Rechteck auf weißem Grunde,
   wenn in beiden Fällen zwei Rechteckseiten der Kante des Prismas parallel sind?

3. Wenn man ein dünnes Bündel Sonnenlicht auf ein gleichseitiges Prisma (Fig. 60 a. f. S.) fallen läßt in einer solchen Richtung AB, daß der eindringende Strahl mit der Basis des Prismas parallel ist, und auf einen Punkt, der von der Kante um $^1/_3$ der Breite einer Seitenfläche entfernt ist, so treten aus jeder Fläche des Prismas zwei Lichtbüschel heraus, ein weißes und ein die Spektralfarben zeigendes. Wie erklärt sich dies?

4. Man soll die Brennweiten der den Fraunhoferschen Linien B, E und H entsprechenden Strahlen berechnen:
   a) für eine bikonvexe Linse aus Crownglas von gleichen Krümmungshalbmessern (r),

…s Lichtes.

…deren Brechungsverhältnisse die in

…n oder Ergänzungsfarben? Welche
…on Orange, welche von Gelb?
…iger und wie die Färbung undurch-

…m reflektierten Lichte gelbrot, im
…r grün erscheint, — b) daß ein
…und ein grünes Glas von gewisser
…nsität der Färbung einzeln völlig
…sichtig, aufeinander gelegt aber un-
…sichtig sind?

…Warum erscheint die Sonne beim
…und Untergange in rotgelber Farbe?
…wie erklären sich die Morgen- und
…pröte, sowie die Farbe des wolken-
…Himmels?

…Warum erscheint in der Dämme-
…das Rot dunkler als das Blau,
…auf Gemälden, während bei der
…eshelle das Umgekehrte stattfindet?

…Läßt man vom Monde und einer
…nenflamme die nämliche weiße Fläche
…ten eines Fingers von beiden einen
…s Mondlichtes entstandene Schatten
…nzenlichtes entstandene b l a u. Von
…ondes und das der Flamme?

…er Lichtstrahl auf ein Prisma mit
…damit das rote Licht (Brechungs-
…Prismenfläche austrete. Welchen
…(Brechungsquotient 1,547) mit der
…ie Ablenkungswinkel für das rote

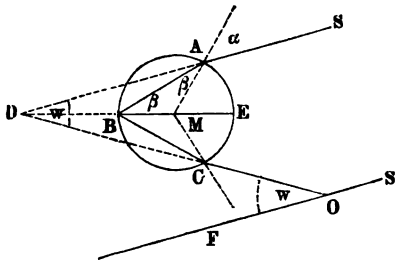
…und des violetten Lichtes, wenn ein
…das Prisma einen brechenden Winkel
…ten für Rot und Violett 1,6 bezw.

…n.

…einen Regentropfen dar und SA
…trahl. Dieser Strahl wird bei A
…u gebrochen, und der letztere verläßt
…n Teil wird er nach BC zu reflek-
…und Brechung stattfindet, so daß

offenbar nur ein geringer Teil des bei A auffallenden Lichtes den Tropfen in der Richtung CO verläßt und daher einem bei O befindlichen Auge nur einen sehr schwachen oder gar keinen Lichteindruck mitteilt. Selbst ein Bündel paralleler Strahlen, die in A und seiner Nähe auffallen, werden nur unter günstigen Umständen einen Lichteindruck erzeugen können, weil die Elementarstrahlen, woraus er besteht, den Regentropfen meist in zu großer Divergenz verlassen. Um nun diese günstigen Umstände kennen zu lernen, sollen zuerst die Beziehungen aufgesucht werden, welche zwischen dem Einfallswinkel α und dem Ablenkungswinkel w, den der einfallende Strahl SA und der austretende CO einschließen, bestehen.

Fig. 61.



14. Aus der in voriger Aufgabe gefundenen Relation $w = 4\beta - 2\alpha$, sowie aus $\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{n}$ (Fig. 61), wo $n = \frac{108}{81}$, sollen für alle zwischen 0^0 und 90^0 liegenden Werte des Einfallswinkels α (von 10 zu 10^0) die zugehörigen Ablenkungswinkel (w) berechnet werden.

15. Aus den in voriger Aufgabe berechneten Werten der Ablenkungswinkel (w) ersieht man:

a) daß unter allen Einfallswinkeln eines Sonnenstrahles auf einen Regentropfen (Fig. 61) dem von $59^0 23'$ der größte Ablenkungswinkel, nämlich $42^0 2'$, entspricht, und

b) daß bei gleichmäßigem Wachsen der Einfallswinkel die Ablenkungswinkel von 0^0 an bis zu $42^0 2'$ nach und nach immer um weniger zunehmen, von da an aber immer stärker wieder abnehmen;

c) daß also diejenigen Strahlen, welche unter Einfallswinkeln von $59^0 23'$ auffallen, also den Tropfen unter Ablenkungswinkeln von $42^0 2'$ wieder verlassen, in nahe parallelen Richtungen aus dem Tropfen ausfahren, also die günstigsten sind, um in einem in dieser Richtung befindlichen Auge einen merklichen Lichteindruck zu erzeugen (während die unter anderen Winkeln auffallenden Strahlen, der großen Divergenz wegen, mit der sie austreten, dies weniger oder gar nicht vermögen) *).

Welche Erscheinung wird sich hiernach einem Auge darbieten, das vor sich eine Regenwand und hinter sich einen mit großer Intensität leuchtenden, weit entfernten Punkt hat?

16. Welche Erscheinung wird aber das Auge gewahren, wenn an die Stelle des leuchtenden Punktes in voriger Aufgabe die Sonnenscheibe mit ihrem scheinbaren Halbmesser von $16'$ tritt?

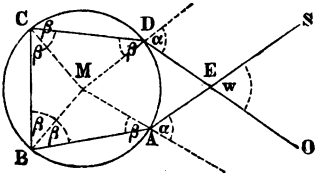
*) Die unmittelbare Bestimmung des Winkels α durch Rechnung siehe Lehrbuch §. 170.

17. Im vorhergehenden wurde auf die Farbenzerstreuung durch die Regentropfen keine Rücksicht genommen, oder richtiger ausgedrückt, mit Annahme des Brechungsverhältnisses $\frac{108}{81}$ in Aufgabe 15 wurde nur rotes Licht vorausgesetzt. Da aber ein weißer Lichtstrahl sowohl beim Eindringen in den Regentropfen als beim Austreten aus demselben eine Farbenzerstreuung erleidet, also für ein Auge, das sich zwischen einem Lichtpunkte und einer Regenwand befindet, in dieser letzteren konzentrisch mit dem nach voriger Aufgabe entstehenden roten Lichtbogen noch ein oranger, gelber, grüner, blauer und violetter sichtbar werden muß, so fragt sich: unter welchem Halbmesser erscheint der violette Lichtbogen, das Brechungsverhältnis für violettes Licht aus Luft in Wasser $= \frac{109}{81}$ gesetzt? Und welche Breite müßte also der von einem einzigen Lichtpunkte herrührende Regenbogen haben?

18. Welche Breite hat demnach der von der Sonne herrührende Hauptregenbogen? Wie liegen seine Farben? Welche Höhe kann er erreichen?

19. Außer dem im vorigen besprochenen Hauptregenbogen sieht man häufig noch einen zweiten größeren, mit jenem konzentrischen. Die Ordnung der Farben ist bei ihm umgekehrt, wie bei jenem, er ist nämlich innen rot, außen violett. Seine Entstehung läßt sich durch das Auffallen der Sonnenstrahlen auf den unteren Teil der Regentropfen und zweimalige Reflexion in denselben erklären (Fig. 62).

Fig. 62.



Zu diesem Zwecke sollen zunächst wieder die Beziehungen zwischen dem Ablenkungswinkel $SEO = w$ und dem Einfallswinkel α aufgesucht werden.

20. Wie groß ist der Halbmesser des zweiten Regenbogens und zwar für das rote und für das violette Licht? Wie groß ist also die Breite des zweiten Regenbogens? Wie weit sind die beiden Regenbogen voneinander entfernt? Warum erscheint der zweite lichtschwächer als der Hauptregenbogen?

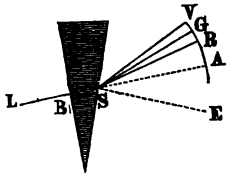
Achromatische Prismen und Linsen. Doppelprismen mit gerader Durchsicht.

21. Wie groß ist die Farbenzerstreuung oder der Zerstreuungswinkel RSV (Fig. 63) eines unter einem kleinen Einfallswinkel α (dem Scheitelwinkel von ESA) aus Glas in Luft übergehenden Lichtstrahles BS und wie groß die Ablenkung oder der Ablenkungswinkel ASG des mittleren oder grünen Strahles, wenn der Brechungsquotient

des der Linie B des Spektrums entsprechenden roten Strahles $= n_r$
„ „ „ E „ „ „ grünen „ $= n$
„ „ „ H „ „ „ violetten „ $= n_v$ ist?

22. Wie groß sind aber von einem durch ein Glasprisma (Fig. 63) gehenden Lichtstrahl die Farbenzerstreuung und die Ablenkung des mittleren oder grünen Strahles, wenn der brechende Winkel u des Prismas klein ist, die Brechungsquotienten dieselben sind, wie in voriger Aufgabe, und der Lichtstrahl LB senkrecht oder doch unter sehr kleinem Einfallswinkel in das Prisma tritt?

Fig. 63.



23. Ein weißer Lichtstrahl falle unter kleinem Einfallswinkel auf ein Glasprisma von kleinem brechenden Winkel u und mit den Brechungsquotienten der Aufgabe 21. Wie groß sind die Ablenkungen des roten und des violetten Strahles?

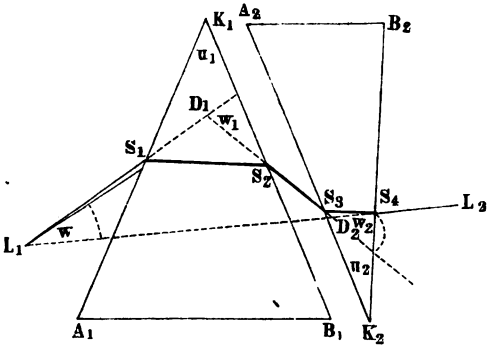
24. Wie groß sind die Ablenkungswinkel w_r, w und w_v der roten, mittleren und violetten Strahlen eines weißen Lichtbündels, das unter kleinem Einfallswinkel auf ein Doppelprisma (Fig. 64) mit den kleinen brechenden Winkeln u_1 und u_2 fällt, wenn die bezüglichen Brechungsquotienten

des einen Prismas mit n_{1r}, n_1, n_{1v},
„ andern „ „ n_{2r}, n_2, n_{2v}

bezeichnet werden? *)

25. In welchem Verhältnisse müssen die brechenden Winkel u_1 und u_2 zweier Glasprismen von den in voriger Aufgabe angegebenen Brechungsquotienten stehen, damit von einem unter kleinem Einfallswinkel eintretenden weißen Lichtstrahl der mittlere oder grüne Strahl ungebrochen austrete, d. h. seine Ablenkung $= 0$ sei?

Fig. 64.



26. In welchem Verhältnis müssen dagegen die brechenden Winkel u_1 und u_2 der beiden Glasprismen der Aufgabe 24 stehen, damit von einem unter kleinem Einfallswinkel eintretenden weißen Lichtstrahl $L_1 S_1$ die durch das erste Prisma zerstreut ausfahrenden roten und violetten Strahlen in gleicher (paralleler) Richtung aus dem zweiten Prisma treten und so den nahezu weißen Lichtstrahl $S_1 L_2$ bilden, oder, wie man dies kürzer auszudrücken pflegt: damit der rote und der violette Strahl zusammenfallen?

*) Für die hier gemachten Annahmen sind die brechenden Winkel und der Einfallswinkel viel zu groß in Fig. 64 gezeichnet, diese sollte nur im allgemeinen den Gang eines Lichtstrahles in einem Doppelprisma andeuten.

27. Man hat (Fig. 64) ein Crownglas- (Spiegelglas-) Prisma, dessen brechender Winkel $u_1 = 25^0$ und dessen Brechungsquotienten

für den Streifen B im Farbenspektrum . . . $n_{1r} = 1{,}5258$
„ „ „ E „ „ . . . $n_1 = 1{,}5330$
„ „ „ H „ „ . . . $n_{1v} = 1{,}5466$

sind. Wie groß muß man den brechenden Winkel u_2 eines Flintglasprismas nehmen, dessen Brechungsquotienten

für B . . . $n_{2r} = 1{,}6277$
„ E . . . $n_2 = 1{,}6420$
„ H . . . $n_{2v} = 1{,}6711$

sind, damit der rote Strahl mit dem violetten zusammenfalle, der Lichtstrahl also möglichst farblos austrete?

Und wie groß ist im letzteren Falle die Ablenkung w des mittleren Strahles?

28. Eine Verbindung zweier Prismen, wie die der vorigen Aufgabe, bei welcher die ausfahrenden roten und violetten Strahlen zusammenfallen, nennt man ein achromatisches Doppelprisma. Der ausfahrende Lichtstrahl ist indessen doch nicht ganz farblos. Warum nicht? Warum kann man aus Crownglas und Flintglas überhaupt kein völlig achromatisches Doppelprisma verfertigen?

29. Aus Aufgabe 22 geht hervor, daß bei Prismen der nämlichen Glasart die Farbenzerstreuung dividiert durch die Ablenkung des mittleren Strahles für jede beliebige, jedoch kleine Größe des brechenden Winkels eine konstante Zahl, nämlich $= \frac{n_v - n_r}{n - 1} = Z$ ist. Kennt man also von einem Glase diesen Quotienten, den man sein Zerstreuungsvermögen (seine zerstreuende Kraft) nennt, und außerdem noch seinen Brechungsquotienten, so kann man für ein daraus verfertigtes Prisma von bekanntem brechenden Winkel den Zerstreuungswinkel berechnen. Es soll dies für ein Flintglasprisma geschehen, dessen brechender Winkel $u = 10^0$, dessen Zerstreuungsvermögen $Z = 0{,}052$ und dessen Brechungsquotient $n = 1{,}642$ ist.

30. Aus einem Stück Crownglas (Spiegelglas), dessen mittlerer Brechungsquotient $n_1 = 1{,}533$ und dessen Zerstreuungsvermögen $Z_1 = 0{,}0394$ ist, sowie einem Stück Flintglas vom mittleren Brechungsquotienten $n_2 = 1{,}642$ und vom Zerstreuungsvermögen $Z_2 = 0{,}067$ soll ein achromatisches Prisma verfertigt werden, das bei kleinem Einfallswinkel den mittleren Strahl um einen Winkel $w = 4^0$ ablenkt; wie groß müssen die brechenden Winkel u_1 und u_2 der beiden Prismen sein?

31. Wenn man aber aus den beiden in voriger Aufgabe beschriebenen Glassorten eine achromatische Konvexlinse von der Brennweite $p = 48\,\text{cm}$ verfertigen sollte,

a) welche Brennweite p_1 müßte die Konvexlinse aus Spiegelglas und welche Zerstreuungsweite p_2 die Konkavlinse aus Flintglas erhalten?

b) welche Krümmungshalbmesser müßte man demnach den beiden Bestandlinsen geben, vorausgesetzt, daß die Spiegelglaslinse eine plankonvexe, die Flintglaslinse eine plankonkave werden sollte?

32. In neuerer Zeit werden (bei der Spektralanalyse) Prismenverbindungen angewendet, welche den umgekehrten Zweck haben, wie die in den Aufgaben 27 und 30 berechneten achromatischen, durch welche nämlich die Zerstreuung möglichst beibehalten, die Ablenkung der mittleren Strahlen aber aufgehoben werden soll (*Prismen nach Amici oder Prismen mit gerader Durchsicht*). Man möge deshalb zu dem in Aufgabe 27 beschriebenen Crownglasprisma von 25° brechendem Winkel den brechenden Winkel eines Flintglasprismas von den in derselben Aufgabe gegebenen Brechungsquotienten berechnen, durch welches eine *Ablenkung der mittleren Strahlen verhindert*, aber die *Zerstreuung* der Farbenstrahlen *nicht aufgehoben* wird.

33. Aus den in Aufgabe 30 beschriebenen beiden Glassorten will man ein *Doppelprisma mit gerader Durchsicht* verfertigen, dessen Zerstreuungswinkel $\varepsilon = 20$ Minuten ist. Wie groß müssen die brechenden Winkel u_1 und u_2 der beiden Prismen sein?

34. Man hat ein Crownglasprisma mit dem brechenden Winkel $u_1 = 90°$; man soll *durch Konstruktion* und *Rechnung* den brechenden Winkel u_2 eines Flintglasprismas finden, das mit jenem ein Doppelprisma mit gerader Durchsicht bildet, die bezüglichen Brechungsquotienten zu 1,533 und 1,642 angenommen *).

XXX. Optische Instrumente.

1. Wie erklärt es sich, daß man einen dem Auge ganz nahen Gegenstand durch eine sehr feine Öffnung deutlich sehen kann, während ohne diese Öffnung die mittlere Sehweite eines normalen Auges ungefähr 25 cm (= nahe 10 preuß. Zoll) beträgt?

2. Wenn man mit einem Auge durch zwei nahe bei einander befindliche feine Öffnungen (z. B. durch zwei Nadelstiche in einem Kartenblatt) sieht, so erblickt man einen feinen Gegenstand (z. B. eine feine Nadel), wenn er nahe gehalten wird, doppelt; bei seiner allmählichen Entfernung nähern sich die beiden Augenbilder einander, bis sie endlich in ein einziges zusammenfallen,

*) Bei Prismen mit großen brechenden Winkeln ist natürlich das in den vorigen Aufgaben angewendete angenäherte Rechnungsverfahren nicht mehr statthaft.

dann aber treten ſie bei noch weiterer Entfernung des Gegenſtandes wieder auseinander, indem ſie dabei ihre Stellen wechſeln. Wie erklärt ſich dieſe Erſcheinung?

3. Für ein weitſichtiges Auge, deſſen mittlere Sehweite $= D$ (größer als 30 cm) iſt, ſoll die Brennweite p einer Sammellinſe (Konvexbrille) beſtimmt werden, vermittelſt deren es diejenigen Gegenſtände deutlich ſieht, welche ſich in der Sehweite des normalen Auges von 25 cm befinden.

4. Welche Zerſtreuungsweite p muß aber zu gleichem Zwecke eine Hohllinſe (Konkavbrille) für einen Kurzſichtigen haben, deſſen mittlere Sehweite $= D$ (kleiner als 25 cm) iſt?

5. Man hat mittels eines Optometers die mittlere Sehweite eines Auges $= 60$ cm gefunden, von welcher Beſchaffenheit muß die Glaslinſe ſein, welche dieſen Augenfehler verbeſſern ſoll?

6. Welcher Glaslinſe bedarf aber ein Auge, deſſen mittlere Sehweite $= 12$ cm iſt?

7. Es ſoll die lineare Vergrößerung eines Gegenſtandes durch ein einfaches Mikroſkop (Lupe) von der Brennweite $= p$ für ein Auge gefunden werden, deſſen deutliche Sehweite $= D$ iſt?

8. Man hat eine Lupe von der Brennweite $= 5$ cm. Welche Vergrößerung giebt ſie a) einem normalen Auge (deſſen mittlere Sehweite $= 25$ cm geſetzt wird); b) einem kurzſichtigen Auge, deſſen mittlere Sehweite $= 12$ cm; c) einem weitſichtigen Auge, deſſen mittlere Sehweite $= 60$ cm iſt?

9. Welche Linear- und welche Flächenvergrößerung giebt ein einfaches Mikroſkop von 1,4 cm Brennweite einem normalen Auge?

10. Wenn man durch eine Lupe von der Brennweite $p = 2$ cm und dem Öffnungsdurchmeſſer $d = 0{,}75$ cm einen Gegenſtand betrachtet, wie groß iſt die Helligkeit H des Bildes, als Einheit der Helligkeit diejenige angenommen, mit welcher ſich das Bild dem bloßen Auge darſtellt?

11. Worauf beruht für mikroſkopiſche Zwecke der Vorzug der Linſen aus Edelſteinen, beſonders Diamant und Saphir, vor denen aus Glas?

12. In welchem Verhältnis ſtehen die Vergrößerungen der Linſen aus Glas, Saphir und Diamant, wenn alle Krümmungshalbmeſſer dieſer Linſen einander gleich ſind?

13. Wie beſtimmt man die Brennweite einer Konvexlinſe, ſowie die Zerſtreuungsweite einer Konkavlinſe? (Siehe Aufgabe 58 in XXVIII.)

14. Ein menſchliches Auge, das ſich im Waſſer befindet, kann nicht deutlich ſehen, weil der Brechungsquotient des Waſſers und der der Augenmedien zu wenig differieren, die von einem Punkte ins Auge fallenden Strahlen alſo zu weit hinter der Netzhaut ſich vereinigen. Es ſoll daher der Halbmeſſer einer gleichſeitigen Glaslinſe geſucht werden, welche ein Taucher nötig hat, um das deutliche Bild eines $a = 25$ cm vom Auge entfernten Gegenſtandes auf die Netzhaut zu bringen, wenn man annimmt, daß die Netzhaut $\alpha = 1{,}5$ cm von der Glaslinſe entfernt, und daß der Brechungsquotient des Glaſes $m = 1{,}533$, der des Waſſers $n = 1{,}336$, ſowie der

des Auges dem des

nvergläser haben die
hre gemeinschaftliche
unter der Annahme
können.
d sie unmittelbar auf

ren beide Linsen die
t aufeinander liegen

Weise aus zwei oder
bestehende Lupe gegen
elben Vergrößerung?
öhnlichen zusammen-
kop (Fig. 65), bei
melbild zwischen das
nd das Okular RS
nnweite des Objektivs
e des Okulars p_2 =
egenstand AZ befinde
m vom Objektiv ent-
ittlere Sehweite des
= 25 cm = 250 mm;
der Gegenstand ver-
che Länge muß das
?

ise läßt sich die Größe
sowie die Vergröße-
ngesetzten Mikroskops
smikrometers**)

er Konverlinse, sowie
er ist, als die Brenn-
sen fallen zusammen,
en der Konverlinse, und
om Brennpunkte der

Doppellinse (vergl. Auf-

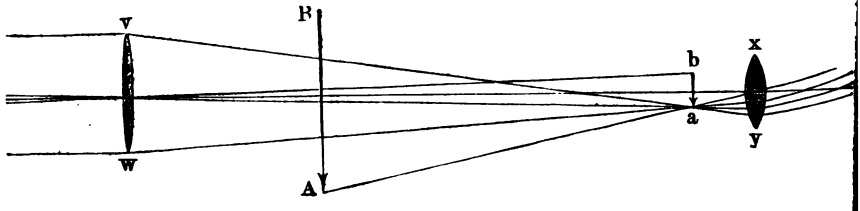
eine feine gerade Linie
mittels des Mikroskops

Konvexlinse entfernt. Es sei ferner im Brennpunkte der Konvexlinse das Sammelbild einer in großer Entfernung vor derselben befindlichen geraden Linie gegeben (d. h. das Bild derselben, welches entstehen würde, wenn die Konkavlinse nicht vorhanden wäre). Man soll die Lage des geometrischen Bildes dieser Linie, welches ein durch das Konkavglas sehendes Auge vor diesem erblickt, durch Zeichnung finden. (Galileisches oder holländisches Fernrohr.)

21. Ein Taschenperspektiv (Galileisches Fernrohr) hat ein Objektiv von $p_1 = 13$ cm Brennweite und ein Okular von $p_2 = 2{,}6$ cm Zerstreuungsweite. Wie groß ist die Länge, die Vergrößerung und das Gesichtsfeld dieses Instrumentes?

22. Ein Keplersches oder astronomisches Fernrohr (Fig. 66) hat ein Objektiv von $p_1 = 39$ cm und ein Okular von $p_2 = 1{,}3$ cm Brenn-

Fig. 66.



weite*). Wie groß ist die Länge, die Vergrößerung und das Gesichtsfeld desselben?

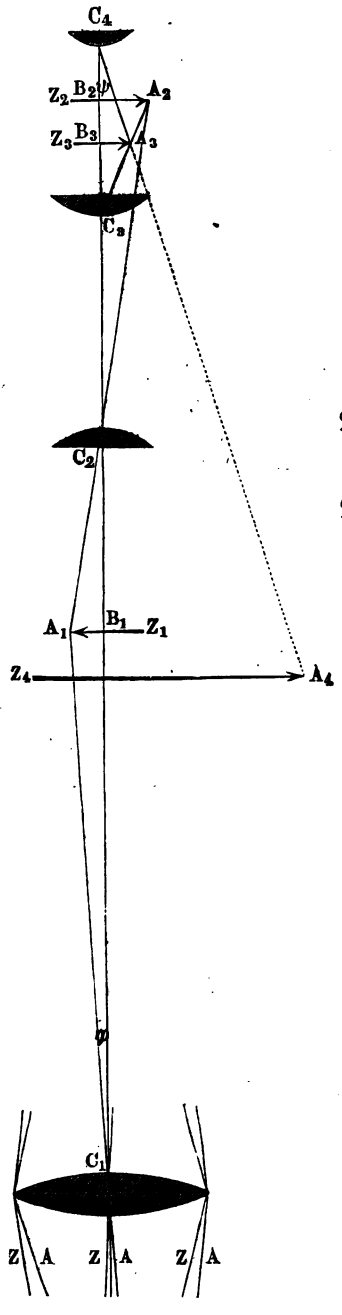
23. Warum giebt man dem Fernrohr mit konkavem Okular gewöhnlich nur eine vier- bis fünfmalige und nicht dieselbe starke Vergrößerung, wie dem Fernrohr mit konvexem Okular?

24. Das terrestrische oder Erdfernrohr besteht in seiner einfachsten Gestalt aus drei Konvexlinsen, dem Objektiv, dem Okular und einer zwischen diesen beiden befindlichen Linse, welche dazu dient, das vom Objektiv erzeugte verkehrte Bild umzukehren, so daß in der Brennweite des Okulars ein aufrechtes Bild entsteht. Als Okular wird aber aus den in Aufgabe 17 angeführten Gründen nicht eine einfache, sondern eine Doppellinse verwendet**). In dem in Fig. 67 skizzierten Fernrohr, worin die Entfernungen der Linsen zum Teil verkürzt dargestellt sind, entsteht von einem Gegenstande AZ hinter der Objektivlinse C_1 das reelle Bild A_1Z_1; von diesem würde hinter der Linse C_2 das reelle Bild A_2Z_2 entstehen, wenn die Linse C_3 nicht vorhanden wäre; durch die Brechung in dieser Linse C_3 entsteht also das reelle Bild A_3Z_3, das in der Brennweite der Linse C_4 liegt

*) Statt der einfachen Linse wird aber als Okular eine Doppellinse angewendet (siehe Aufgabe 24).

**) Die neueren Instrumente haben auch statt der einfachen Zwischenlinse eine Doppellinse.

Fig. 67.



und, durch dieſe Linſe betrachtet, in der deutlichen Sehweite als $A_4 Z_4$ erſcheint*). Geſetzt nun, es ſeien

die Brennweiten der Linſen

$C_1 \ldots p_1 = 52$ cm
$C_2 \ldots p_2 = 4$ „
$C_3 \ldots p_3 = 4$ „
$C_4 \ldots p_4 = 2{,}7$ „

die Linſendiſtanzen

$C_1 C_2 = d_1 = 58$
$C_2 C_3 = d_2 = 9$,

welche Vergrößerung giebt das Fernrohr und wie groß muß die Entfernung d_3 der beiden Linſen C_3 und C_4 des Okulars voneinander ſein?

25. Die Vergrößerung eines Fernrohres auf experimentellem Wege annähernd zu finden.

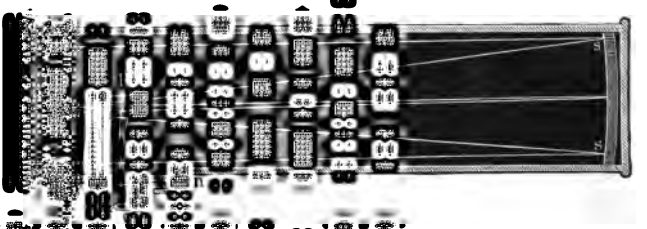
26. Bei einem Spiegelteleſkop von Browning hat der verſilberte Glasſpiegel von 120 cm Halbmeſſer in der Mitte eine kreisrunde Öffnung. Ein zweiter kleiner Hohlſpiegel von 6 cm Halbmeſſer ſteht dieſem gegenüber, während auf der Rückſeite des großen Spiegels und von dieſem um 5 cm entfernt eine Lupe von 10 cm Brennweite ſo angebracht iſt, daß man durch ſie und das Loch in dem großen Spiegel nach dem kleinen ſehen kann. Welche Entfernung muß der Brennpunkt des großen Spiegels, auf einen ſehr fernen Gegenſtand gerichtet, von der Mitte des kleinen haben, wenn die mittlere Sehweite 25 cm beträgt? Wie weit ſind die Spiegel voneinander entfernt?

27. In dem Newtonſchen Spiegelteleſkop (Fig. 68 a. f. S.) iſt das eine Ende des weiten Rohres offen und dem zu betrachtenden Gegenſtande zugekehrt,

*) Die Linie $C_3 A_2$ ſoll die Richtung eines Strahles darſtellen, der, von A_1 ausgehend, nach ſeiner Brechung in der Linſe C_2 durch den optiſchen Mittelpunkt der Linſe C_3 geht.

…mus.

…egel und diesem gegenüber ein …Hohlspiegels geneigt ist und die …zurückwirft, daß ein Bild des …konvexen Okular entsteht. Wenn



…90 cm hat, in welcher Entfernung …acht werden, damit das Bild eines …Sternes, in 15 cm seitlicher Ent… erscheinen und dort mittels des

…tismus.

…jenige, welche auf die gleiche Menge …von 1 Dyn wirkt. (Vergl. Aufg. 14.)

…er eine um 90° aus der Richtung …nationsnadel in diese zurückzukehren …i einer Ablenkung von $a = 30°$ …nationsnadel) macht an einem …Schwingungen in der Minute. Wie …welche sie nach jeder Ablenkung …selben zurückgeführt wird?

…rizontal aufgehängt war, vollendete …Minuten; in St. Helena machte der… …Minuten. Wie verhalten sich die …us in Bristol und in St. Helena …

…70° und auf St. Helena 30°. …fgabe soll die Totalintensität des …werden, wenn diejenige in Bristol

5. Von zwei Deklinationsnadeln, die an einem und demselben Orte schwingen, macht die eine 500, die andere 450 Schwingungen in zehn Minuten, wie verhalten sich die auf dieselben wirkenden magnetischen Kräfte f und φ?

6. Wenn eine Deklinationsnadel bloß durch den Einfluß des Erdmagnetismus in der Minute 40 Schwingungen, unter dem gleichzeitigen Einflusse des Erdmagnetismus und eines künstlichen Magneten aber 50 Schwingungen macht, wie verhält sich die magnetische Intensität (φ) des Magneten zur horizontalen Komponente (f) des Erdmagnetismus?

7. Eine Deklinationsnadel macht bloß durch den Einfluß der erdmagnetischen Kraft 20 Schwingungen in der Minute. Nähert man ihrem Südpol den Nordpol eines Magnetstabes, dessen Achse in der Richtung des magnetischen Meridians liegt und der so lang ist, daß der Einfluß seines Südpoles auf die Magnetnadel gegen den seines Nordpoles vernachlässigt werden kann, bis auf eine Entfernung von 7 cm, so macht sie 55 Schwingungen, und wenn man ihn bis auf 14 cm entfernt, 32,5 Schwingungen in der Minute. In welchem Verhältnis stehen die Intensitäten der Kräfte, welche der erwähnte Pol des Magnetstabes in den beiden Entfernungen auf die Magnetnadel ausübt?

8. Es soll die Zunahme eines Magneten an magnetischer Kraft mittels einer Coulombschen Drehwage gemessen werden. Der zu untersuchende Magnet sei vor der stärkeren Magnetisierung in den Bügel gelegt, durch Drehung des Knopfes, woran der Faden befestigt ist, in den magnetischen Meridian gebracht, sodann durch weitere Drehung des Knopfes um 150° aus dem magnetischen Meridian wieder abgelenkt und dadurch eine Ablenkung des Magneten um 15° hervorgebracht worden. Nach der stärkeren Magnetisierung sei der Magnet wieder in den Bügel gelegt und in den magnetischen Meridian gebracht, sodann aber durch Drehung des Knopfes um 336° eine Ablenkung vom magnetischen Meridian um einen Winkel von 12° hervorgebracht worden. Wievielmal ist jetzt die magnetische Kraft des Stabes stärker als vorher?

9. Wenn sich an einem Orte, wo der Inklinationswinkel $= i$ ist, eine Inklinationsnadel in einer Vertikalebene befindet, welche mit dem magnetischen Meridian einen Winkel $= a$ einschließt, unter welchem Winkel x ist diese Nadel gegen den Horizont geneigt?

10. Welche Lage wird eine Inklinationsnadel annehmen, wenn sie sich in einer Vertikalebene befindet, die auf dem magnetischen Meridian senkrecht steht?

11. Wie kann man mittels einer Inklinationsnadel die Lage des magnetischen Meridians bestimmen?

12. Man will mittels einer einfachen Inklinationsnadel (ohne Kreis mit Gradeinteilung) den Inklinationswinkel eines Ortes bestimmen und hat zu diesem Zwecke beobachtet, daß die Nadel während einer Minute 32 Schwingungen macht, wenn ihre Schwingungsebene mit dem magnetischen Meridian zusammenfällt, dagegen nur 30 Schwingungen in der Minute, wenn ihre Schwingungsebene auf der Ebene des magnetischen Meridians senkrecht steht. Wie groß ist hiernach der Inklinationswinkel?

13. Wenn die Anziehung oder Abstoßung zweier in der Entfernung $= 1$ aufeinander wirkender Magnetismusmengen, wovon jede $= 1$ als Einheit der magnetischen Kraft angenommen wird, wie groß ist die Anziehungs- oder Abstoßungskraft zweier Mengen, welche durch die Zahlen 3 und 4 und deren Entfernung voneinander durch 5 ausgedrückt wird? Welches ist die Dimension der Einheit der Magnetismusmenge?

14. Welche Kraft übt ein Magnetpol von 9 Einheiten auf einen andern von 16 Einheiten in der Entfernung von 6 cm aus?

15. Ein Pol von 40 Einheiten wirkt auf einen andern 5 cm entfernten mit einer Kraft von 32 Dyn. Wie groß ist die Stärke dieses Poles?

16. Wenn die Magnetismusmenge μ, in der Entfernung λ vom Drehpunkte eines horizontal aufgehängten Magnetstabes in einem Punkte konzentriert, denselben (mitwirkenden) Einfluß auf die Drehung des Stabes durch einen andern Magnet hat, wie die auf die Hälfte des Stabes verteilte Magnetismusmenge, wie groß ist das magnetische Moment M des Stabes? [D. h. diejenige Magnetismusmenge, welche, in einer der Einheit von λ gleichen Entfernung vom Drehpunkte angebracht, denselben (mitwirkenden) Einfluß auf die Drehung des Stabes durch einen andern Magneten ausübt, wie die über den ganzen Stab verbreitete Menge.]

Welches ist die Dimension der magnetischen Einheitsmenge?

17. Man soll die Kraft bestimmen, mit welcher ein horizontal liegender Magnetstab SN (Fig. 69), dessen Länge $= l$ und dessen magnetisches

Fig. 69.

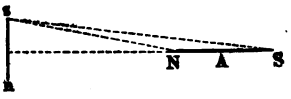
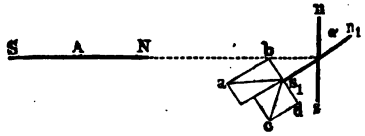


Fig. 70.



Moment $= M$ ist (siehe vorige Aufgabe), eine Deklinationsnadel ns vom magnetischen Moment $= m$ zu drehen strebt, wenn die Richtung des Stabes auf der Richtung der Nadel senkrecht steht und durch die Mitte derselben geht, und wenn die Entfernung der Mitte A des Stabes von der Nadel $= e$ ist?

18. Wenn eine Deklinationsnadel ns (Fig. 70) durch einen kleinen Magnetstab NS, der mit jener in derselben Horizontalebene und senkrecht auf der Richtung des magnetischen Meridians liegt und dessen Mitte A 350 mm von der Nadel entfernt ist, um einen Winkel $\alpha = 11^0\,20'$ aus dem magnetischen Meridian abgelenkt wird, wie verhält sich die Kraft M des Magnetstabes zu der horizontalen Komponente T des Erdmagnetismus?

19. Welches ist die Dimension der Intensität eines magnetischen Feldes an einer bestimmten Stelle?

20. Wie groß ist das Potential einer magnetischen Scheibe? (D. i. ein sehr kurzer, breiter, cylindrischer Magnetstab.)

XXXII. Elektrizität.

Statische Einheit der Elektrizitätsmenge ist diejenige, welche in der Entfernung von 1 cm auf die gleiche Menge Elektrizität derselben Art eine abstoßende Kraft von 1 Dyn ausübt.

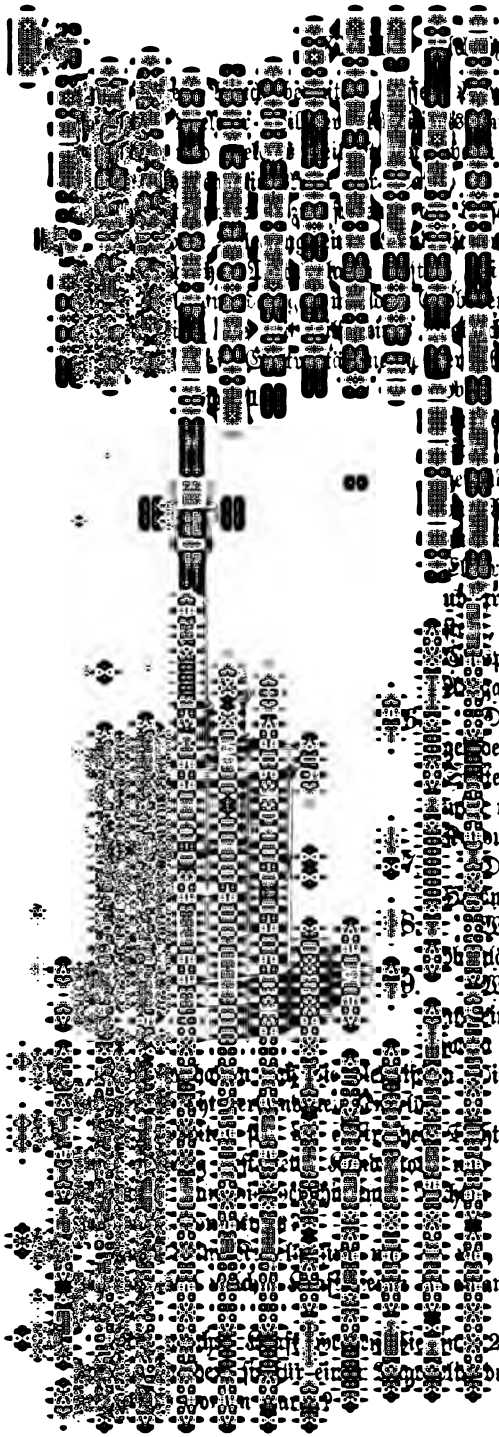
Unter dem **Potential** in einem Punkte A in bezug auf einen Punkt B versteht man die Arbeit, welche verrichtet werden muß, um eine elektrische Einheit aus unendlicher Ferne bis zu dem Punkte A zu bewegen, entgegen der abstoßenden Wirkung einer Menge gleichnamiger Elektrizität im Punkte B.

Ist die Menge der im Punkte B enthaltenen Elektrizität $= q$ Einheiten und die Entfernung des Punktes A von B gleich r, so ist das Potential im Punkte A gleich $q : r$. (Kr. §. 82.)

Von einem Konduktor sagt man, er habe die **Kapazität Eins**, wenn er mit der Elektrizitätsmenge 1 geladen werden muß, damit sich sein Potential von 0 auf 1 erhöht (man müßte alsdann die Arbeit 1 leisten, um eine Einheit gleichnamiger Elektrizität aus dem Unendlichen bis zum Konduktor zu bewegen). Die Kapazität C ist der Elektrizitätsmenge Q gerade und dem Potential V umgekehrt proportional ($C = Q : V$).

Unter elektrischer **Dichte** versteht man die Menge der Elektrizität auf der Flächeneinheit.

1. In einer Coulombschen Drehwage (Fig. 71 a. f. S.) hat man das bewegliche Metallscheibchen (oder Kügelchen) mit dem festen in Berührung gebracht, ohne daß dabei eine Torsion des Fadens stattfindet. Wenn man nun dem festen Scheibchen eine solche Menge von Elektrizität mitteilt, daß sich das bewegliche um 25° von ihm entfernt, dann aber nach einer an der oberen Teilung abgelesenen Drehung des Fadens von 146° bis auf 10° sich ihm wieder nähert, welche Beziehung ergiebt sich hieraus zwischen den Entfernungen und den Abstoßungskräften der elektrisierten Scheibchen?
2. a) Wie groß ist die Elektrizitätsmenge, welche auf die Menge 6 in der Entfernung 2 die Kraft von 12 Dyn ausübt? b) Wie groß ist die Kraft, mit welcher die Elektrizitätsmenge 9 auf die Elektrizitätsmenge 4 in der Entfernung 3 wirkt? c) Welches ist die Dimension der statischen elektrischen Einheitsmenge?
3. Wenn eine Batterie von vier gleichen Leidenschen Flaschen durch 100 Umdrehungen einer Elektrisiermaschine so geladen wird, daß bei der Entladung die Schlagweite 1 cm beträgt; wie groß berechnet sich daraus die Schlagweite einer Batterie von acht Flaschen von derselben Größe und Belegung wie die obigen nach 160 Umdrehungen der Maschine?
4. Wenn man die metallene Belegung der einen Seite einer Franklinschen Tafel mit einer Elektrizitätsquelle in Verbindung setzt, die Belegung der andern Seite aber mit dem Boden, so wird durch die Elektrizitätsmenge E der ersten Belegung auf der zweiten eine etwas geringere Menge e der entgegengesetzten Art gebunden, die $= mE$ gesetzt werden kann, wenn m



…nität.

…t von der Dicke der Glasplatte …nge E auf der ersten Belegung ist … $m = 0{,}99$ ist? Und wie groß …h. das Verhältnis der gesamten …selben Seite?

…s, der aus einer Glasplatte mit … mit einer Elektrizitätsquelle, die …n in leitende Verbindung gebracht, …heibchens und eines Elektrometers …eren Belegung. Sodann sei die … Platte mit der Erde leitend ver… und nunmehr die freie Elektri… auf der unteren Platte $= \varepsilon_2$ …den worden. Man soll hieraus …Verhältnis finden, in welchem die …einer der Belegungen gebundene …izität zu der gesamten (gebundenen und freien) Elektrizitätsmenge der andern …, d. h. man soll für die gegebene …splatte den Wert von m der vorigen …gabe bestimmen?

…Das Potential (die Spannung) eines …gebenen Konduktors ist an allen …ten dasselbe. Beweis! — Wie …man das Potential eines geladenen …duktors?

…Die Kapazität einer Kugel von 1 cm …messer ist gleich 1. Beweis!

…Wie groß ist die Kapazität der Erd…fläche?

…Wie groß ist die elektrische Dichte …einer Kugeloberfläche vom Radius 1, …ihr die Ladung Q erteilt wird?

…Dichten auf zwei durch einen sehr …

…ten an den verschiedenen Punkten …wie auf einer Scheibe? — Wie …an den einzelnen Stellen eines …

…bezw. — 8 Elektrizitätseinheiten …ander an, wenn ihr Abstand 4 cm …

…2. erwähnten Kugeln aufeinander …durch einen leitenden dünnen Draht …

14. Einer Kugel von 6 cm Radius werden 660 elektrische Einheiten mitgeteilt, wie groß ist die Dichte der Ladung?

---

15. Eine Zinkplatte und eine Kupferplatte von gleicher Oberfläche berühren einander, und die Dichtigkeit der Elektrizität auf jeder ist $= d$, auf der einen positiv, auf der andern negativ, so daß also ihre Spannungsdifferenz $d - (-d) = 2d$ ist. Wenn nun mit der Kupferplatte ein Leiter in Verbindung gebracht wird, der eine n mal so große Oberfläche hat, als eine jener Platten, welche Dichtigkeit wird dann die freie negative Elektrizität der Kupferplatte und welche die positive Elektrizität der Zinkplatte haben?

16. Eine Zinkmasse und eine Kupfermasse von dreimal so großer Oberfläche berühren einander. Wie groß sind die Dichtigkeiten der auf ihnen befindlichen freien Elektrizitätsmengen, diejenige Dichtigkeit als Einheit angenommen, welche beide Metalle bei gleichen Oberflächen haben würden?

Die Widerstände von festen Körpern, namentlich von Drähten, mißt man gewöhnlich mittels des Differentialgalvanometers (Kr. Gr. §. 368) oder mittels der Wheatstoneschen Brücke.

Das erste ist ein Galvanometer mit zwei Multiplikatorspulen von gleichem Widerstande; werden zwei gleiche Ströme in entgegengesetzter Richtung durch die zwei Spulen geleitet, so bleibt die Nadel in Ruhe. Fig. 72 zeigt die Anwendung dieses Galvanometers zum Messen von Widerständen fester Körper. Von der Batterie B führt der eine (etwa positive) Poldraht nach den Klemmen 1 und 2 des

Fig. 72.

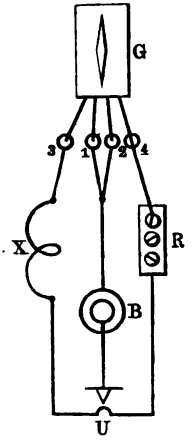
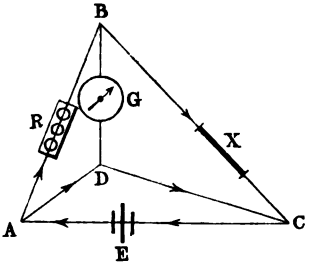


Fig. 73.



Differentialgalvanometers, während der andere nach einem Taster U führt; von da aus geht der Strom einerseits über den zu messenden Widerstand X nach der Klemme 3 und anderseits über den Stöpselrheostaten R nach der Klemme 4. Man schaltet bei R solange Widerstand ein, bis die Nadel auf Null steht, und liest die Zahl der Ohm ab.

Die Wheatstonesche Brücke zeigt Fig. 73. Der von der Batterie E ausgehende (positive) Strom verzweigt sich bei A einerseits nach B hin und anderseits nach D. Bei C vereinigen sich die Ströme wieder. Ist nun der Spannungsabfall von A bis B ebenso groß wie der von A bis D, so herrscht bei B und D gleiche Spannung (nach entgegengesetzter Richtung) und auf der

Strecke BD fließt kein Strom — die Galvanometernadel zeigt auf Null. A und C können als die Pole von E gelten (unter Vernachläßigung der Widerstände, welche die Zuleitungsdrähte EA und EC bieten). Von A aus fällt die Spannung, bis sie in $C = 0$ wird. Sollen nun die Spannungen in B und D gleich sein, so muß zwischen den Widerständen von AB, BC, AD und DC, welche wir mit r_1, r_2, r_3 und r_4 bezeichnen wollen, die Beziehung gelten:

$$r_1 : r_2 = r_3 : r_4.$$

AD und DC haben bekannte Widerstände. Zwischen A und B ist ein Rheostat R und zwischen B und C der zu messende Widerstand eingeschaltet. Am Rheostaten R wird nun Widerstand solange eingeschaltet, bis die Nadel von G auf Null steht. Ist nun z. B. $r_3 = r_4$, so ist auch der Widerstand von X gleich der Anzahl von Ohm, welche im Rheostaten eingeschaltet worden ist. Ist dagegen $r_4 = 1/10\, r_3$, so ist $r_2 = 1/10\, r_1$, oder der Widerstand von X ist $1/10$ von dem in R eingeschalteten Widerstande bei Nullstellung der Nadel.

Beim Messen von Flüssigkeitswiderständen kann mit Sicherheit nur Wechselstrom benutzt werden, weil, wenn gleichgerichtete Ströme durch eine Flüssigkeit gehen, chemische Zersetzung und damit ein Polarisationsstrom hervorgerufen wird. Man kann sich nun entweder des Elektrodynamometers (von Weber) oder der Telephonbrücke (von Kohlrausch) bedienen. Das erstere besteht aus zwei Drahtrollen, einer festen und einer in dieser drehbaren (unifilar oder bifilar aufgehängten). Im normalen Zustande stehen die Achsen beider Rollen aufeinander senkrecht. Die Verbindung ist so hergestellt, daß ein eingeleiteter Strom gleichzeitig durch beide Rollen gehen muß. Je nach der Stärke des Stromes stellen sich die Achsen beider Rollen mehr oder weniger parallel. Auch wenn der Strom bei gleicher Stärke wechselt, behalten die Rollen ihren Stand, weil eben in beiden der Richtungswechsel stattfindet.

Es wird die zu messende Flüssigkeit, ein Induktionsapparat und das Elektrodynamometer in einen Kreis geschaltet und die Ablenkung der beweglichen Rolle beobachtet; alsdann entfernt man die Flüssigkeit und setzt statt ihrer einen Rheostaten ein und stöpselt solange, bis man wieder die vorige Ablenkung erreicht hat.

Die Telephonbrücke unterscheidet sich von der Wheatstoneschen Drahtverbindung dadurch, daß statt des Galvanometers ein Telephon zwischen B und D (Fig. 73) eingeschaltet wird. Zwischen C und A ist die Nebenrolle eines Induktionsapparates eingeschaltet, dessen Hauptrolle durch ein Element erregt wird. Man ändert den Widerstand des Rheostaten solange, bis das Geräusch im Telephon verschwindet. Alsdann fließt zwischen B und D kein Strom.

17. Welche Länge hat ein Kupferdraht von 1 qmm Querschnitt bei 1 Ohm Widerstand? [Spezifische Leitungsfähigkeit des Silbers = 100, des (reinen) Kupfers = 96, des Eisens = 16, des Platins = 12, des Neusilbers = 7,5, des Quecksilbers = 1,6]. — Ein Ohm ist der Widerstand eines Quecksilberfadens von 1,06 m Länge und 1 qmm Querschnitt.

18. Wie lang muß ein Draht von 0,5 mm Dicke sein, um einem elektrischen Strome denselben Widerstand zu leisten, wie ein Draht desselben Metalles von 40 m Länge und 1 mm Dicke.

19. Der Widerstand eines Kupferdrahtes von 18,12 m Länge betrug 3,02 Ohm. Ein anderes Stück desselben Drahtes hatte einen Widerstand von 22,65 Ohm; wie lang war es?

20. Wieviel Widerstand hat ein Eisendraht von 13,6 m Länge und 2,5 mm Durchmesser?

21. Ein Neusilberdraht von 12 m Länge ist mit einem Eisendraht von 18 m Länge hintereinander verbunden; wie groß ist der Widerstand der ganzen Drahtlänge, wenn der gemeinsame Querschnitt 2,5 qmm beträgt?

22. Zwei Drähte haben die Widerstände w_1 und w_2; wie groß ist ihr Gesamtwiderstand, wenn sie parallel geschaltet werden? Ebenso für drei Drähte mit den Widerständen w_1, w_2 und w_3!

23. Die Widerstände zweier Drähte sind 1,42 und 2,37 Ohm; wie groß ist ihr Gesamtwiderstand, wenn sie parallel geschaltet werden?

24. Die Bewickelung des Ringes einer Dynamomaschine hat, der Länge nach gemessen, einen Widerstand von 1 Ohm; wie groß ist der wirkliche Widerstand der Ringbewickelung?

25. Zwei Kupferdrähte, deren Längen 2,5 und 1,5 m und deren Querschnitte 1,5 bezw. 1,8 qmm betragen, sind parallel geschaltet; welchen Widerstand bietet jeder einzelne einem Strome dar und wieviel zusammen, wenn sie parallel geschaltet werden? Der wievielste Teil eines Stromes von 1 Ampère fließt durch jeden Zweig, wenn die Drähte parallel geschaltet werden?

26. Drei Drähte, ein Kupferdraht, 15 m lang und 2,5 mm dick; ein Eisendraht, 12 m lang und 2 mm dick; sowie ein Neusilberdraht, 9 m lang und 1,6 mm dick, sind in einen Stromkreis hintereinander geschaltet. Wie lang müßte ein Neusilberdraht von 1,75 mm Dicke sein, welcher dem Strome denselben Widerstand darböte?

27. Dieselben drei Drähte, wie in Nr. 26, sind parallel geschaltet; ein Strom von 4 Ampère kommt an dem einen Verknüpfungspunkte an; wie stark sind die Ströme, welche die drei Zweige durchfließen? Wie groß ist der Gesamtwiderstand?

28. In einen Stromkreis von 3 Volt, dessen Widerstand 1,5 Ohm beträgt, wird noch ein Kupferdraht von 225 m Länge und 0,75 qmm Querschnitt eingeschaltet; auf wieviel Ampère sinkt der Strom?

29. In einen Stromkreis von 4 Volt ist ein Kupferdraht von 16 m Länge und 1,25 qmm Querschnitt geschaltet; der Strom hat 7 Ampère; dem Kupferdraht wird ein Neusilberdraht von 12 m Länge und 3,5 qmm Querschnitt parallel geschaltet; um wieviel erhöht sich die Stromstärke und wieviel Ampère fließen durch jeden der zwei Drähte?

30. Wieviel zehnkerzige Glühlampen (von 100 Volt und 0,39 Ampère) kann man in einen Kreis von 100 Volt und 20 Ampère parallel schalten?

31. Wieviel 35 kerzige Glühlampen (von 100 Volt und 1,12 Ampère) lassen sich in denselben Stromkreis parallel schalten?

32. Wieviel Bogenlampen (50 Volt und 10 Ampère) lassen sich in einen Stromkreis von 1000 Volt und 10 Ampère hintereinander schalten?

33. Wie groß ist der Widerstand eines Eisendrahtes von 4 mm Durchmesser und einer Meile Länge

a) in Siemensschen Einheiten?

b) in Jacobischen Einheiten?

Eine Siemenssche Einheit ist der Widerstand eines Quecksilberfadens von 1 m Länge und 1 qmm Querschnitt.

Eine Jacobische Einheit ist der Widerstand eines Kupferdrahtes von 1 m Länge und 1 mm Durchmesser.

34. Ein Kilogramm Kupfer vom spezifischen Gewicht 8,8 soll in Draht ausgezogen werden, der einem elektrischen Strome den Widerstand von 100 Siemensschen Einheiten darbietet; welche Länge und Dicke hat er?

35. In einem Stromkreise von 6 Volt und 8 Ohm hat eine Teilstrecke den Widerstand von 1,6 Ohm; wie stark ist der Spannungsabfall auf ihr (wie groß ist die Potentialdifferenz an den Enden)?

36. Bei einer Wheatstoneschen Brücke, bei der die festen Widerstände (AD und DC, Fig. 73) 100 bezw. 10 Ohm waren, wird in BC ein zu messender Widerstand eingesetzt; wie groß ist er, wenn 352 Ohm im Rheostaten gezogen werden müssen, damit die Galvanometernadel auf 0 zeigt?

37. Ein Strom von 10 Ampère bedient eine Bogenlampe. Die Potentialdifferenz der Kohlenspitzen beträgt 120 Volt. a) Wieviel (elektrische) Pferdekräfte sind zur Erzeugung des Stromes notwendig. (736 Volt · Ampère = 1 elektrische Pferdekraft. Kr. §. 371.) b) Wieviel mechanische Pferdekräfte muß die Dampfmaschine liefern, wenn sie 82 Proz. auf die Dynamomaschine überträgt?

38. Es soll bewiesen werden, daß man von einer Anzahl galvanischer Elemente das Maximum der Stromstärke erhält, wenn man sie so anordnet, daß der Widerstand in der Kette dem Widerstande im Schließungsbogen gleich ist.

Wie groß ist in diesem Falle der Nutzeffekt?

39. Von 24 gleichen Elementen sind je 4 hintereinander geschaltet und die erhaltenen 6 vierfachen Elemente parallel geschaltet; wie verhält sich die elektromotorische Kraft dieser Kombination zu der eines einzelnen Elementes und wie der innere Widerstand?

40. Es sind 24 Elemente von 1,2 Volt und 2 Ohm innerem Widerstande gegeben. Wie müssen die Elemente geschaltet werden, falls der äußere Widerstand 12 Ohm beträgt, um eine möglichst große Stromstärke zu erhalten?

41. Wie groß sind die Stromstärken der verschiedenen Kombinationen, welche man aus 12 der in Nr. 40 erwähnten Elemente erhalten kann?

42. Dieselben 12 Elemente, wie in Nr. 41 sind so zu schalten, daß ein möglichst großer Strom durch die äußere Leitung fließt, wenn diese von einem Eisendraht von 12 m Länge und 0,75 mm Dicke gebildet ist.

43. Zwölf Bunsensche Elemente (1,9 Volt und 0,4 Ohm) sind zu je vier parallel geschaltet; wie groß ist die Stromstärke, wenn der innere Widerstand gleich dem äußeren, und wie groß, wenn der innere gleich $^3/_{10}$ des Gesamtwiderstandes ist? Wie verhalten sich die Stromstärken in beiden Fällen, und wie die Elektrizitätsmengen, welche in gleichen Zeiten im inneren und im äußeren Kreise laufen? Welche Anordnung ist praktisch die vorteilhaftere?

44. Wenn eine Batterie ausreicht, um nach einem weit entfernten Orte zu telegraphieren, so reicht sie auch zum gleichzeitigen Telegraphieren nach mehreren weit entfernten Orten. Woher kommt das?

45. Wie bestimmt man auf die einfachste Weise den inneren Widerstand eines ungeschlossenen Elementes?

46. Wie mißt man den inneren Widerstand eines geschlossenen Elementes?

47. Wie groß ist der Reduktionsfaktor einer Tangentenbussole?

48. Eine Tangentenbussole hat den Reduktionsfaktor 10, ein Strom bewirkt einen Ausschlag von 23°; wieviel Ampère hat er?

49. Wieviel Ampère hat ein Strom, welcher bei 0° und 760 mm Druck 55,8 ccm Knallgas in der Minute liefert? Ein Strom von 1 Ampère liefert in der Sekunde 0,1740 ccm = 0,0933 mg Knallgas.

50. Wieviel Ampère hat ein Strom, welcher bei 15° C. und 750 mm Druck in der Minute 55,8 ccm Knallgas ausscheidet?

51. Wieviel Milligramm Silber scheidet ein Strom in der Minute aus salpetersaurem Silber und wieviel Milligramm Kupfer aus schwefelsaurem Kupfer aus?

52. Wieviel Silber wird durch einen Strom innerhalb 20 Minuten ausgeschieden, welcher in einer gleichzeitig eingeschalteten Tangentenbussole vom Reduktionsfaktor 10 einen Ausschlag von 35° hervorbringt?

53. Ein Strom geht 45 Minuten lang gleichzeitig durch ein Silbervoltameter und eine Tangentenbussole vom Halbmesser 19,98 cm. Die mittlere Ablenkung der Nadel wurde durch Spiegel, Fernrohr und Skala zu 15,04 cm bestimmt; die Entfernung der Skala vom Spiegel betrug 304 cm und die ausgeschiedene Silbermenge 460,7 mg. Wie groß ist die Horizontalintensität des Erdmagnetismus am Beobachtungsorte?

54. Man hat eine Tangentenbussole und ein Voltameter zugleich in den Strom einer Voltaschen Säule gebracht und beobachtet, daß die Magnetnadel um 30° abgelenkt und zugleich im Voltameter eine Menge Knallgas von 49,7 ccm während einer Minute entwickelt wird. Wieviel Kubikzentimeter (v) Knallgas werden hiernach durch einen Strom, der die Nadel um 45° ablenkt, während derselben Zeit und bei gleichem Luftdruck und gleicher Temperatur entwickelt werden?

55. Mit denselben Apparaten, wie in voriger Aufgabe, hat man bei einem Barometerstande von 755 mm und einer Temperatur von 12° C. beobachtet, daß

	der Strom	die Nadel ablenkte um	in einer Minute Knallgas entwickelte
1)	von 6 Zinkkohlenelementen	52,5°	111,0 ccm
2)	„ 5 „	47,5°	93,2 „
3)	„ 4 „	41°	74,5 „
4)	„ 3 „	30°	49,7 „
5)	„ 2 „	12,25°	18,5 „

Wie groß ergiebt sich daraus die Gasmenge v_1, welche durch einen Strom, der die Nadel um 45° ablenkt, bei einem Barometerstande von 760 mm und bei 0° Temperatur während einer Minute entwickelt werden würde? Wieviel Ampère hat der Strom?

56. Wenn man als Einheit der Stromstärke denjenigen Strom annimmt, welcher bei einem Luftdruck von 760 mm und 0° Temperatur ein Kubikzentimeter Knallgas während einer Minute liefert; wie groß ist die Stärke s des Stromes, welcher die Nadel der Tangentenbussole der vorigen Aufgabe um 21° ablenkt? Wieviel Ampère hat der Strom?

57. Wieviel Ampère muß der Strom in einem galvanoplastischen Apparat haben, um binnen 24 Stunden 144 g Silber niederzuschlagen?

58. Ein Strom wird durch drei elektrolytische Becher geschickt; der erste enthält angesäuertes Wasser, der zweite schwefelsaures Kupfer, der dritte Silber in Cyankalium gelöst. Wieviel Kupfer wird in derselben Zeit im zweiten Becher abgesetzt, innerhalb deren im dritten Becher 2,268 g Silber ausgeschieden werden? Welches Volumen Knallgas entwickelt sich währenddessen im ersten Becher?

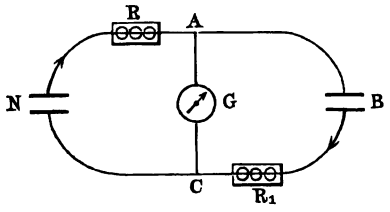
59. Fünfzig hintereinander geschaltete Elemente ($E.M.K. = 1{,}8$) haben einen äußeren Kreis von 15 Ohm Widerstand; wie groß ist der innere Widerstand der Batterie und eines einzelnen Elementes, wenn die Stromstärke 3 Ampère beträgt?

60. Ein großes Chromsäureelement bringt bei einem äußeren Widerstande von 455 Ohm eine Ablenkung der Nadel einer Tangentenbussole von 9° hervor. Wird noch ein unbekannter Widerstand zu dem äußeren Kreis geschaltet, so schlägt die Nadel um 5° aus; wie groß ist der unbekannte Widerstand? (Der innere Widerstand des Elementes und der der Bussole sollen vernachlässigt werden.)

61. Der innere Widerstand eines Elementes (bestimmt nach der Methode von Mance) ist = 0,24 Ohm; ist nun, falls der äußere Widerstand 5 Ohm beträgt, die Stromstärke = 0,36 Ampère; wie groß ist dann die elektromotorische Kraft des Elementes?

62. In eine Drahtverbindung, wie Fig. 74 zeigt, ist ein Normalelement N, dessen elektromotorische Kraft = 1,04 Volt gefunden worden, und ein Bunsensches B so geschaltet, daß die Ströme in derselben Richtung fließen. Man reguliert nun den Widerstand R_1 so, daß die Nadel des Galvanometers G in dem Brückendraht AC auf Null steht; setzt man alsdann in R noch 2 Ohm und in R_1 noch 3,6 Ohm zu, so zeigt die Nadel abermals auf Null. Wieviel Volt hat das Bunsensche Element?

Fig. 74.



63. Fünf hintereinander geschaltete Daniellsche Elemente geben an einer Tangentenbussole von 11 cm Radius und 10 Windungen einen Ausschlag von 45° bei einem Gesamtwiderstande von 16,9 Ohm. Wie groß ist die elektromotorische Kraft eines Daniellschen Elementes? Die Horizontalkomponente des Erdmagnetismus beträgt 0,18 C. G. S.-Einheiten.

64. Wenn in den Stromkreis eines Elementes bloß eine Tangentenbussole eingeschaltet ist, so beträgt der Ausschlag 65°, dagegen nur 32°, wenn noch 2 Ohm zugesetzt werden; der Widerstand der Bussole ist 0,04 Ohm; wie groß ist der innere Widerstand des Elementes?

65. In den Stromkreis eines konstanten Elementes ist eine Tangentenbussole vom Reduktionsfaktor 10 und vom Widerstande 0,04 Ohm eingeschaltet; der Ausschlag beträgt 33°. Nun wird noch ein Neusilberdraht von 4 m Länge und 1,1 mm Dicke (spezifischer Widerstand in bezug auf Kupfer 12,8) eingeschaltet, worauf die Nadel bis 9° zurückgeht. Wie groß ist a) der innere Widerstand des Elementes samt Bussole, b) der des Elementes allein und c) wie groß ist die elektromotorische Kraft des Elementes?

66. Ein Strom von 0,36 Ampère fließt durch eine Rolle von kreisförmigem Querschnitt in 48 Windungen; der (mittlere) Durchmesser derselben beträgt 20 cm. Wie stark ist das magnetische Feld, welches der Strom im Mittelpunkte der Rolle erregt?

67. Im Mittelpunkte der Rolle in Nr. 66 befindet sich eine Magnetnadel, welche durch einen in der Rolle laufenden Strom eine Ablenkung von 35° erfährt. Die Ebene der Rolle liege im magnetischen Meridian und die Horizontalkraft des Erdmagnetismus betrage an dem Beobachtungsorte 0,23 absolute Einheiten. Wie stark ist der Strom in Ampère?

68. Ein in einen Stromkreis eingeschaltetes Sinusgalvanometer schlug bis 65° aus, wobei der Ring solange gedreht wurde, bis die Nadel in seine Ebene fiel. Nunmehr wurde noch soviel Widerstand eingeschaltet, daß jetzt die Nadel nur um 12° ausschlug (wobei wiederum der Ring solange gedreht wird, bis die Nadel in seine Ebene fällt); der Radius der Bussole sei 30 cm, die Horizontalkomponente des Erdmagnetismus 0,195 und die Zahl der Windungen auf der Bussole 50. Wie groß sind die Stromstärken und in welchem Verhältnis stehen sie zu einander?

69. Durch einen Draht von 5 Ohm Widerstand geht 20 Minuten lang ein Strom von 0,24 Ampère; wieviel Grammkalorien entstehen dabei?

70. Sechs Groveſche Elemente von je 1,8 Volt und 0,75 Ohm werden hintereinander geschaltet; der Widerstand des äußeren Kreises soll gleich dem inneren sein. Wie groß ist die Stromstärke und wieviel Grammkalorien entstehen in 10 Minuten; wie verteilt sich diese Wärmemenge auf die Batterie und den äußeren Kreis?

71. Dieselben 6 Elemente, wie in Nr. 70, werden zu je zwei parallel und die erhaltenen drei Gruppen hintereinander geschaltet. Der äußere Widerstand soll 4,5 Ohm betragen. Wieviel Grammkalorien entstehen innerhalb zehn Minuten und wie verteilen sie sich auf die Batterie und auf den äußeren Kreis?

72. Die *EMKe* und die Stromstärken von Wechselströmen verlaufen sinusförmig. In welcher Beziehung steht der normale Wert der *EMK* und der Stromstärke eines Wechselstromes zum Maximalwert?

73. Wie groß ist der Mittelwert einer Wechselstrom-*EMK* und Stromstärke?

74. Von größerer Wichtigkeit als der Mittelwert ist der sogen. effektive oder wirksame, nach welchem die Arbeit des Stromes, bezw. die Wärme

bestimmt wird, welche er zu erzeugen vermag. Diese Wärme ist nach dem Gesetz von Joule dem Quadrat der Stromstärke oder auch dem Quadrat der EMK proportional. Die „Hitzdrahtgalvanometer“ lassen die Arbeit des Stromes an der entstehenden Wärme, bezw. an der durch die Erwärmung bewirkten Verlängerung des Drahtes und das Elektrodynamometer an dem Ausschlag der beweglichen Spule erkennen; bei dem letzteren geht der Strom durch beide Spulen, der Ausschlag ist also dem Quadrat der Stromstärke proportional; auch bleibt der Ausschlag beim Übergang des Stromes ins Negative bestehen, denn er wird in beiden Spulen negativ. Wie groß ist die wirksame Stromstärke und EMK eines Wechselstromes?

75. Wie groß müssen die Maximalwerte von EMK und Stromstärke eines Wechselstromes sein, wenn er denselben Effekt geben soll, wie ein Gleichstrom von der EMK E und der Stärke I?

76. Die Primärspule eines Transformators hat 100 Windungen eines Drahtes von 2 qmm Querschnitt und die Sekundärspule 200 Windungen. Welchen Querschnitt kann der Draht der Sekundärspule haben, ohne daß er heißer wird als der der Primärspule?

77. Eine Maschine erzeugt einen Strom von 100 Volt und 10 Ampère. Wieviel weiter kann man den Strom bei denselben Kupferkosten und demselben Erwärmungsgrad leiten, wenn man den Strom auf 1000 Volt hinauf transformiert?

XXXIII. Einige Aufgaben aus der Chemie.

1. Wieviel O verbindet sich mit 3 g H zu Wasser (H_2O)?
2. Wieviel O und wieviel H ist in 10 g Wasser (H_2O) enthalten?
3. Wieviel Wasser kann durch 10 g Na zerlegt werden?
4. Wieviel Na und wieviel Cl sind in 10 kg Kochsalz (NaCl) enthalten?
5. Wieviel Kohlenstoff und wieviel Sauerstoff sind in 10 g CO_2 enthalten?
6. Wieviel CO_2 und wieviel CaO kann man aus 100 g $CaCO_3$ gewinnen?
7. Wieviel Schwefel ist in 100 g englischer Schwefelsäure (H_2SO_4) enthalten?
8. Wieviel Sauerstoff, wieviel Stickstoff und wieviel Kalium ist in 100 g Salpeter (KNO_3) enthalten?

---

9. Wieviel Sauerstoff kann man aus 100 g Quecksilberoxyd durch Erhitzen erhalten und wieviel Quecksilber?
10. Wieviel Gramm O liefern 200 g chlorsaures Kalium durch Erhitzen?
11. Wieviel Liter O erhält man aus 200 g chlorsaurem Kalium? (1 Liter O wiegt 1,43 g.)

12. Wieviel Gramm O können aus 100 g MnO_2 durch Erhitzen gewonnen werden?
13. Wieviel Gramm MnO_2 sind zur Darstellung von 10 Liter O nötig?
14. Wieviel Liter O können durch Zugießen von englischer Schwefelsäure aus 100 g Mangansuperoxyd gewonnen werden?
15. Wieviel Gramm englischer Schwefelsäure sind dazu erforderlich?
16. Wieviel Gramm schwefelsaures Manganoxydul erhält man dabei?

---

17. Wieviel Zink ist erforderlich, um 25 g Wasserstoff darzustellen?
18. a) Wieviel Liter H kann man mittels 1000 g Zink gewinnen? (Ein Liter Wasserstoff wiegt nahe 0,09 g.)
    b) Wieviel englische Schwefelsäure ist dazu erforderlich?

---

19. Wieviel Phosphor ist erforderlich, um allen in einem Liter atmosphärischer Luft befindlichen Sauerstoff zu verbrennen? (Phosphorpentoxyd = P_2O_5.)

---

20. Wieviel Gramm Salpetersäure (HNO_3) lassen sich aus 500 g Kaliumsalpeter gewinnen und wieviel Gramm saures, schwefelsaures Kalium entstehen dabei?
21. Wieviel Gramm englischer Schwefelsäure sind dazu nötig?

---

22. Wieviel Gramm MnO_2 sind zur Darstellung von 10 Liter Chlor nötig? (1 Liter Chlor wiegt 3,17 g.)
23. Wieviel Gramm Salzsäure vom spezifischen Gewicht = 1,19, die 38 Proz. Chlorwasserstoff und 62 Proz. Wasser enthält, sind dazu erforderlich? Wieviel $MnCl_2 + 4H_2O$ entstehen dabei?
24. Wieviel Gramm NaCl sind zur Bereitung von 10 Liter Chlor nötig?
25. Wieviel Gramm MnO_2 gehören dazu?
26. Wieviel Gramm englischer Schwefelsäure sind dazu erforderlich?
27. Wieviel Gramm NaCl sind zur Darstellung von 10 Liter Chlorwasserstoff nötig? (1 Liter HCl wiegt 1,63 g.)
28. Wieviel Gramm englischer Schwefelsäure sind dazu erforderlich?

---

29. Wieviel Kohlendioxyd erhält man aus 80 g $CaCO_3$ durch Behandeln mit Salzsäure?
30. a) Wieviel Gramm $CaCO_3$ sind zur Darstellung von 10 Liter Kohlendioxyd nötig? (1 Liter Kohlendioxyd wiegt 1,977 g.)
    b) Wieviel Gramm Salzsäure von demselben Gehalt wie die in Aufgabe 23 sind dazu erforderlich?
    c) Wieviel Gramm kristallisiertes Calciumchlorid ($CaCl_2 + 6H_2O$) entstehen dabei?

---

31. Wieviel Gramm bezw. Liter Schwefeldioxyd erhält man beim Kochen von 20 g Kupfer mit konzentrierter Schwefelsäure; wieviel Gramm Schwefelsäure sind dazu nötig und wieviel Gramm kristallisiertes Kupfervitriol ($CuSO_4 + 5H_2O$) erhält man dabei? (Spezifisches Gewicht des Schwefeldioxyds in bezug auf Luft = 2,217.)

32. Wieviel Gramm bezw. Liter Stickstoffdioxyd (spezifisches Gewicht Luft = 1,039) erhält man aus 25 g Kupfer; wieviel Gramm Salpetersäure braucht man dazu und wieviel Gramm kristallisiertes Kupfernitrat ($CuN_2O_6 + 3H_2O$) entstehen dabei?

33. Wieviel Gramm bezw. Liter Schwefelwasserstoff (spezifisches Gewicht Luft = 1,177) erhält man durch Übergießen von 27 g Schwefeleisen mit verdünnter Schwefelsäure und wieviel Gramm kristallisiertes Eisenvitriol ($FeSO_4 + 7H_2O$) entstehen dabei?

34. Wieviel Gramm bezw. Liter Ammoniakgas (spezifisches Gewicht Luft = 0,591) entstehen aus 15 g Salmiak, wieviel Gramm Calciumoxyd hat man dazu nötig und wieviel Gramm (wasserfreies) Calciumchlorid entstehen dabei?

35. Die Silbermünzen enthalten in 1000 g Münzmetall 900 g reines Silber und 100 g Kupfer; wieviel Kupfer- und Silbernitrat erhält man durch Auflösen von 100 g Münzsilber in Salpetersäure und wieviel Gramm Salpetersäure hat man dazu nötig?

36. In eine Lösung von 15 g Silbernitrat gießt man Kalilauge und erhitzt das niedergefallene Silberoxyd, nachdem es getrocknet worden. Wieviel Gramme Kaliumhydroxyd hat man nötig und wieviel Gramme Silberoxyd entstehen; ferner wieviel Gramm Silber und wieviel Liter Sauerstoff erhält man beim Erhitzen des Silberoxyds?

37. Wieviel Gramm Platinsalmiak kann man aus 10 g Platin herstellen; wieviel Gramm Platinchlorid und wieviel Gramm Salmiak braucht man dazu?

Anhang.

Tabelle 1.

Längen- und Flächeneinheiten.

a. Die französischen.

1 Toise = 6 Par. Fuß; 1 Par. Fuß = 12 Zoll = 144 Linien = 0,324839 Meter.

1 Meter = 443,296 Par. Linien = beiläufig $\frac{1}{10\,000\,000}$ des Erdquadranten.

1 Meter = 10 Dezimeter = 100 Centimeter = 1000 Millimeter.
1000 Meter = 100 Dekameter = 10 Hektometer = 1 Kilometer.
1 Meter = 3,078444 Par. Fuß = 3,280917 engl. Fuß = 3,186200 preuß. Fuß.
1 Dezimeter = 3,694133 Par. Zoll = 3,9371 engl. Zoll = 3,82344 preuß. Zoll.
1 Millimeter = 0,4433 Par. Linie = 0,039371 engl. Zoll = 0,45881 preuß. Linie.
1 Seemeile = $^1/_{20}$ eines Äquatorgrades = 5555,6 Meter.

1 Ar = 1 Quadrat-Dekameter; 1 Hektar = 100 Ar = 3,91662 preuß. Morgen.

b. Die deutschen.

1 Meter oder Stab = 100 Centimeter oder Neuzoll.
1 Centimeter oder Neuzoll = 10 Millimeter oder Strich.
1 Dekameter oder Kette = 10 Meter.
1 Kilometer = 1000 Meter.
1 geograph. Meile (15 auf 1 Äquatorgrad) = 7420 Meter.

1 Ar = 1 Quadrat-Dekameter (Quadratkette) = 100 Quadratmeter.
1 Hektar = 100 Ar.
1 Quadratmeile = 56 250 000 Quadratmeter.

c. Die früheren preußischen.

1 Fuß = 139,13 Par. Linien = 0,966181 Par. Fuß = 0,3138535 Meter bei 16,25° C.
1 Rute = 12 Fuß; 1 Fuß = 12 Zoll = 144 Linien (beim Feldmessen ist die Rute 10teilig).
1 Zoll = 0,026154 Meter.
1 Linie = 0,00217954 Meter.
1 Elle = 25,5 Zoll.
1 Meile = 2000 Ruten = 24 000 Fuß.
1 Morgen = 180 Quadratruten = 25,53224 franz. Ar.

Annähernde Vergleichung der deutschen mit den früheren preußischen.

1 Meter = $3^{8}/_{16}$ Fuß = $1^{1}/_{8}$ Ellen.
1 Centimeter oder Neuzoll = $^{5}/_{13}$ Zoll.
1 Millimeter oder Strich = $^{6}/_{13}$ Linie.
1 Dekameter = $2^{19}/_{20}$ Ruten.
1 Kilometer = $^{2}/_{15}$ Meile.
1 Meile = $^{231}/_{232}$ Meile.

---

1 Quadratmeter = $10^{5}/_{88}$ Quadratfuß.
1 Quadratcentimeter = $^{6}/_{41}$ Quadratzoll.
1 Quadratmillimeter = $^{4}/_{19}$ Quadratlinie.
1 Ar = $7^{1}/_{20}$ Quadratruten.
1 Hektar = $3^{11}/_{12}$ Morgen.

---

d. Die englischen.

1 Fuß = 135,1142 Par. Linien = 0,3047945 Meter = 0,97114 preuß. Fuß.
1 Yard = 3 Fuß; 1 Fuß = 12 Zoll = 120 Linien.
1 Rute (Pole, Perch oder Rod) = $5^{1}/_{2}$ Yard; 1 Furlong = 220 Yards.
1 Meile (Mile) = 320 Ruten (Pol, Perch oder Rod) = 1760 Yards = 5280 Fuß.
1 Seemeile = $^{1}/_{20}$ eines Äquatorgrades = 3,4522 Miles.

---

1 Acker oder Morgen (Acre of land) = 4840 Quadrat-Yards = 16 Quadrat-Rods = 1,58494 preuß. Morgen = 40,4671 Ar.
1 Rood of land = 40 Quadrat-Rods = 1210 Quadrat-Yards.

---

e. Die österreichischen.

1 Wiener Fuß = 140,126867 Par. Linien = 0,316085 Meter = 1,00711 preuß. Fuß.
1 Wiener Klafter = 6 Fuß; 1 Fuß = 12 Zoll = 144 Linien.
1 österreich. Postmeile = 4000 Wiener Klafter.

---

1 österreich. Joch Feldmaß = 1600 Quadratklafter = 2,25418 preuß. Morgen.

Tabelle 2.

Körper- und Hohlgemäße.

a. Französische.

1 Liter = 1 Kubikdezimeter = 10 Deziliter = 100 Centiliter.
1 Stere = 1 Kubikmeter = 1 Kiloliter = 10 Hektoliter = 100 Dekaliter = 1000 Liter.

b. Deutsche.

1 Kubikmeter = 1 000 000 Kubikcentimeter.
1 Liter oder Kanne = 1000 Kubikcentimeter = 2 Schoppen.
1 Faß oder Hektoliter = 100 Liter.
1 Scheffel = 50 Liter = $\frac{1}{2}$ Faß.

c. Frühere preußische.

1 Quart = 64 preuß. Kubikzoll = 1,145 franz. Liter.
1 Oxhoft = 1,5 Ohm = 3 Eimer = 6 Anker = 180 Quart = 360 Ösel.
1 Metze = 192 Kubikzoll = 3 Quart.
1 Wispel = 2 Malter = 24 Scheffel = 96 Viertel = 384 Metzen.
1 Tonne = 4 Scheffel.
1 Klafter = 6 × 6 × 3 Kubikfuß = 108 Kubikfuß.
1 Schachtrute = 144 Kubikfuß.

Annähernde Vergleichung der deutschen mit den früheren preußischen.

1 Kubikmeter = $32^{9}/_{26}$ Kubikfuß.
1 Kubikcentimeter = $^{1}/_{18}$ Kubikzoll.
1 Liter = $^{7}/_{8}$ Quart.
1 Liter = $^{9}/_{10}$ Metze.
1 Faß oder Hektoliter = $^{8}/_{11}$ Ohm.
1 Scheffel oder $^{1}/_{2}$ Faß = $14^{11}/_{20}$ Metzen.

d. Englische.

1 Imp. Gallon = 277,274 engl. Kubikzoll = 4,543458 franz. Liter.
1 Gallon = 4 Quarts = 8 Pints.
1 Bushel = 4 Peck = 8 Imp. Gallon.

e. Österreichische.

1 Wiener Maß = 4 Seidel = 0,0448 Wiener Kubikfuß = 1,415 franz. Liter.
1 Wiener Metze = 1,9471 Kubikfuß = 61,49945 Liter.

Tabelle 3.

Gewichtseinheiten.

a. Französische.

1 Kilogramm = dem Gewicht eines Kubikdezimeters oder Liters reinen Wassers von 4° C.
1 Kilogramm = 10 Hektogramm = 100 Dekagramm = 1000 Gramm.
1 Gramm = 10 Dezigramm = 100 Centigramm = 1000 Milligramm.

---

b. Deutsche.

1 Kilogramm = dem Gewicht eines Liters destillierten Wassers bei 4° C.
1 Kilogramm = 1000 Gramm.
1 Dekagramm oder Neulot = 10 Gramm.
1 Gramm = 1000 Milligramm.
1 Zentner = 50 Kilogramm.
1 Tonne = 1000 Kilogramm.

---

c. Frühere preußische.

1 altes Pfund 467,711 franz. Gramm = dem Gewichte von $^1/_{66}$ Kubikfuß Wasser von 16,25° C.
1 alter Zentner = 110 Pfund; 1 Pfund = 32 Lot; 1 Lot = 4 Quentchen.
1 neues (Zollvereins-) Pfund = 500 Gramm = 1,102305 engl. Handelspfund (Avoir-du-poids) = dem Gewicht von $\frac{1}{61{,}7354}$ preuß. Kubikfuß Wasser bei 15° R. = dem Gewicht von $\frac{1}{61{,}83168}$ preuß. Kubikfuß Wasser in seiner größten Dichtigkeit bei 4° C.
1 neuer Zentner = 100 Pfund; 1 Pfund = 30 Lot; 1 Lot = 10 Quentchen; 1 Quentchen = 10 Cent; 1 Cent = 10 Korn.
1 Pfund Medizinalgewicht = 24 Lot = 12 Unzen = 96 Drachmen = 288 Skrupel = 5760 Gran (1 Gran = dem Gewichte eines Weizenkorns).
1 Schiffslast = 40 Zentner.
Bei Münzen: 1 Pfund = 10 000 Aß.

Vergleichung der deutschen mit den früheren preußischen (genau).

1 Pfund = 1 Pfund; 1 Neulot oder Dekagramm = $^{8}/_{5}$ Lot = 6 Quentchen.
1 Gramm = 6 Cent; 1 Dezigramm = 6 Korn = 2 Aß (bei Münzen).
1 Centigramm = $^{3}/_{5}$ Korn; 1 Milligramm = $^{3}/_{50}$ Korn.
1 Tonne = $^{1}/_{2}$ Schiffslast. 1 Aß = 5 Centigramm.

---

d. Englische.

1 engl. Troy-Pfund = 12 Unzen = 240 Pfenniggewichte = 5760 Grän = 373,244 franz. Gramm.
1 engl. Pfund Avoir-du-poids (Handelspfund) = 16 Unzen = 256 Drachmen = 768 Skrupel = 7680 Grän = 453,595 franz. Gramm.
Das Gewicht eines engl. Kubikzolls Wasser von 62° F. = 250,458 engl. Troy-Grän = 16,386 franz. Gramm.

---

e. Österreichische.

1 Wiener Pfund = 560,0164 franz. Gramm = dem Gewichte von $\frac{1}{56,4}$ Wiener Kubikfuß bei 12° R. = 1,120033 Zollvereinspfund.
1 Wiener Zentner = 100 Pfund; 1 Pfund = 32 Lot; 1 Lot = 4 Quentchen.
1 Wiener Apothekerpfund = 24 Lot = 12 Unzen = 96 Drachmen = 288 Skrupel = 5760 Gran.

Tabelle 4.

Angabe einiger Geschwindigkeiten (in der Sekunde).

Mittlere Stromgeschwindigkeit in Flüssen	1	Meter.
Mäßiger Wind	3 bis 5	„
Sturm	15 bis 20	„
Büchsenkugel	bis zu 1000	„
Kanonenkugel	bis zu 6	Kilometer.
Luftstrom aus einem 20 Meter hohen Schornsteine	5	Meter.
Dampfschiffe	5 bis 8	„
Gewöhnlicher Eisenbahnzug	8	„
Schnellzug	14	„
Gewöhnlicher Fußgänger	1,3 bis 1,6	„
Geübter Schlittschuhläufer	11 bis 12	„
Adler	30	„

Fliege	1,6 Meter.
Pferd im Schritt	0,9 bis 1,1 „
Pferd im Trott	3 „
Pferd im Galopp	8 bis 9 „
Windhund	25 „
Englischer Wettrenner	25 „
Ein Punkt der Erde unter dem Äquator bei der Drehung um ihre Achse	469 „
Der Mittelpunkt der Erde bei ihrem Laufe um die Sonne	über 4 Meilen.
Der Schall in der Luft bei einer Temperatur von 10° C.	333 Meter.
Das Licht in der Luft	299 300 Kilometer = nahe 40 000 Meilen.
Die Elektrizität in einem Kupferdraht	= 40 000 „

Tabelle 5.

Zusammenstellung einiger in der Physik oft gebrauchten Werte.

A. Der Wert von g (Beschleunigung der Schwerkraft) ist:

unter 0° Breite = 9,78103 Meter = 31,16430 preuß. Fuß.
„ 45° „ = 9,80606 „ = 31,24406 „ „
„ 90° „ = 9,83109 „ = 31,32380 „ „
„ der Breite von φ^0 = $9{,}78103\,(1 + 0{,}00511781\ \sin\varphi^2)$ Meter.
= $31{,}16430\,(1 + 0{,}00511781\ \sin\varphi^2)$ preuß. Fuß.
Mittlerer Wert von g in Deutschland = 9,81 Meter = nahe 31,25 preuß. Fuß.

B. Die Länge des Sekundenpendels ist:

unter 0° Breite = 0,9910256 Meter = 3,1576052 preuß. Fuß.
„ 45° „ = 0,9935615 „ = 3,1656850 „ „
„ 90° „ = 0,9960974 „ = 3,1737650 „ „
„ der Breite von φ^0 = $0{,}9910256\,(1 + 0{,}00511781\ \sin\varphi^2)$ Meter.
= $3{,}1576052\,(1 + 0{,}00511781\ \sin\varphi^2)$ preuß. Fuß.

C. Gewicht des Wassers und der Luft.

1 Liter (Kubikdezimeter) Wasser von 4° C. wiegt ein Kilogramm.
1 preuß. Kubikfuß Wasser von 15° R. (18¾° C.) wiegt 61,7354, also nahe 61,75 Pfund.
1 preuß. Kubikzoll Wasser von 15° R. (18¾° C.) wiegt 1,071795, also nahe 1,07 Lot.
1 Liter atmosphärische Luft von 0° C. Temperatur und bei 0,76 Meter Druck wiegt in Paris (60 Meter über dem Meer) 1,293187 Gramm.
Verhältnis dieses Gewichts zu dem eines gleichen Volumens Wasser und Quecksilber wie

1 : 773,28 : 10513,5.

1 preuß. Kubikfuß atmosphärische Luft von 0° C. Temperatur und bei 0,76 Meter Druck wiegt 0,07996 Pfund, also nahe 2,4 preuß. Lot.

Gewicht eines Liter Luft bei dem Queckſilberdruck p Centimeter, der Temperatur t^0 C., der geogr. Breite φ, der Höhe über dem Meere h Meter (der mittlere Erdradius $R = 6\,366\,198$ Meter)

$$= 1{,}29743 \cdot \frac{p}{(1 + 0{,}00366\,t \,.\, 76)} \cdot (1 - 0{,}00265 \cos 2\,\varphi) \cdot \left(1 - \frac{2h}{R}\right) \text{Gramm.}$$

D. Der mittlere Druck der Atmoſphäre wird gerechnet:

bei 0,76 Meter = 760 Millimeter Queckſilberſäule zu 1,033 Kilogramm auf den Quadratcentimeter;

bei 28 Par. Zoll (nahe = 29 preuß. Zoll) Queckſilberhöhe zu 14 Zollvereinspfund auf den preuß. Quadratzoll.

E. Die halbe große Achſe der Erde = 6377398,1 Meter,
„ „ kleine „ „ „ = 6356079,9 „
Mittlerer Halbmeſſer der Erde . = 6366739 „
Halbmeſſer der Erde, genähert aus
deren Umfang berechnet . . . $= \frac{2 \,.\, 10^7}{\pi} = 6\,366\,198$ Meter.
Volumen der Erde . . . . . = 1081 Trillionen Kubikmeter.
Mittlere Dichtigkeit der Erde = nahe 6 der Dichtigkeit des Waſſers.

Tabelle 6.

Beobachtete Länge des Sekundenpendels in verſchiedenen Breiten.

Name der Orte	Geographiſche Breite	Länge des einfachen Sekundenpendels in	
		preuß. Fuß	Metern
St. Thomas	0° 24′ 14″	3,15795	0,991134
Jamaika	17 56 7	3,15911	0,991478
New-York	40 42 43	3,16450	0,993159
Paris	48 50 14	3,16671	0,993846
London	51 31 8	3,16754	0,994123
Berlin	52 31 12	3,16785	0,994241
Königsberg	54 42 51	3,16838	0,994410
Drontheim	63 25 54	3,17040	0,995013
Spitzbergen	79 49 58	3,17364	0,996036

Tabelle 7.

A. Elastizität und absolute Festigkeit einiger Körper. (Aus Weisbachs Ingenieur- und Maschinen-Mechanik.)

In dieser Tabelle bezeichnet

E den Elastizitätsmodul, d. h. das Gewicht in Kilogrammen, durch welches ein Stab von 1 Quadratmillimeter Querschnitt um seine eigene Länge ausgedehnt werden würde, wenn diese Ausdehnung noch innerhalb der Elastizitätsgrenze läge.

d_1 denjenigen Bruchteil der Länge eines Körpers, um welchen derselbe gedehnt werden darf, ohne eine bleibende Verlängerung zu erleiden, also

$d_1 E$ das Gewicht, welches ein Stab von 1 qmm Querschnitt tragen kann, ohne eine bleibende Verlängerung zu erleiden und das man häufig den Tragmodul nennt.

K den Festigkeitsmodul, nämlich das Gewicht, durch welches ein Stab von 1 qmm Querschnitt zerrissen wird. Als Sicherheitsmodul wird gewöhnlich $\frac{K}{n}$ genommen, indem bei Hölzern $n = 10$, bei Metallen $n = 3$ bis 6 gesetzt wird.

S bezeichnet den Sicherheitsmodul nach den Erfahrungen von Morin, gleichfalls für 1 qmm Querschnitt.

Bezeichnung der Stoffe	E	d_1	$d_1 E$	K	S
Eichen-, Tannen- und Buchenholz	1 200	$1/600$	2,00	8,00	1,65
Birken- und Eschenholz	1 120	$1/855$	1,31	12,00	2,40
Hanfseile, trocken	—	—	—	5,00	1,25
Lederriemen	—	—	—	2,00	0,25
Stabeisen	23 200	$1/1520$	15,30	41,00	6,50
Eisendraht	20 800	$1/1250$	16,64	60,00	10,00
" ausgeglüht	—	—	—	36,00	—
Gußeisen	12 700	$1/1200$	10,60	14,00	3,50
Gußstahl	22 000	$1/835$	26,35	65,70	—
" gehärtet	32 800	—	—	130,00	—
Kupfer, zu Draht gezogen	—	—	—	40,30	1,23
Meßing, gegossen	6 100	$1/1820$	4,62	12,70	—
" zu Draht gezogen	9 300	$1/742$	12,53	50,00	—
Blei, gegossen	1 260	$1/477$	2,64	1,25	0,06
" zu Draht gezogen	1 800	$1/1500$	1,20	2,07	—
Marmor	2 000	—	—	1,40	—
Sehr harter Backstein	—	—	—	—	2,00
Gewöhnliche eiserne Kette	—	—	—	28,00	10,00

B. Rückwirkende Festigkeit.

Bezeichnet K den Festigkeitsmodul beim Zerdrücken, d. h. das Gewicht in Kilogrammen, welchem ein Prisma von 1 Quadratcentimeter Querschnitt noch widerstehen kann, so ist die Tragkraft eines Prismas von a qcm Querschnitt $= Ka$. Statt des Festigkeitsmoduls nimmt man aber den Sicherheitsmodulus $\frac{1}{5} K$ bis $\frac{1}{20} K$

	$K =$
Für Basalt ist	1800
„ Gneis ist	370
„ Granit ist	400 bis 800
„ Kalkstein ist	110 „ 400
„ Marmor ist	230 „ 800
„ Mörtel ist	35 „ 63
„ Sandstein ist	100 „ 900
„ Ziegelstein ist	40 „ 150
„ Fichtenholz ist	480 „ 550
„ Eichenholz ist	170 „ 480
„ Tannenholz ist	130
„ Gußeisen ist	9600
„ Schmiedeeisen ist	4800
„ Kupfer ist	4000

C. Relative Festigkeit.

Bezeichnet in Centimetern b die Breite, h die Höhe, l die Länge eines horizontal liegenden und an seinem einen Ende befestigten (eingemauerten) parallelepipedischen Balkens, so ist die kleinste Last, welche, am anderen Ende angebracht, den Balken abbricht, in Kilogrammen $Q = K_1 \frac{bh^2}{l}$, worin der relative Festigkeitsmodul K_1 im Mittel aus vielen Beobachtungen den Wert hat

für Hölzer	150
„ Gußeisen	500
„ Schmiedeeisen	600
„ Mormor	22
„ Sandstein	8

Als relativen Sicherheitsmodul nimmt man gewöhnlich bei Hölzern den zehnten, bei Metallen und Steinen den vierten Teil der obigen Werte.

Tabelle 8.

A. Koeffizienten der gleitenden Reibung (während der Bewegung).

Benennung der sich reibenden Körper	Zustand der Flächen und Art der Schmieren							
	Trocken	Mit Wasser benetzt	Olivenöl	Schweinefschmalz	Unschlitt	Reine Wagenfschmiere	Trockene Seife	Fettig
Holz auf Holz im Mittel . .	0,36	0,25	—	0,07	0,07	—	0,15	0,12
Metall auf Metall im Mittel	0,18	0,31	0,07	0,09	0,09	0,15	0,20	0,13
Holz auf Metall oder umgekehrt im Mittel	0,42	0,24	0,06	0,07	0,08	0,10	0,20	0,14
Hanfseile u. Gurten auf Eichenholz	0,45	0,332	—	—	—	—	—	—
Hanfseile und Gurten auf Gußeisen	—	—	0,15	—	0,19	—	—	—
Sohlenleder mit der Kante auf Holz oder Metall	0,34	0,31	0,14	—	0,14	—	—	—
desgl. flach { roh	0,54	0,36	0,16	—	0,20	—	—	—
desgl. flach { geklopft . . .	0,30	—	—	—	—	—	—	—

Bei Schlittschuhen auf glattem Eis kann der Reibungskoeffizient = 0,015 angenommen werden.

B. Koeffizienten der Zapfenreibung.

Schmiedeeisen oder Gußeisen auf Bronze oder Gußeisen:
bei gewöhnlicher Schmierung mit Fett 0,075,
„ guter „ „ „ 0,054.

C. Koeffizienten der wälzenden oder rollenden Reibung.

Ist D der Druck, r der Halbmesser der Walze oder Rolle und bezeichnet f den hierher gehörigen Reibungskoeffizienten, so ist die rollende Reibung R (in den Einheiten von D ausgedrückt) $= f \cdot \frac{D}{r}$.

Ist r in Centimetern gegeben, so ist
für Guajak- oder Pockholz $f = 0{,}048$
„ Ulmenholz . . . . . $f = 0{,}082$.

D. Koeffizient der Steifigkeit des Seils.

Versuchen gemäß ist der durch die Steifigkeit eines Seils verursachte Widerstand, welcher bei der Umlegung des Seils um eine Rolle zu überwinden ist, der Spannung Q des Seils direkt, dem Halbmesser r der Rolle umgekehrt, und für ein neues dickes Seil der zweiten, für ein altes dickes der 1,5ten, für ein sehr dünnes Seil der ersten Potenz des Seildurchmessers d direkt proportional, so daß (nach Burg) die zur Überwindung dieses Widerstandes erforderliche Kraft F je nach Beschaffenheit des Seils

$$F = K\frac{d^2}{r}\,Q \text{ oder } = K\frac{d^{1.5}}{r}\,Q \text{ oder } = K\frac{d}{r}\,Q$$

ist, worin K einen durch Erfahrung ermittelten Koeffizienten bezeichnet, der $= 1/2$ gesetzt werden kann, während d und r in beliebigen aber gleichen Einheiten auszudrücken sind.

Tabelle 9.

Specifische Gewichte.

a. Starre Körper.

Körper	Spezifisches Gewicht	Körper	Spezifisches Gewicht
Achat	2,590	Holz, lufttrocknes von:	
Alabaster	2,700	Ahorn	0,645
Anthracit	1,800	Apfelbaum	0,734
Asphalt	1,100	Birke	0,738
Basalt	2,014—3,310	Birnbaum	0,732
Bernstein	1,075	Buche (Rotbuche)	0,750
Bimsstein	0,914—1,647	Buchsbaum	0,942
Braunkohle	1,0—1,4	Zeder	0,575
Butter	0,942	Ebenholz, grünes	1,210
Dachschiefer	2,670—3,500	„ schwarzes	1,187
Diamant	3,440—3,550	Edeltanne	0,555
Eis bei 0°	0,91—0,93	Eiche (Sommereiche)	0,650
Elfenbein	1,825	Erle	0,538
Feuerstein	2,58—2,63	Esche	0,670
Glas, grünes	2,811	Guajak	1,342
„ Fenster-	2,642	Hainbuche	0,728
„ Kristall-	2,892	Kiefer	0,550
„ Spiegel-	2,370—2,560	Kork	0,240
„ Flint- (Mittel)	3,300	Nußbaum	0,660
Glimmer	2,654—2,934	Pappel	0,390
Granit	2,540—3,063	Pockholz	1,263
Graphit	2,250—2,410	Rottanne	0,481

Körper	Spezifisches Gewicht	Körper	Spezifisches Gewicht
Holz, lufttrocknes, von:		Metalle: Nickel	8,477
Steineiche	0,707	Platin	21,450
Holzkohle	0,280—0,440	Quecksilber bei 0 Grad	13,598
Jod	4,948	„ gefroren	15,612
Kalkstein (dichter)	2,700	Silber, gehämmert	10,511
Kampfer	0,986	„ gegossen	10,477
Kautschuk	0,934	Wismut	9,822
Kreide	1,800	Zink	7,191
Lava	2,800	Zinn	7,291
Marmor	2,7—2,8	Metall-Legierungen:	
Mauerwerk von Ziegelsteinen mit Kalkmörtel, trocken	1,471—1,593	Argentan	8,563
Mauerwerk von Bruchsteinen, trocken	2,400	Kanonenmetall	8,441—9,235
Metalle: Aluminium	2,5	Messing	7,600—8,800
Antimon	6,640	Pech, weiß	1,072
Arsenik	5,672	Porzellan	2,319
Blei, gegossen	11,352	Phosphor	1,770
„ gepreßt	11,388	Quarz	2,652
Eisen, geschmiedet	7,788	Sandstein	2,0—2,7
„ gegossen	7,207	Schwefel	2,072
„ -Draht	7,600	Schwerspat	4,560
„ -Stahl, gehärtet	7,816	Saphir	3,900
„ ungehärtet	7,833	Smaragd	2,68—2,8
„ Gußstahl	7,919	Steinkohle	1,15—1,50
Gold, gehämmert	19,362	Steinsalz	2,14—2,41
„ gegossen	19,258	Talg	0,942
Kalium	0,865	Topas	3,530
Kobalt	8,513	Wachs (weißes)	0,969
Kupfer, gehämmert	8,878	Walrat	0,943
„ gegossen	8,788	Weizen	1,346
Natrium	0,972	Ziegel (gebrannter)	1,4—2,2
		Zinnober	8,090
		Zucker, weißer	1,606

b. Flüssigkeiten.

Körper	Spezifisches Gewicht	Körper	Spezifisches Gewicht
Äther (Schwefeläther) bei 12,5° C.	0,733	Milch	1,02—1,04
Alkohol (Weingeist) bei 15° C. und bei einem Gehalte an absolutem Alkohol		Öle: Leinöl	0,940
		Olivenöl	0,915
		Rüböl, gutes	0,914
von 100 Volumproz.	0,7947	Quecksilber bei 0°	13,598
„ 95 „	0,8168	Salpetersäure bei einem Gehalte an wasserfreier Säure von 79,7 Proz.	1,500
„ 90 „	0,8346	„ 73,3 „	1,479
„ 85 „	0,8502	„ 59,8 „	1,419
„ 80 „	0,8645	„ 45,4 „	1,332
„ 75 „	0,8799	„ 30,3 „	1,221
„ 70 „	0,8907	„ 26,3 „	1,190
„ 65 „	0,9027	Salzsäure, flüssige, von 39,675 Proz. Chlorgeh.	1,200
„ 60 „	0,9141	35,310 „ „	1,180
„ 55 „	0,9248	29,757 „ „	1,152
„ 50 „	0,9348	23,805 „ „	1,120
„ 45 „	0,9440	17,854 „ „	1,090
„ 40 „	0,9523	Schwefelsäure, konzentr.	1,850
„ 35 „	0,9595	Seewasser	1,02—1,04
„ 10 „	0,9656	Wein	0,9—1,05
Bier	1,023—1,034	Wasser bei 4° C.	1,000
Brom	2,99		

c. Gasförmige Körper und Dämpfe auf die Temperatur von 0° und 0,76 Meter (336,9 Par. Linien) Druck reduziert.

Namen	Spezif. Gewicht Luft = 1	Spezif. Gewicht Wasser = 1000	Namen	Spezif. Gewicht Luft = 1	Spezif. Gewicht Wasser = 1000
Ätherdampf	2,5830	3,3556	Kohlenwasserstoff, ölbildendes Gas	0,9740	1,2653
Alkoholdampf	1,6010	2,0799	Phosphordampf	4,3256	5,6194
Atmosphärische Luft	1,0000	1,2991	Quecksilberdampf	6,9785	9,0658
Bromdampf	5,3930	7,0060	Sauerstoff	1,1056	1,4324
Chlor	2,4403	3,1702	Schwefeldampf	6,6542	8,6445
Chlorwasserstoff	1,2544	1,6296	Schwefeldioxyd	2,2116	2,8731
Cyan	1,8120	2,3540	Schwefelwasserstoff	1,1778	1,5301
Joddampf	8,7011	11,3036	Stickstoff	0,9760	1,2675
Knallgas	0,4134	0,5371	Stickstoffoxydul	1,5273	1,9841
Kohlenstoffgas	0,8364	1,0866	Stickstoffoxyd	1,0393	1,3502
Kohlenoxyd	0,9695	1,2595	Wasserdampf bei 100° C.	0,6201	0,80557
Kohlendioxyd	1,5208	1,9757	Wasserstoff	0,0688	0,08938

Tabelle 10.

Kontraktions-Koeffizienten (m) beim Ausfluß von Flüssigkeiten.

I. Des Wassers.

a. Für Öffnungen in einer dünnen Wand bei vollkommener Kontraktion, d. h. wenn die Kontraktion von allen Seiten um die Öffnung herum stattfindet . . . . . $m = 0{,}62$

Für Öffnungen in einer dünnen Wand bei unvollkommener Kontraktion, und zwar

wenn die Kontraktion von 3 Seiten stattfindet $m = 0{,}642$
" " " " 2 " " $m = 0{,}664$
" " " " 1 Seite " $m = 0{,}697$

b. Für kurze cylindrische oder prismatische Ansatzröhren, ungefähr 2 bis 3 mal so lang als der Durchmesser oder die kleinste Dimension der Öffnung . . . . . $m = 0{,}82$

c. Für Ausmündungen von der Gestalt des zusammengezogenen Strahls $m = 0{,}95$

II. Der Luft.

a. Für Öffnungen in dünnen Wänden . . . . . $m = 0{,}65$
b. Für Öffnungen mit cylindrischen Ansatzröhren . . . . . $m = 0{,}93$
c. Für wenig konische Ansatzröhren . . . . . $m = 0{,}94$

Tabelle 11.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles ist in der atmosphärischen Luft bei $t°$ C. $= 331{,}7\sqrt{1 + 0{,}003665t}$ Meter in der Sekunde, und diese als Einheit genommen in

Kohlendioxyd	$= 0{,}786$	Quecksilber	$= 3{,}7$
Stickoxyd	$= 0{,}787$	Schwefelsäure	$= 3{,}95$
Ölbildendem Gas	$= 0{,}943$	Wasser, luftfrei	$= 4{,}22$
Sauerstoff	$= 0{,}952$	" lufthaltig	$= 4{,}30$
Kohlenoxyd	$= 1{,}013$	Salpetersäure (spezif. Gewicht 1,403)	$= 4{,}5$
Wasserstoff	$= 3{,}812$	Essigsäure	$= 4{,}5$
Alkohol	$= 3{,}5$		

Blei	= 4,2	Birnbaumholz	= 13
Gold	= 6	Rotbuchenholz	= 13
Fischbein	= 6,7	Ahorn	= 13
Zinn	= 7,5	Mahagoni	= 14
Silber	= 8	Ebenholz	= 14
Platin	= 8	Lindenholz	= 15
Nußbaumholz	= 10,5	Kirschbaumholz	= 15
Messing	= 11	Weidenholz	= 16
Eichenholz	= 11	Eisen und Stahl	= 15
Zink	= 11	Glas	= 17
Gebranntem Thon	= 10 bis 12	Tannenholz	= 17
Kupfer	= 11		

Tabelle 12.

A. Koeffizienten der Längen-Ausdehnung starrer Körper durch die Wärme.

Körper	Verlängerung von 0° bis 100° C.		Körper	Verlängerung von 0° bis 100° C.	
Blei	0,002848	1/351	Platin	0,000856	1/1167
Eisen, geschmiedet	0,001167	1/856	Sandstein	0,001174	1/852
Gußeisen	0,001110	1/901	Silber	0,001909	1/524
Glas	0,000861	1/1161	Stahl, gehärtet	0,001225	1/816
Gold	0,001401	1/645	„ weich	0,001079	1/926
Holz (Tannen-) in der			Zink, gewalzt	0,003331	1/302
Richtung der Fasern	0,000380	1/2631	„ gegossen	0,002987	1/336
Klempnerlot	0,002505	1/399	Zinklot (1 Zink und		
Kupfer	0,001717	1/582	2 Kupfer)	0,002058	1/486
Marmor von Carrara	0,000849	1/1178	Zinn	0,002173	1/450
Messing	0,001920	1/521	Ziegel	0,000500	1/2000

Eis dehnt sich zwischen —27,5° und —1,25° für 1° C. aus um 0,000052 seiner Länge bei 0°.

B. Kubische Ausdehnung des Quecksilbers (nach Regnault).

Das Volum	= 1,000000	bei	0° C.
wird	= 1,009013	„	50 „
	1,018153	„	100 „
	1,027419	„	150 „
	1,036811	„	200 „
	1,046329	„	250 „
	1,055973	„	300 „
	1,065743	„	350 „

C. Kubische Ausdehnung des Wassers (nach Kopp).

Temperatur	Volumen des Wassers	Temperatur	Volumen des Wassers
0° C.	1,000000	10° C.	1,000124
1	0,999947	20	1,001567
2	0,999908	30	1,004064
3	0,999885	40	1,007531
4	0,999875	50	1,011766
5	0,999883	60	1,016590
6	0,999903	70	1,022246
7	0,999938	80	1,028581
8	0,999986	90	1,035397
9	1,000048	100	1,042986

D. Ausdehnungs-Koeffizienten der Gase (nach Regnault).

Atmosphärische Luft	0,003665	Kohlendioxyd	0,003688
Wasserstoff	0,003667	Stickoxydul	0,003676
Stickstoff	0,003668	Schwefeldioxyd	0,003845
Kohlenoxyd	0,003667	Cyangas	0,003829

auf die des

	Spezif. Wärme zwischen 0° bis 100° C.
	0,09342
	0,09486
	0,18949
	0,03243
	0,18440
	0,05701
	0,1175
	0,0308
	0,09555
	0,05623

= 0,570
= 0,654
= 0,504

	Spezif. Wärme zwischen 0° bis 100° C.
	0,082
	0,37
	0,07
	0,1
	0,21

C. Gase und Dämpfe (nach Regnault).

Namen	Spezif. Gewicht	Spezif. Wärme, die des Wassers = 1 für gleiche Gewichte
Atmosphärische Luft . . .	1	0,2377
Sauerstoff	1,1056	0,2182
Stickstoff	0,9713	0,2440
Wasserstoff	0,0692	3,4046
Chlor	2,4400	0,1214
Brom	5,39	0,0552
Wasserdampf	0,6210	0,4750
Alkoholdampf	1,5800	0,4513
Ätherdampf	2,5563	0,4810
Kohlendioxyd	1,5290	0,2164

Für die atmosphärische Luft und annähernd für die permanenten Gase überhaupt ist das Verhältnis der spezifischen Wärme bei konstantem Druck zu derjenigen bei konstantem Volum = 1,41 bis 1,42.

D. Mittlere spezifische Wärme einiger Stoffe bei verschiedenen Temperaturen.

					Mittlere spezif. Wärme		
Platin	zwischen	0°	bis	100° C.	0,03350	nach	Pouillet.
	„	0	„	300 „	434	„	„
	„	0	„	500 „	518	„	„
	„	0	„	700 „	602	„	„
	„	0	„	900 „	686	„	„
	„	0	„	1000 „	728	„	„
	„	0	„	1200 „	818	„	„
Quecksilber	„	5	„	10 „	0,0282	bei 13,582	spezif. Gew., nach Regnault.
	„	10	„	15 „	0,0283	„ 13,570	„ „ „ „
	„	15	„	20 „	0,0290	„ 13,558	„ „ „ „
	„	0	„	100 „	0,0330	nach Dulong und Petit.	
	„	0	„	300 „	0,0350	„ „ „ „	
Eisen	„	0	„	100 „	0,1098	„ „ „ „	
	„	0	„	300 „	0,1218	„ „ „ „	
Kupfer	„	0	„	100 „	0,0940	„ „ „ „	
	„	0	„	300 „	0,1013	„ „ „ „	
Zink	„	0	„	100 „	0,0927	„ „ „ „	
	„	0	„	300 „	0,1015	„ „ „ „	

Wärme	Produkt $s\,w$
66	0,144
93	0,285
61	0,352
84	0,381
56	0,408
48	0,432
56	0,487
47	0,515
14	0,535
32	0,620
95	0,683
32	0,686
94	0,845
14	0,898
09	0,924
22	0,977

Tabelle 15.

Schmelztemperatur und latente Schmelzwärme einiger Körper.

Körper	Schmelzpunkt	Latente Wärme	Körper	Schmelzpunkt	Latente Wärme
Queckſilber	— 39° C.	2,83	Blei	+ 335° C.	5,369
Brom	— 7,5	—	Wismut	265	12,64
Eis	0	79,25	Zink	450	28,13
Butter	+ 32	—	Salpeterſaures Natron	310,5	62,975
Phosphor	44,2	5,034	Salpeterſaures Kali	339	47,371
Wachs, weißes . . .	68	43,54	Antimon	440	—
Kalium	55	—	Silber ungefähr . .	1000	21,07
Natrium	90	—	Kupfer „ . .	1050	—
d'Arcets Legierung, beſtehend aus			Gold „ . .	1200	—
$Pb_2Sn_2Bi_3$ . . .	96	4,5	Gußeiſen „ . .	1100—1200	—
Jod	107	—	Stahl „ . .	1300—1400	—
Schwefel	111	9,368	Schmiedeeiſen ungef.	1600	—
Zinn	235	14,252	Platin ungefähr . .	1700	—

Roſes Metallgemiſch (1 Blei, 1 Zinn, 2 Wismut) ſchmilzt bei 94° C.
Woods „ (2 Blei, 1 Zinn, 4 Wismut, 1 Kadmium) ſchmilzt bei 65,5° C.

Tabelle 16.

A. Siedepunkt und latente Verdampfungswärme einiger Körper.

Körper	Siedepunkt	Latente Wärme	Körper	Siedepunkt	Latente Wärme
Stickoxydul	— 88° C.	—	Waſſer	+ 100° C.	536,0
Kohlendioxyd . . .	78	—	Fuſelöl	131	—
Cyan	18	—	Terpentinöl	293	74,04
Schwefeldioxyd . . .	10	95	Zitronenöl	165	79,81
Aldehyd	+ 20,8	—	Jod	176	84
Blauſäure	26,5	—	Phosphor	290	—
Schwefeläther . . .	35,0	90	Schwefel	400	120
Brom	63,0	97	Leinöl	316	—
Alkohol	78,4	208,3	Schwefelſäurehydrat (konzentriertes) . .	325	100
Holzgeiſt	59	—	Queckſilber	350	62
Steinöl	85	—			

Latente Wärme des Waſſerdampfes bei t° C. $= 607 - 0{,}708\,t$. (Nach Regnault und Clauſius.)

B. Siedepunkt des reinen Waſſers bei verſchiedenen Barometerſtänden.

Siedhitze	Barometerſtand in Pariſer Linien	Unterſchiede
101° C.	349,00	
		6,05
100,5	342,95	
		6,05
100	336,90	
		6,05
99,5	330,85	
		6,05
99	324,80	
		6,00
98,5	318,80	
		5,93
98	312,87	
		5,80
97,5	307,07	
		5,59
97	301,48	
		5,26
96,5	296,22	
		4,88
96	291,34	

C Beobachtete Siedepunkte des reinen Waſſers in verſchiedenen Höhen.

Orte	Höhe in Metern	Siedepunkt
Montblanc	4775	84° C.
Pik von Teneriffa	3710	88
St. Bernhard	2491	92
St. Gotthard	2075	92,9
Neuchâtel	438	98,5
Paris (Obſervat.)	65	99,7
Berlin	40	99,8

Tabelle 17.

Einige Kälte erregende Mischungen.

Mischungen	Die Temperatur sinkt von	bis
1 Teil Wasser mit 1 Teile salpetersaurem Ammoniak	+ 10°	— 15° C.
Gleiche Teile verdünnte Schwefelsäure (1 Teil Säure mit 1 Teil Wasser) und Glaubersalz	+ 10	— 8
5 Teile Salzsäure und 8 Teile Glaubersalz	+ 12	— 18
Gleiche Teile Schnee und Kochsalz	0	— 18
Gleiche Teile Schnee und kristallisiertes Chlorcalcium	0	— 45

Tabelle 18.

A. Maximum der Spannkraft des Wasserdampfes und Dichtigkeit desselben bei verschiedenen Temperaturen nach Regnault.

Temperatur t	Spannkraft in Millimetern p	Druck auf ein Quadratcentimeter in Kilogr. $0{,}0001 \cdot p \cdot 13{,}596$	Dichtigkeit des Dampfes (Gew. von 1 l Dampf in Kilogr.)
— 32°	0,320	0,00043	
— 30	0,386	0,00052	
— 25	0,605	0,00082	
— 20	0,927	0,00126	
— 15	1,400	0,00190	
— 10	2,093	0,00285	
— 5	3,113	0,00423	
0	4,600	0,00625	0,0000048
+ 1	4,940	0,00671	52
2	5,302	0,00721	56
3	5,687	0,00773	60
4	6,097	0,00829	64
5	6,543	0,00888	68
6	6,998	0,00951	73

Temperatur t	Spannkraft in Millimetern p	Druck auf ein Quadratcentimeter in Kilogr. $0{,}0001 \cdot p \cdot 13{,}596$	Dichtigkeit des Dampfes (Gew. von 1 l Dampf in Kilogr.)
+ 7°	7,492	0,01019	0,0000077
8	8,017	0,01090	81
9	8,574	0,01166	88
10	9,165	0,01246	0,0000094
11	9,792	0,01331	0,0000100
12	10,475	0,01422	106
13	11,162	0,01518	113
14	11,908	0,01619	120
15	12,699	0,01727	128
16	13,536	0,01840	136
17	14,421	0,01961	144
18	15,357	0,02088	151
19	16,346	0,02222	163
20	17,391	0,02365	0,0000172
21	18,495	0,02515	183
22	19,659	0,02673	194
23	20,888	0,02840	205
24	22,184	0,03016	216
25	23,550	0,03202	230
26	24,988	0,03397	243
27	26,505	0,03604	257
28	28,101	0,03821	271
29	29,782	0,04049	286
30	31,548	0,04289	0,0000302
35	41,827	0,05687	391
40	54,906	0,07465	507
45	71,391	0,09706	650
50	91,982	0,12505	0,0000826
55	117,478	0,15972	0,0001041
60	148,791	0,20323	1302
65	186,945	0,25417	1616
70	233,093	0,31692	1991
75	288,517	0,39227	2435
80	354,643	0,48217	2960
85	433,041	0,58877	3574
90	525,450	0,71440	4289
95	633,778	0,86168	5119
100	760,000	1,03330	6075
105	906,410	1,23236	7172
110	1075,370	1,4621	8426
115	1269,410	1,7259	0,0009849
120	1491,280	2,02755	0,0011468
125	1743,88	2,37098	13277
130	2030,28	2,76037	15316
135	2353,73	3,20013	17596
140	2717,63	3,69490	20137
145	3125,55	4,24950	22957
150	3581,23	4,86904	26082
155	4088,56	5,55881	29525
160	4651,62	6,32434	33311
165	5274,54	7,17127	37467
170	5961,66	8,10547	42000
175	6717,43	9,13302	46949
180	7546,39	10,2601	52328

Temperatur t	Spannkraft in Millimetern p	Druck auf ein Quadratcentimeter in Kilogr. $0{,}0001 \cdot p \cdot 13{,}596$	Dichtigkeit des Dampfes (Gew. von 1 l Dampf in Kilogr.)
+ 185°	8453,23	11,4930	0,0058140
190	9442,70	12,8383	64740
195	10519,63	14,3025	71276
200	11688,96	15,8923	0,0078616
205	12955,66	17,6145	
210	14324,80	19,4760	
215	15801,33	21,4832	
220	17390,00	23,6439	
225	19097,04	25,9643	
230	20926,40	28,4515	

Den Beobachtungen Regnaults schließt sich die folgende Formel am besten an

$$\log p = a - b\,\alpha^x - c\,\beta^x$$

worin $x = t + 20$

$a = 6{,}2640348$

$\log b = 0{,}1397743$

$\log \alpha = 0{,}9940493 - 1$

$\log c = 0{,}6924351$

$\log \beta = 0{,}9983438 - 1.$

B. Spannkraft der Dämpfe einiger anderen Flüssigkeiten.

Äther bei	Alkohol bei	Chloroform bei	Quecksilber bei	Druck in Atmosphären
34,96° C.	78,30° C.	60,18° C.	357,35° C.	1
55,87	96,82	82,59	397,32	2
69,61	108,83	97,55	423,01	3
80,21	117,98	109 04	442,47	4
88,96	125,48	118,56	458,33	5
96,47	131,91	126,78	471,85	6
103,08	137,57	134,08	483,71	7
109,00	142,65	140,66	494,32	8
114,37	147,28	146,70	505,15	9
119,39	151,54	152,34	513,91	10

e.

einer Verbrennung die

älteren Bestimmungen.

neueren Bestimmungen
n Favre und Silber-
ann.

64,7	
94,6	
111,9	
122,2	
148,6	
6083	
5510	Gewichtsteile Wasser um 1° C. erhöht
5810	
5283	
0455	
8323	
0872	
9648	
7720	
6400	

Tabelle 20.

Wärmeleitungsvermögen einiger Körper (nach Wiedemann).

Körper	In der Luft	Im leeren Raum	Körper	In der Luft	Im leeren Raum
Silber	1,000	1,000	Stahl	0,116	0,103
Kupfer	0,736	0,748	Blei	0,085	0,079
Gold	0,532	0,548	Platin	0,084	0,094
Messing	0,236	0,240	Neusilber	0,063	0,073
Zinn	0,145	0,154	Roses Metall	0,028	0,028
Zink	0,281	—	Wismut	0,018	—
Eisen	0,119	0,101			

Dieselben Zahlen gelten auch für die elektrische Leitung.

Tabelle 21.

A. Lichtbrechungsverhältnisse und daraus berechnete Grenzwinkel für einige Substanzen.

Namen der Körper	Brechungsverhältnisse	Grenzwinkel
Chromsaures Bleioxyd	2,926	19° 59′
Diamant (rot)	2,414	24 28
Diamant (grün)	2,428	24 19
Granat	1,815	33 27
Saphir	1,768	34 26
Topas	1,610	38 24
Flintglas (Nr. 13 von Fraunhofer)	1,642	38 41
Crownglas (Nr. 9 von Fraunhofer)	1,533	40 43
Quarz	1,548	40 15
Steinsalz	1,498	
Alaun	1,457	43 21
Flußspat	1,436	
Eis	1,310	

Namen der Körper	Brechungsverhältnisse	Grenzwinkel
Wasser	1,336	48°28′
Schwefelkohlenstoff	1,336	
Terpentinöl	1,476	
Schwefelsäure von 1,84 spezif. Gewicht	1,440	
Alkohol	1,372	
Äther	1,358	

Atmosphärische Luft	1,000294
Sauerstoff	1,000272
Wasserstoff	1,000138
Stickstoff	1,000300
Kohlendioxyd	1,000449
Ammoniakgas	1,000385
Chlor	1,000772
Stickstoffoxydgas	1,000503
Ölbildendes Gas	1,000678

B. Atmosphärische Refraktion bei 760 mm Barometerstand und 10° C. Temperatur.

Scheinbare Zenithdistanz	Refraktion
10°	10,3″
20°	21,2
30°	33,6
40	48,9
50	1′ 9,3″
60	1′ 40,6
70	2′ 38,8
80	5′ 19,8
85	9′ 54,3
87	14′ 28,1
89	24′ 21,2
90	33′ 46,3

Tabelle 22.

Brechungsvermögen und Zerstreuungsvermögen einiger Körper.

Brechendes Mittel	Spezifisches Gewicht (d)	Brechungsverhältnis der mittl. Strahlen (n)	Brechungsvermögen: absolutes (n^2-1)	Brechungsvermögen: spezifisches $\left(\frac{n^2-1}{d}\right)$	Zerstreuungsvermögen: $\left(\frac{n_v-n_r}{n-1}\right)$
Flintgas	3,723	1,642	1,696	0,799	0,052
Crownglas	2,535	1,533	1,350	0,544	0,033
Wasser	1	1,336	0,785	0,785	0,035
Eis	0,916	1,307	0,708	0,755	—
Steinsalz	2,143	1,557	1,424	0,664	0,053
Bergkristall	2,653	1,562	1,440	0,545	0,026
Topas, gelber	3,550	1,638	1,683	0,474	0,025
Saphir, blauer . . .	4,000	1,794	2,218	0,554	0,026
Schwefel (nat. Krist.) .	2,033	2,115	3,473	1,708	0,130
Diamant	3,521	2,487	5,185	1,473	0,038

Tabelle 23.

Brechungsexponenten für die einzelnen Farbestreifen im Spektrum.

Brechende Substanzen	B n_1	C n_2	D n_3	E n_4	F n_5	G n_6	H n_7
Flintglas Nr. 13	1,627749	1,629681	1,635036	1,642024	1,648260	1,660285	1,671062
Crownglas Nr. 9	1,525832	1,526849	1,529587	1,533005	1,536052	1,541657	1,546566
Wasser	1,330935	1,331712	1,333577	1,335851	1,337818	1,341293	1,344177
Doppelspat							
(ord. Str.) . .	1,6531	1,6545	1,6585	1,6636	1,6680	1,6762	1,6833
(extr. Str.) . .	1,4839	1,4845	1,4863	1,4887	1,4907	1,4945	1,4978
Bergkristall							
(ord. Str.) . .	1,5409	1,5418	1,5442	1,5471	1,5496	1,5542	1,5582
(extr. Str.) . .	1,5499	1,5508	1,5533	1,5563	1,5589	1,5636	1,5677

Dispersion

	$\frac{G_1-F_1}{G_2-F_2}$	$\frac{H_1-G_1}{H_2-G_2}$
	2,145	2,195
	3,460	3,726
	1,613	1,697

zugehörige

Fraunhofer).

Schwingungs-zahl in Billionen
450
472
526
589
640
722
790

Tabelle 26.

Magnetische Deklination, Inklination und horizontale Intensität an einigen Orten.

Orte		Deklination	Inklination	Horizontale Intensität
Kasan	1842	— 3° 24′	68° 22′	1,877
Moskau	1842	+ 3 2	68 57	1,762
Petersburg	1842	6 21	71 0	1,658
Wien	1850	13 33	64 22	1,995
München	1850	16 14	65 25	1,925
Berlin	1845	16 32	67 35	1,780
Göttingen	1845	17 43	67 32	1,785
Freiburg	1850	17 39	65 28	1,934
Paris	1858	19 36	66 26	1,876
Madrid	1858	20 8	61 6	2,172
Brüssel	1850	20 41	67 56	1,771
Lissabon	1858	21 40	60 39	2,210
Greenwich	1840	22 29	68 48	1,739
Dublin	1845	27 0	67 56	1,771

Tabelle 27.

Spezifischer Leitungswiderstand gegen den elektrischen Strom.

1. Leitungswiderstand der Metalle.

	Auf den des Kupfers = 1 bezogen	Auf den des Quecksilbers = 1 bezogen, nach	
		Matthiessen	Siemens
Silber	0,96	0,0163	0,0156
Kupfer (rein)	1,00	0,0210	0,0182
Zink	2,82	0,0594	—
Messing	—	—	0,0833
Eisen	6	0,1129	—
Platin	8	0,1548	0,1212
Blei	9,96	0,2098	—
Neusilber	11,28	0,2125	—
Quecksilber	60	1,0000	1,0000
[Graphit	1106,0]	—	—
[Gaskohle	2037,0]	—	—

Die reciproken Werte dieser Zahlen geben die spezifische Leitungsfähigkeit für Elektrizität und nahezu auch für die Wärme. (Vergl. Tabelle 20.)

2. **Leitungswiderstand der Flüssigkeiten, der des Platins = 1 gesetzt, bei 16 bis 20° C.**

31,17	Grm.	Kupfervitriol	in	1000	Kubik-Centimeter	Wasser	7 805 000
77,92	"	"	"	"	"	"	3 514 000
124,68	"	"	"	"	"	"	2 567 000
187,02	"	"	"	"	"	"	1 936 000
33,7	"	SO_3	"	"	"	"	499 000
114,3	"	"	"	"	"	"	147 200
458,4	"	"	"	"	"	"	79 560
748,3	"	"	"	"	"	"	108 300

Tabelle 28.

Die Atomgewichte der einfachen Körper.

(Nach Graham-Ottos Lehrbuch 1878.)

Laufende Nummer	Namen	Zeichen und Wertigkeit	Atomgewicht Wasserstoff = 1 (neu)	Äquivalentgewicht Wasserstoff = 1 (älter)
1	Aluminium	Al^{III}	27,3	13,7
2	Antimon	Sb^{III}	122,0	120,3
3	Arsen	As^{III}	74,9	75,0
4	Baryum	Ba^{II}	136,8	68,5
5	Beryllium	Be^{II}	9,4	6,92
6	Blei	Pb^{II}	206,4	103,5
7	Bor	B^{III}	11,0	10,9
8	Brom	Br^{I}	79,75	80,0
9	Cäsium	Cs^{I}	133,0	133,2
10	Calcium	Ca^{II}	39,0	20,0
11	Cer	Ce^{II}	138,0	46,0
12	Chlor	Cl^{I}	35,37	35,5
13	Chrom	Cr^{III}	52,4	26,2
14	Didym	Di^{II}	144,78	48,0
15	Eisen	Fe^{II}	55,9	28,0
16	Erbium	E^{II}	169,0	—
17	Fluor	F^{I}	19,1	19,0
18	Gallium	G	—	—
19	Gold	Au^{III}	196,2	196,0
20	Indium	In^{II}	113,4	—
21	Jod	J^{I}	126,53	127,0
22	Iridium	Ir^{IV}	192,74	98,5
23	Kadmium	Cd^{II}	111,6	56,0
24	Kalium	K^{I}	39,04	39,1
25	Kobalt	Ko^{II}	58,6	30,0
26	Kohlenstoff	C^{IV}	11,97	6,0

Laufende Nummer	Namen	Zeichen und Wertigkeit	Atomgewicht Wasserstoff = 1 (neu)	Äquivalentgewicht Wasserstoff = 1 (älter)
27	Kupfer	Cu^{II}	63,3	31,7
28	Lanthan	La^{II}	139,0	46,4
29	Lithium	Li^{I}	7,01	7,0
30	Magnesium	Mg^{II}	23,94	12,0
31	Mangan	Mn^{II}	54,8	27,5
32	Molybdän	Mo^{IV}	95,8	46,0
33	Natrium	Na^{I}	22,99	23,0
34	Nickel	Ni^{II}	58,6	29,0
35	Niob	Nb^{V}	94,0	48,8
36	Osmium	Os^{IV}	198,6	99,5
37	Palladium	Pd^{II}	106,2	53,2
38	Phosphor	P^{III}	30,96	31,0
39	Platin	Pt^{IV}	196,7	98,5
40	Quecksilber	Hg^{II}	199,8	100,0
41	Rhodium	Rh^{II}	104,1	52,0
42	Rubidium	Rb^{I}	85,2	85,4
43	Ruthenium	Ru^{IV}	103,5	52,0
44	Sauerstoff	O^{II}	15,96	8,0
45	Schwefel	S^{II}	31,98	16,0
46	Selen	Se^{II}	79,01	39,5
47	Silber	Ag^{I}	107,66	108,0
48	Silicium	Si^{IV}	28,0	14,0
49	Stickstoff	N^{III}	14,01	14,0
50	Strontium	Sr^{II}	87,2	43,8
51	Tantal	Ta^{V}	182,0	68,8
52	Tellur	Te^{II}	128,0	64,0
53	Thallium	Tl^{I}	203,6	204,0
54	Thorium	Th^{IV}	231,5	59,5
55	Titan	Ti^{IV}	48,0	25,0
56	Uran	U^{II}	240,0	60,0
57	Vanadin	V^{III}	51,2	68,6
58	Wasserstoff	H^{I}	1,0	1,0
59	Wismut	Bi^{III}	210,0	208,0
60	Wolfram	W^{IV}	184,0	92,0
61	Yttrium	Y^{II}	93,0	—
62	Zink	Zn^{II}	64,9	32,5
63	Zinn	Sn^{IV}	117,8	58,0
64	Zirkonium	Zr^{IV}	90,0	33,6

Tabelle 29.

Produkte der spezifischen Wärme und des Atomgewichts der Elemente (nach Regnault).

Elemente	Spezif. Wärme w	Atomgewicht a	Produkt aw
Aluminium	0,2143	27,4	5,87
Antimon	0,0513	122	6,26
Arsen	0,0822	75	6,17
Blei	0,0314	207	6,50
Brom (fest)	0,0843	80	6,74
Eisen	0,1138	56	6,37
Gold	0,0324	197	6,38
Jod	0,0541	127	6,87
Iridium	0,0326	198	6,45
Kadmium	0,0567	112	6,35
Kalium	0,1655	39,1	6,47
Kobalt	0,1067	58,8	6,27
Kupfer	0,0939	63,4	5,99
Lithium	0,9408	7	6,59
Magnesium	0,2475	24	5,94
Mangan	0,1217	55	6,69
Molybdän	0,0722	96	6,93
Natrium	0,2934	23	6,75
Nickel	0,1092	58,8	6,42
Osmium	0,0311	199,2	6,20
Palladium	0,0593	106,6	6,32
Platin	0,0324	197,4	6,40
Quecksilber (fest)	0,0319	200	6,38
" (flüssig)	0,332	200	6,64
Rhodium	0,0580	104,4	6,06
Selen (kristallisiert)	0,0801	79,4	6,36
Silber	0,0570	108	6,16
Tellur	0,0474	128	6,07
Thallium	0,0336	204	6,85
Uran	0,0619	120	7,43
Wismut	0,0308	210	6,47
Wolfram	0,0334	184	6,15
Zink	0,0956	65,2	6,23
Zinn	0,0555	118	6,53

Auflösungen

zu den

Aufgaben aus der Physik.

Holzſtiche

meiſt aus dem xylographiſchen Atelier

von Friedrich Vieweg und Sohn

in Braunſchweig.

[illegible] Physik.

[illegible]

[illegible] anstalten und

[illegible] cht

[illegible]

[illegible] V. Klasse.

[illegible] Auflage

[illegible]

[illegible] tichen.

[illegible]

[illegible] und Sohn.

[illegible]

Alle Rechte, namentlich jenes der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten.

Seite

. 1
. 7
. 13
. 19
. 27
. 35
. 41
. 47
. 55
. 58
. 62
. 66
. 67
. 69
. 71
. 73
. 79
. 87
. 90
. 99
. 110
. 113
. 118
. 121
. 124
. 128
. 130
. 141
. 158
. 171
. 179
. 184
. 199

Auflösungen zu I.

1. $s = 10 \,.\, {}^1/_2 \,.\, 60 \,.\, 60 = 18000\,\text{m} = 18\,\text{km}.$

2. $v = \dfrac{7420}{60 \,.\, 60} = 2{,}0611 \ldots \text{m}.$

3. a) 30 Min. 55 Sek. b) 17 Min. 40 Sek.

4. a) In $8^1/_8$ Minuten. b) In ungefähr 14 Jahren. c) 7,4 mal.

5. 0,8 m.

6. Bezeichnet t die Zeit in Sekunden, welche vom Abgang des ersten Boten bis zum Einholen durch den zweiten verflossen ist, so hat bis dahin der erste Bote einen Weg von $\dfrac{4000}{3600} \cdot t = \dfrac{10}{9} \cdot t$ m, der zweite einen Weg von $\dfrac{4800}{3600}\,(t - 7200) = \dfrac{4}{3}\,(t - 7200)$ m zurückgelegt, und da diese Wege einander gleich sein müssen, so hat man die Bestimmungs-Gleichung $\dfrac{10}{9}t = \dfrac{4}{3}\,(t - 7200)$, woraus $t = 43\,200$ Sekunden $= 12$ Stunden folgt. Daraus ergiebt sich der von jedem der beiden Boten zurückgelegte Weg $= \dfrac{10}{9} \cdot 43\,200 = 48\,000\,\text{m} = 48\,\text{km}.$

7. Durch ein Rechteck, in welchem die eine Seite die Geschwindigkeit, die andere Seite die Zeit, der Flächeninhalt aber den Weg ausdrückt.

8. $(6 \,.\, 0{,}9 + 7 \,.\, 3{,}4 + 5 \,.\, 1{,}2 + 3 \,.\, 4{,}2) \,.\, 60 =$
$47{,}8 \,.\, 60 = 2868\,\text{m}$ Gesamtweg.
$\dfrac{47{,}8 \,.\, 60}{(6 + 7 + 5 + 3)\,60} = 2{,}28\,\text{m}$ mittlere Geschwindigkeit.

9. 3,5 m.

10. 0,5 m.

11. Die resultierende Geschwindigkeit ist $= \sqrt{0{,}3^2 + 0{,}4^2} = 0{,}5^2$; die Richtung der resultierenden Geschwindigkeit bildet mit der Richtung des Kahnes einen Winkel von nahe $36^0\,52'$.

12. $v = 11{,}92$ m.

13. Die resultierende Geschwindigkeit = 17,6 m; ihre Richtung schließt mit der ersten Seitengeschwindigkeit einen Winkel von $40^0\,30'\,44''$ ein.

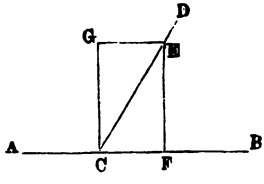
14. Die gesuchte Seitengeschwindigkeit muß = 20,8 m und der Winkel, den sie mit der Richtung der Resultierenden bildet, = 30^0 sein.

15. Aus $0{,}6 : 0{,}5 = 13{,}5 : x$ folgt $x = 11{,}25$ m.

16. Die Geschwindigkeit zerlege man in zwei, von denen die eine in die Richtung der Bahn fällt und die andere darauf senkrecht steht; die letztere wird aufgehoben und die erstere beträgt $6 \cdot \cos 27^0\,16' = 5{,}33$ m.

17. Es sei AB (Fig. 1) die Längenachse des Schiffes, CD die Richtung des Zuges und CE stelle die Geschwindigkeit von 2 m dar. Zerlegt man CE in die beiden aufeinander senkrechten Seitengeschwindigkeiten CF und CG, so ist $CE = 2 \cdot \cos 60^0 = 1$ m, die Richtung und Geschwindigkeit des Schiffes, da die andere Seitengeschwindigkeit CG durch den Widerstand des Wassers aufgehoben wird.

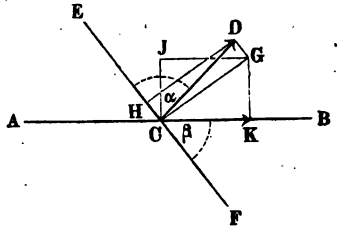
Fig. 1.



18. Man zerlege die Geschwindigkeit CD (Fig. 2) in die beiden Seitengeschwindigkeiten CH und CG, wovon die letztere allein wirksame auf EF senkrecht steht, zerlege CG wieder in die auf der Schiffsrichtung AB senkrechte Komponente CJ, welche durch den Widerstand des Wassers auf die Breitseite des Schiffes aufgehoben wird, und die in die Schiffsrichtung fallende Komponente CK, so ist diese letztere die gesuchte Geschwindigkeit. Durch Rechnung findet sich $CG = HD = c \sin\alpha$ und daraus

$$CK = CG \cos(90 - \beta) = c \sin\alpha \cdot \sin\beta = 0{,}8365 \text{ m}.$$

Fig. 2.



19. Die zweite Frage betreffend, so ergiebt sich, da $\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}$ ist, der letztere Ausdruck aber am größten wird, wenn $\cos(\alpha - \beta) = 1$, also $\alpha - \beta = 0$ oder $\alpha = \beta$ ist, daß die Geschwindigkeit des Schiffes am größten wird, wenn das Segel mit der Windrichtung und mit der Schiffsrichtung gleiche Winkel einschließt.

20. Durch ähnliche Behandlung wie bei der vorigen Aufgabe findet sich die Geschwindigkeit $= \frac{1}{2} c = 1$ m.

21. Aus der Figur zu der Aufgabe ergiebt sich $CG = HD = c \sin 30^0 = 2 \cdot 0{,}5 = 1$ m, also

$x = CJ = CG \cos 60^0 = 0{,}5$ m; $y = CK = CJ \cos 60^0 = 0{,}25$ m.

22. Zerlegt man die Geschwindigkeiten c_1 und c_2 nach den Richtungen des Parallelkreises und des Meridians, so findet man, daß das Schiff nach einer Stunde entfernt ist

vom Meridian durch A um $4\ sin\ 40^0 - 2{,}5\ cos\ 30^0 = 0{,}4061$ Meilen nach Westen,

vom Parallelkreise durch A um $4\ cos\ 40^0 - 2{,}5\ cos\ 60^0 = 1{,}8142$ Meilen nach Norden,

woraus sich die resultierende Geschwindigkeit $= 1{,}859$ Meilen nach Nordwesten, und der Winkel, welchen die resultierende Geschwindigkeit mit dem Parallelkreise einschließt, $= 77^0\,22'\,58''$ ergiebt.

Man hätte auch zuerst die resultierende Geschwindigkeit und deren Richtung und alsdann die senkrechten Komponenten berechnen können.

23. Die resultierende Geschwindigkeit ist $= \sqrt{2{,}5^2 + 1{,}9^2 + 2 \cdot 2{,}5 \cdot 1{,}9\ cos\ 130^0} = 1{,}937$ m, deren Richtung mit der Richtung der letzteren Geschwindigkeit einen Winkel φ einschließt, der sich aus $sin\ \varphi = \frac{1{,}9\ sin\ 130^0}{1{,}937} = 0{,}7513$ zu $48^0\,42'$ bestimmt.

24. Im ersten Falle $4 \cdot 9{,}81 = 39{,}24$ m, im zweiten $10 \cdot 9{,}81 = 98{,}1$ m.

25. $\frac{9{,}81}{2} \cdot 4^2 = 78{,}48$ m und $\frac{9{,}81}{2} \cdot 10^2 = 490{,}5$ m. Oder: Am Ende der zehnten Sekunde ist seine Geschwindigkeit $= 10 \cdot 9{,}81 = 98{,}1$ m, also seine mittlere Geschwindigkeit $= \frac{98{,}1}{2}$, also der während 10 Sekunden zurückgelegte Weg $= 10 \cdot \frac{98{,}1}{2} = 490{,}5$ m.

26. $\frac{29{,}43}{3} = 9{,}81$.

27. $t = \frac{v}{g} = \frac{100}{9{,}81} = 10{,}2$ Sekunden; $s = \frac{1}{2} vt = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 10{,}2 = 510$ m, bezw. $2 \cdot 10{,}2$ Sekunden und $3 \cdot 10{,}2$ Sekunden, sowie $4 \cdot 510$ m und $9 \cdot 510$ m.

28. $\frac{2 \cdot 1600}{20^2} = 8$ m.

29. Aus $x : 20\,000 = 1^2 : 120^2$ folgt $x = \frac{20\,000}{120^2} = 1{,}39$ m.

30. Bezeichnen s und s_1 die in $n - 1$ und n Sekunden zurückgelegten Wege, sowie g die Beschleunigung des freien Falles, so ist

$$s_1 - s = \frac{g}{2} [n^2 - (n-1)^2] = \frac{g}{2} (2n - 1).$$

In der zwölften Sekunde 112,815 m.

31. $s = \frac{v^2}{2g} = 10\,321$ m; $t = 45{,}87$ Sekunden. (Ein Körper braucht zum Steigen ebensoviel Zeit wie zum Wiederherabfallen!)

32. $v = 50 + 9{,}81 \cdot 6 = 108{,}86$ m; $s = 50 \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot 36 = 476{,}58$ m.

33. Da die Beschleunigung $p = 4$ cm ist, so sind die durchlaufenen Wege ($\frac{1}{2}pt^2$) bezüglich $= 8, 18, 32, 50$ u. s. w. cm.

34. $p = 6$ cm; $v = 30$ cm.

35. 1,638 g.

36. $v = p \,.\, t = 5 \,.\, 10 = 50$ m; $s = \frac{1}{2}pt^2 = \frac{1}{2} \cdot 5 \,.\, 100 = 250$ m.

37. $v = 4 + 5 \,.\, 10 = 54$ m; $s = 4 \,.\, 20 + \frac{1}{2} \cdot 5 \,.\, 100 = 330$ m.

38. $t = 3{,}0769$ Sekunden; $h = 153{,}6$ m.

39. $p = 57\,857$ m; $t = 0{,}0078$ Sekunden.

40. $v = 10 - 0{,}4 \,.\, 20 = 2$ m; $s = 10 \,.\, 20 - \frac{1}{2} \cdot 0{,}4 \,.\, 20^2 = 120$ m.

41. Aus $10 - 20\,x = 0$ folgt $x = 0{,}5$ m.

42. Aus den beiden Gleichungen $v = c + pt$ und $s = ct + \frac{1}{2}pt^2$ folgt

$$p = \frac{2(s - ct)}{t^2} = 0{,}55 \text{ m}; \quad v = \frac{2s - ct}{t} = 8 \text{ m}.$$

43. Der Körper braucht, da er ebenso lange steigt als fällt, 8 Sekunden zum Niederfallen, sein Fallraum ist also $= \frac{1}{2} \,.\, 9{,}81 \,.\, 8^2 = 313{,}92$, seine Anfangsgeschwindigkeit beim Aufsteigen, die der Erdgeschwindigkeit beim Niederfallen gleich ist, $= 9{,}81 \,.\, 8 = 78{,}48$ m.

44. $x = 25 \,.\, 4 - \frac{1}{2} \,.\, 9{,}81 \,.\, 4^2 = 21{,}52$ m.

45. $t = \frac{150 - 40}{9{,}81} = 11{,}2$ Sekunden; $s = \frac{150^2 - 40^2}{2 \,.\, 9{,}81} = 1014{,}3$ m.

46. a) Aus $ct - \frac{1}{2}gt^2 = h$ folgt $t = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 2gh}}{g}$, also $t_1 = 5{,}238$ Sekunden, $t_2 = 2{,}102$ Sekunden, wovon t_2 die Zeit angiebt, nach welcher der Körper beim Aufsteigen, t_1 die Zeit, nach welcher er bei Rückkehr die Höhe erreicht.

b) In der Formel $t = \frac{c}{g} \pm \sqrt{\frac{2\left(\frac{c^2}{2g} - h\right)}{g}}$ drückt $\frac{c}{g}$ die Zeit des Aufsteigens bis zum Augenblick der Umkehr, $\frac{c^2}{2g}$ den während dieser Zeit zurückgelegten Weg, $\frac{c^2}{2g} - h$ den Weg, der über der gegebenen Höhe liegt, folglich $\sqrt{\frac{2\left(\frac{c^2}{2g} - h\right)}{g}}$ die Zeit aus, welche zum Durchlaufen dieses letzteren Wegstücks sowohl beim Aufsteigen als bei der Rückkehr erforderlich ist (Lehrb. §. 5).

47. Ist h die Tiefe des Brunnens, so gebraucht der Schall $\frac{h}{m}$ Sekunden, um aus der Tiefe herauf zu gelangen, der Stein aber legt denselben Weg von

oben nach unten in $\sqrt{\frac{2h}{g}}$ Sekunden zurück, daher die Gleichung $\sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{m} = t$, woraus folgt: $h = \frac{m}{g}\left(m + gt \pm \sqrt{m(m + 2gt)}\right)$, worin aber von den beiden Ausdrücken nur der mit dem negativen Wurzelausdruck hier anwendbar ist, weil $h < mt$ sein muß.

Hierbei ist der Widerstand der Luft unberücksichtigt gelassen.

48. Ist x die Anzahl der Sekunden, welche der Schall gebraucht, um aus der Tiefe heraufzukommen, also $t - x$ die Fallzeit des Steines, so kann man den Weg, den jeder von ihnen zurücklegt, sowohl durch mx, als auch durch $\frac{1}{2}g(t - x)^2$ ausdrücken, woraus folgt $x = t + \frac{m}{g} \pm \frac{1}{g} \cdot \sqrt{m(m + 2gt)}$, worin $g = 9{,}81$ m, von welchen beiden Ausdrücken aber hier nur der mit dem negativen Wurzelausdruck anwendbar ist, weil $x < t$ sein muß. Daraus erhält man $x = 5{,}6$ Sekunden und hieraus die Tiefe der Höhle $h = mx = 333 \,.\, 5{,}6 = 1865$ m.

49. Ist x die gesuchte Höhe, so gebraucht der Schall $\frac{x}{m}$ Sekunden, um zum Beobachter zu gelangen, der Stein aber legt denselben Weg in $\sqrt{\frac{2x}{g}}$ Sekunden zurück, daher die Gleichung $\sqrt{\frac{2x}{g}} = \frac{x}{m} + t$, woraus folgt

$$x = \frac{m}{g}\left(m - gt \pm \sqrt{m(m - 2gt)}\right).$$

Hier sind im allgemeinen beide Werte von x möglich, da $\sqrt{m(m - 2gt)} < m - gt$, ein einziger Wert aber nur, wenn $m - 2gt = 0$, also $t = \frac{m}{2g}$ ist. Für die gegebenen Werte ist $x_1 = 20561$ und $x_2 = 57{,}7$ m. Wenn aber $t = \frac{333}{2 \,.\, 9{,}81} = 16{,}97$ Sekunden gegeben wäre, so würde man nur den einen Wert 5652,5 m erhalten.

50. Durch ein rechtwinkeliges Dreieck, von welchem die eine Kathete die Zeit, die andere Kathete die Endgeschwindigkeit, der Flächeninhalt aber den Weg darstellt.

51. Wenn er auf dem Schiffe von jenem Punkte aus mit der nämlichen Geschwindigkeit rückwärts geht, mit welcher das Schiff vorwärts fährt.

52. a) Ein Punkt A (Fig. 3, a. f. S.) gelange in der Zeit t von A bis A_x und währenddessen ein Punkt B von B bis B_x. Die relative Lage von A und B wird am Anfang durch die Linie AB und nach der Zeit t durch die Linie $A_x B_x$ angegeben. Teilt man nun den Punkten A und B noch eine Bewegung zu, so daß A durch diese allein in der Zeit t nach A' und B nach B' käme, wo $AA' \parallel BB'$, so befindet sich A schließlich in A_y

und B in B_y. Die neue relative Lage wird alsdann durch die Linie $A_y B_y$ angegeben. Da aber $B_x B_y \# A_x A_y$, so muß auch $A_y B_y \# A_x B_x$ sein.

b) Nein!

53. I. Denkt man sich, jedem der beiden Körper A und B (Fig. 4) werde in dem Augenblick, in welchem sie gleichzeitig ihre Bewegung zu beginnen streben, noch eine Bewegung erteilt, welche der in der Aufgabe gegebenen Bewegung von A der Größe nach gleich, der Richtung nach aber entgegen-

Fig. 3.

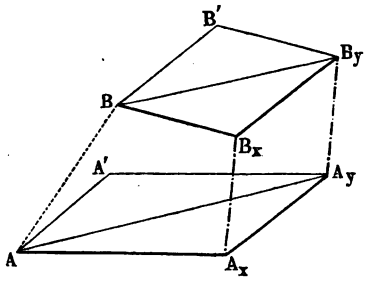
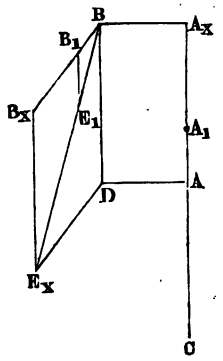


Fig. 4.



gesetzt sei, also dem Körper A noch die Bewegung AC, dem Körper B noch die Bewegung BD, so würde A in Ruhe bleiben, B aber in der Diagonale BE_x sich bewegen. Diese Linie giebt den relativen Weg des Körpers B in Beziehung auf den Körper A an, sowie $AE_x \# A_x B_x$ die relative Lage von B gegen A nach der Zeit t.

II. Ist nach I. leicht auszuführen.

54. Sind AA_1, A_1A_2 und A_2A_3 die auf einander folgenden Teile der gebrochenen Linie $AA_1A_2A_3$, und zieht man $BB_1 =$ und $\| AA_1$, $B_1B_2 =$ und $\| A_1A_2$ und $B_2B_3 =$ und $\| A_2A_3$, so ist $BB_1B_2B_3$ der Weg, den der Punkt B zurückzulegen scheint.

55. 1) $21^0\,48{,}9'$; 2) 1,5 Sekunden; 3) 6 m.

56. Ist (Fig. 5) $AC = c_1$, $BD = c_2$ und ist $BDFE$ ein Parallelogramm aus BD und $DF = AC$, sowie aus $\sphericalangle D = \beta$, so ist (nach 52) BF die relative Bewegung des Körpers B in Beziehung auf A während einer Sekunde; aus dem Dreieck DFB findet sich $BF = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 - 2\,c_1\,c_2\,\cos\beta}$ $= 10{,}624$ m, folglich die relative Bewegung in 60 Sekunden $= 637{,}44$ m. Ferner erhält man aus demselben Dreieck $\sin DBF = \frac{DF \,.\, \sin D}{BF}$, also $\sphericalangle DBF =$ nahe 87^0, folglich $\sphericalangle FBO = DBF + \beta =$ nahe 132^0, wodurch die Richtung der relativen Bewegung bestimmt ist.

57. Denkt man sich (Fig. 6) beiden Körpern noch die entgegengesetzte Geschwindigkeit von A, also c_1, mitgetheilt, so bliebe A in Ruhe und B müßte, wenn er A treffen sollte, in der Richtung BA sich bewegen, würde also in dieser Richtung mit einer Geschwindigkeit BF sich bewegen, die sich aus dem Parallelogramm

$BEFG$ bestimmt, worin die Richtung der Diagonale BF sowie die Seiten $BG = c_1$ und $FG = c_2$ gegeben sind. Nun stellt aber die Diagonale BF die relative Bewegung des Körpers B in Beziehung auf A während der Zeiteinheit (zufolge 52) dar und folglich $BE = c_2$ die Komponente derselben, in

Fig. 5.

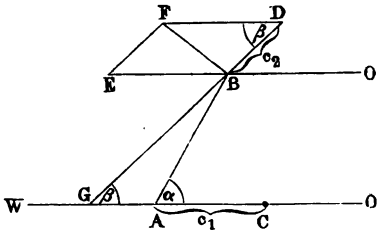
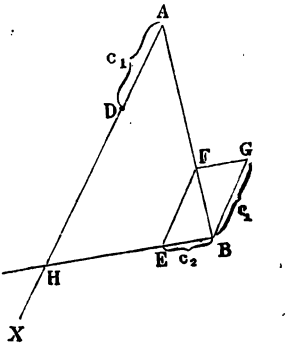


Fig. 6.



welcher sich B wirklich bewegt. Da aber $EF = c_1$ parallel AH ist, so hat man $\frac{c_1}{c_2} = \frac{AH}{BH'}$ und da, wenn die Geschwindigkeiten zweier Körper wie die zurückgelegten Wege sich verhalten, die dazu nötige Zeit dieselbe ist, so sind AH und BH gleichzeitig zurückgelegte Wege, also H der Punkt, in welchem sich die beiden Körper treffen.

58. Er würde glauben, die Kugel stehe still und die Festung bewege sich nach der Kugel.

Auflösungen zu II.

1. Die (irdische) Einheit der Kraft ist diejenige, mit welcher die Erde an einem Liter Wasser zieht; dieses erlangt dabei eine Beschleunigung von g Meter; soll die Beschleunigung nur 1 m betragen, so muß die Krafteinheit an g Liter Wasser ziehen; folglich ist eine Masse = der von g Liter Wasser die Einheit der Masse. Dies folgt auch aus der Gleichung $Q = Mg$ (wo Q das Gewicht von M bedeutet). Nun ist $M = Q : g$; damit $M = 1$ werde, muß $Q = g$ sein (Fl. §. 14; Kr. §. 156).

2. $M = \frac{29{,}43}{9{,}81} = 3$ Masseneinheiten.

3. a) Aus $P : 80 = 10 : 9{,}81$ folgt $P = 81{,}55$ kg.
b) Aus $15 : 80 = p : 9{,}81$ folgt $p = 1{,}84$ m.

4. Aus $30 : 200 = x : g$ ergiebt sich die Beschleunigung $x = \frac{30}{200} g$ und daraus $v = \frac{30}{200} \cdot 9{,}81 \,.\, 20 = 29{,}43$ m.

5. $v_1 = 10 + \frac{30}{200} \cdot 9{,}81 \,.\, 20 = 29{,}43$ m.

6. Die Beschleunigung der Kraft P ist $= \frac{5}{60}$ m, also hat man $P : 2000 = \frac{5}{60} : 9{,}81$ und daraus $P = \frac{5}{60} \cdot \frac{2000}{9{,}81} =$ nahe 17 kg.

7. Ist x der Druck auf die Hand beim Aufwärtsbewegen, also auch die Kraft, welche die Hand auf den Körper ausübt, so ist die Kraft, welche die Masse $\frac{G}{g}$ aufwärts bewegt, $= x - G$, also ist $x - G = \frac{G}{g} p$, folglich $x = G\left(1 + \frac{p}{g}\right) = 2\left(1 + \frac{0{,}5}{9{,}81}\right) = 2{,}10$ kg. Bezeichnet dagegen y den Druck auf die Hand beim Abwärtsbewegen, so erhält man aus $G - y = \frac{G}{g} p$, $y = G\left(1 - \frac{p}{g}\right) = 1{,}90$ kg.

8. In beiden Fällen mit der Beschleunigung g der Schwerkraft, wie aus voriger Auflösung hervorgeht.

9. Da hier die zu bewegende schwere Masse $= 5 + 3 = 8$ kg, die bewegende Kraft aber $= 5 - 3 = 2$ kg ist, so folgt aus $2 : 8 = p : g$, $p = \frac{1}{4} g$.

10. Aus den beiden Gleichungen $P - q = \frac{G + P}{g} p$ und $s = \frac{1}{2} pt^2$ finden sich die beiden Unbekannten p und g, nämlich

$$p = \frac{P - q}{G + P} g = \frac{9{,}5 - 1{,}5}{1265 + 9{,}5} \cdot 9{,}81 = 0{,}062 \text{ m},$$

$$g = \frac{G + P}{P - q} \cdot \frac{2s}{t^2} = \frac{1265 + 9{,}5}{9{,}5 - 1{,}5} \cdot \frac{2 \,.\, 1{,}11}{6^2} = 9{,}82 \text{ m}.$$

11. Aus der Gleichung $P - q = \frac{G + P}{g} p$ folgt $G = (P - q)\frac{g}{p} - P = (P - q)\frac{t^2}{2s} g - P$. Durch Abziehen des Gewichtes der beiden Metallstücke von G findet sich dann die zur Umdrehung des Rädchens erforderliche Kraft.

12. Multipliziere die Gleichung $P = Mp$ das eine Mal mit t, das andere Mal mit s und beachte, daß $pt = v$ und $s = \frac{v^2}{2p}$.

13. a) Der Zeiteffekt ist $100 \cdot 10 = 1000$ Sekunden-kg, d. h. der Effekt ist derselbe wie der einer Kraft von 1000 kg während 1 Sekunde,
oder „ „ „ „ „ 500 „ „ „ 2 Sekunden
u. s. w.
(nämlich es wird einer Masse von $\frac{m}{n} \cdot \frac{1000}{9{,}81}$ Masseneinheiten eine Geschwindigkeit von $\frac{n}{m} \cdot 9{,}81$ m erteilt).

b) Die Arbeit ist $= 100 \cdot 10 = 1000$ mkg, d. h. der Effekt ist derselbe, wie der einer Kraft
von 1000 kg, deren Angriffspunkt einen Weg von 1 m,
„ 500 „ „ „ „ „ „ 2 „
u. s. w. zurücklegt (nämlich es wird einer Masse von $\frac{m}{n} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1000}{9{,}81}$ Masseneinheiten eine Geschwindigkeit von $\sqrt{\frac{n}{m} \cdot 2 \cdot 9{,}81}$ m erteilt).

14. Die Aufgabe ist unbestimmt; es muß entweder die Zeit t, während welcher die Geschwindigkeit erlangt ist, oder der bis dahin zurückgelegte Weg s gegeben sein; dann findet sich die Kraft x, in Kilogrammen ausgedrückt, aus $xt = \frac{24}{9{,}81} \cdot 1800$, oder aus $xs = \frac{1}{2} \cdot \frac{24}{9{,}81} \cdot 1800^2$.

15. $75 \cdot 16 + \frac{1}{2} \frac{75}{9{,}81} \cdot 0{,}25^2 = 1200 + 0{,}239 = 1200{,}239$.

16. Der Zeiteffekt der auf die Kugel wirkenden Kraft ist (nach II, 13 der Aufg.) $120\,000 \cdot \frac{1}{600} = \frac{8}{9{,}81} v$, woraus $v = 245$ m.

17. Die lebendige Kraft der Kugel ist $= \frac{12 \cdot 500^2}{2 \cdot 9{,}81} = 152\,905$ mkg. Die Wirkung der Pulverkraft ist nach allen Richtungen dieselbe, auf die Kugel und den Lauf wirken also nach gerade entgegengesetzten Richtungen gleiche Kräfte, und diese wirken auch auf beide gleich lange, nämlich vom Augenblicke der Entzündung an bis zu dem, wo die Kugel die Mündung verläßt; es sind also die Zeiteffekte der auf Kugel und Lauf wirkenden Kräfte, folglich ihre Bewegungsgrößen einander gleich*). Ist x die rückwärts gerichtete Geschwindigkeit des Geschützes in dem Augenblick, in welchem die Kugel mit der Geschwindigkeit von 500 m den Lauf verläßt, so muß $3600\,x = 12 \cdot 500$, also $x = 1^2/_3$ m sein**). Die lebendige Kraft des Geschützes ist also $= \frac{1}{2} \cdot \frac{3600}{9{,}81} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^2 =$ nahe 510 mkg.

*) Nicht aber deren Wegeffekte oder Arbeiten, da Kugel und Lauf, auf welche gleiche Kräfte wirken, bis zur Erlangung ihrer Geschwindigkeitsmaxima ungleiche Wege zurücklegen.

**) Wenn nämlich, was nur näherungsweise richtig ist, die wirkende Kraft konstant angenommen wird.

18. Die lebendige Kraft der Erdmasse ist $= \frac{1}{2} \cdot \frac{5 \cdot 10^{24}}{9{,}81} \cdot 30\,000^2$ mkg, die Arbeit von x Pferdekräften ist $75\,x$ mkg in einer Sekunde, also in 6000 Jahren . . . $75\,x \,.\, 6000 \,.\, 365 \,.\, 24 \,.\, 60 \,.\, 60$ mkg, und aus der Gleichsetzung dieser Ausdrücke folgt $x =$ etwas mehr als 16 Trillionen Pferdekräfte.

19. Die erforderliche Arbeit ist (nach II, 13 der Aufg.) gleich der lebendigen Kraft der zu bewegenden Masse von $\frac{20\,000}{31{,}25}$ Masseneinheiten, also $= \frac{1}{2} \cdot \frac{20\,000}{31{,}25} \cdot 30^2$ $= 0{,}016 \,.\, 20\,000 \,.\, 900 = 288\,000$ Fußpfunde.

20. Der Hammer besitzt im Augenblick des Aufschlagens eine lebendige Kraft $= \frac{1}{2}\frac{G}{g} v^2 = Gh$, wenn $h = \frac{v^2}{2g}$ ist, also die Höhe bezeichnet, von welcher der Hammer hätte frei herabfallen müssen, um die Geschwindigkeit v zu erlangen. Man kann sich also diese lebendige Kraft erzeugt denken durch die Arbeit, welche das Gewicht G beim Durchlaufen der Strecke h verrichtet. Zu dieser Arbeit kommt nun noch diejenige, welche das Gewicht G während des Einsinkens des Nagels um die Strecke s verrichtet; also ist die durch den Hammer verrichtete Arbeit $G\,(h + s)$. Andernteils ist die durch bloßes Auflegen eines Gewichtes x auf den Nagel verrichtete Arbeit xs; folglich ist $xs = G\,(h + s)$, also $x = \frac{G(h+s)}{s} = \frac{0{,}5\left(\frac{10^2}{2 \,.\, 9{,}81} + 0{,}05\right)}{0{,}05} = 51{,}5$ kg, also mehr als 100 mal so groß wie das Gewicht des Hammers.

21. Ist x der Druck (in Kilogrammen), welchen die Hand erleidet, also auch die Kraft, welche die Hand gegen den Körper ausübt, so ist die Arbeit dieser Kraft, während ihr Angriffspunkt die Höhe h durchläuft, $= xh$. Diese Arbeit besteht aus zwei Teilen, wovon der eine $= Gh$ zur Überwindung des Widerstandes, nämlich des Körpergewichtes G, der andere zur Erteilung einer gewissen Geschwindigkeit c an die Masse $\frac{G}{g}$ dient, also $= \frac{1}{2}\frac{G}{g} c^2$, oder, wenn man die der Anfangsgeschwindigkeit c entsprechende Steighöhe $\frac{c^2}{2g}$ mit h_1 bezeichnet, $= Gh_1$ ist. Man hat also $xh = Gh + Gh_1$ $= G\,(h + h_1)$, woraus $x = G\left(1 + \frac{h_1}{h}\right) = 1{,}5\left(1 + \frac{4}{0{,}6}\right) = 11{,}5$ kg sich ergiebt.

22. Aus $x \,.\, 240 = \frac{27\,000}{9{,}81}\,(14 - 7) = 19266$ Sekunden-kg folgt $x = \frac{19\,266}{240} = 80{,}28$ kg.

23. Der durchlaufene Weg ist $= \frac{1}{2} vt = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 180 = 3600$ Fuß,

folglich die erforderliche Arbeit $= 75 \cdot 3600 + \frac{1}{2} \cdot \frac{20000}{31{,}25} \cdot 40^2 =$ 782000 Fußpfunde (Lehrbuch §. 19, 3).

24. a) Im Augenblick, wo der Dampf abgelassen wird, ist die Wirkungsfähigkeit der Lokomotive, durch den Zeiteffekt oder die Bewegungsgröße gemessen, $= \frac{20000}{31{,}25} \cdot 40 = 25600$ Sekunden-Pfunde, also ist die Zeit, während welcher diese Wirkungsfähigkeit durch den 75 Pfd. betragenden Widerstand erschöpft wird, $= \frac{25600}{75} = 341\frac{1}{3}$ Sekunden, folglich der Weg, den die Lokomotive noch durchläuft, bis sie in Ruhe kommt, $= \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 341\frac{1}{3}$ $= 6826\frac{2}{3}$ Fuß.

b) Die Arbeit der Dampfkraft ist vom Anfang der Bewegung an bis zum Beginn des Beharrungszustandes nach vor. Aufg. 782000 Fuß-Pfde., während des Beharrungszustandes $= 75 \cdot 600 \cdot 40 = 1800000$ „ „
nach dem Ablassen des Dampfes $= \ldots\ldots\ldots$ 0 „ „
also die Gesamtarbeit der Dampfkraft $= \ldots\ldots 2582000$ Fuß-Pfde.

25. a) Bezeichnet K die gesuchte mittlere Kraft, so ist die Arbeit, welche sie verrichtet, indem sie der Kugel vom Gewicht G während ihres Weges s von der Ruhe aus die Geschwindigkeit v erteilt (Lehrbuch §. 17), $Ks = \frac{1}{2}\frac{G}{g}v^2$, folglich $K = \frac{1}{2}\frac{Gv^2}{gs} = \frac{1}{2} \cdot \frac{31}{9{,}81} \cdot \frac{90000}{0{,}80} = 177720$ Gramm. Wäre die Bewegung der Kugel im Lauf eine gleichmäßig beschleunigte (der sie sich wenigstens nähern dürfte), so würde K als konstante Kraft zu betrachten sein.

b) Der Druck der Pulvergase auf die Kugel ist hiernach $\frac{177720}{31} = 5733$ mal so groß, wie der Druck der Schwerkraft auf dieselbe.

c) Aus $s = \frac{1}{2}vt$ folgt $t = \frac{2s}{v} = \frac{2 \cdot 0{,}80}{300} = 0{,}0053$ Sekunden.

d) Die Kugel macht, während sie sich im Lauf befindet, $\frac{80}{73{,}2} = 1{,}09$ Rotationen um die Achse des Laufes. Da sie nun während 0,0053 Sekunden infolge der Beschleunigung im Lauf einen Weg zurücklegt, welcher 1,09 Rotationen entspricht, und da sie nach dem Verlassen des Laufes während derselben Zeit in gleichmäßiger Bewegung den doppelten Weg zurücklegt, so muß sie, dem entsprechend, während 0,0053 Sekunden $2 \cdot 1{,}09$ Rotationen, folglich in einer Sekunde $\frac{2 \cdot 1{,}09}{0{,}0053} = 409$ Rotationen machen.

26. $K = 12\left(2 - \frac{0{,}8}{0{,}7}\right)\left(2 - \frac{10}{8}\right) = 7{,}7$ kg.

27. Aus $20 = 15\left(2 - \frac{0{,}7}{0{,}8}\right)\left(2 - \frac{z}{6}\right)$ folgt $z = 4{,}9$ Stunden.

28. $s = 3$ Stunden (nahezu).

29. Bedeutet m eine Masse, l eine Länge und t eine Zeit, so sind die Dimensionen von Geschwindigkeit, Beschleunigung und Kraft bezw.:

$$l \,.\, t^{-1},\quad l \,.\, t^{-2},\quad m \,.\, l \,.\, t^{-2};$$

denn $\qquad c = l : t;\quad p = v : t = (l : t) : t;$

ferner ist $P = mp$, woraus $P = m \,.\, l \,.\, t^{-2}$. Die Dimensionen der Einheiten vorgenannter Größen schreibt man im Zentimeter-Gramm-Sekunden-System:

$$C\,S^{-1},\quad C\,S^{-2},\quad C\,G\,S^{-2},$$

oder $\qquad$ cm . sec^{-1} $\quad$ cm . sec^{-2}, $\quad$ cm . gr . sec^{-2}.

Die Dimensionen von Erg und Sekundenerg sind:

$$C^2\,G\,S^{-2} \quad \text{und} \quad C^2\,G\,S^{-3},$$

oder $\qquad$ cm^2 gr sec^{-2} $\quad$ und $\quad$ cm^2 gr sec^{-3};

denn Arbeit = Kraft × Weg (Dyn × Zentimeter) und Effekt = $\frac{\text{Kraft} \times \text{Weg}}{\text{Zeit}} \left(\frac{\text{Dyn} \times \text{Zentimeter}}{\text{Sekunde}}\right)$.

30. Das Kilogrammgewicht, bezw. die Anziehungskraft, welche die Erde auf die Kilogrammmasse ausübt, ist:

$$1000 \,.\, 100 \,.\, g = 10^5 \,.\, g \text{ Dyn},$$

denn die Erde erteilt der Kilogrammmasse $= 1000\,g$ eine Beschleunigung von g Meter $= 100\,g$ Zentimeter.

Da g nahezu $= 10$ ist, so ist ein Kilogrammgewicht nahezu gleich einer Million Dyn, oder eine irdische Krafteinheit ist nahezu gleich einer Million absoluter Krafteinheiten im $C\,G\,S$-Systeme.

Ein Meterkilogramm $= 100 \,.\, 10^5 g$ Erg $= 10^7 g$ Erg — im irdischen System gilt als Einheit des Weges, auf dem hin die Arbeit geleistet wird, 1 m, und im absoluten 1 cm. Ein Meterkilogramm ist ungefähr gleich 100 Millionen Erg.

Ein Sekundenmeterkilogramm $= 10^7 g$ Sekundenerg (in beiden Systemen gilt die Sekunde als Einheit der Zeit).

Eine Pferdekraft oder besser ein Pferdeeffekt (Pferdeleistung) = 75 Sekundenmeterkilogramm $= 75 \,.\, 10^7 g = 736 \,.\, 10^7$ Sekundenerg ($g = 9{,}81$).

31. $\frac{600 \,.\, 100 \,.\, 3}{3 \,.\, 60 \,.\, 75} = 13\frac{1}{3}$ Pferdeeffekt $= 13\frac{1}{3} \,.\, 736 \,.\, 10^7$ oder $10^{10} g$ Sekundenerg.

---

32. Unter der Potentialdifferenz zweier Punkte A und B in bezug auf die Erde versteht man die Arbeit, welche die Erde an der Grammmasse leisten muß, um sie durch den lotrechten Abstand zwischen A und B zu bewegen.

Die Potentialdifferenz zwischen A und B ist gleich Null, wenn beide Punkte in gleichem lotrechtem Abstande von der Erdoberfläche liegen.

33. Die potentielle Energie eines Punktes A im Abstande r von der Erde ist die Arbeit, welche die Erde leistet, wenn sie die Grammmasse von A bis zur Erdoberfläche bewegt.

34. Ist ein Punkt P mit der Masse m von einem Punkte A mit der Masse 1 um r entfernt, so ist zwischen ihnen wirkende Kraft gleich $m : r^2$. Rückt P von A weg in die Entfernung r_1, so ist die hier wirkende Kraft gleich $m : r_1^2$. Ist nun r_1 von r nur um sehr wenig verschieden, so kann man auf der Strecke $r_1 - r$ ohne merklichen Fehler eine mittlere Kraft $m : r r_1$ wirkend annehmen. Die Arbeit auf dieser Strecke ist alsdann $(m : r r_1)(r_1 - r) = m\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right)$. Rückt A abermals um ein sehr kleines Stück weiter bis in die Entfernung r_2, so gilt für die Arbeit auf dieser Strecke $m\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$ u. s. w. Addiert man alle diese Arbeiten, so erhält man, wenn A schließlich in die Entfernung r_n gerückt ist, $m\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_n}\right)$. Bezeichnet man nun das Potential in der Entfernung r mit Vr und in der Entfernung V_n mit Vr_n, so ist $Vr - Vr_n = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_n}\right)$. Ist $r_n = \infty$, so ist $Vr_n = 0$ und $Vr = m : r$.

Nimmt man abstoßende Kräfte positiv, so sind anziehende negativ. Die Arbeit, wie sie das Potential darstellt, ist immer eine Arbeit gegen die Wirkung (bezw. Richtung) der Kräfte; das Potential hat also stets das entgegengesetzte Zeichen wie die Kraft.

Die Potentialdifferenz zwischen zwei um r voneinander entfernten Niveauflächen ist der auf der Strecke r zu leistenden Arbeit gerade und der Größe der zu bewegenden Masse umgekehrt proportional (falls nicht die Masse 1, sondern eine beliebige Masse zu bewegen ist).

35. $Vr = \frac{m}{r}$, also $dim\ Vr = \frac{G}{C} = G\ C^{-1}$ oder $C^{-1}\ G$.

Auflösungen zu III.

1. $R = \sqrt{40^2 + 30^2 + 2 \cdot 40 \cdot 30\ cos\ 45^0} = 64{,}785$ kg; $sin\ \alpha = \frac{30 \cdot sin\ 45^0}{64{,}785}$, also $\alpha = 19^0 6' 49''$; $sin\ \beta = \frac{40 \cdot sin\ 45^0}{64{,}785}$, also $\beta = 25^0 53' 11''$.

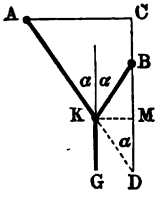
2. $P_2 = R = \frac{40 \cdot sin\ 75^0}{sin\ 30^0} = 77{,}274$ kg.

3. $\alpha = 133^0 25' 57''$, $\beta = 151^0 2' 42''$ (die Kraft R ist der Richtung nach der Resultierenden von P_1 und P_2 entgegengesetzt).

4. Stellt CD die Resultierende der beiden Kräfte P_1 und P_2 dar, so muß R der Richtung nach der CD entgegengesetzt, der Größe nach aber ihr gleich, also $R = \sqrt{10^2 + 6^2} = 11{,}662$ kg sein.

5. Ein Seil ist nur im Gleichgewicht, wenn es überall gleich stark gespannt, ist. Ist nun die Länge l des Seiles bekannt, so mache $AD = l$; ist so D gefunden, dann halbiere BD und ziehe vom Halbierungspunkte M eine Wagrechte, bis sie die AD in K trifft. Dann ist K der gesuchte Punkt und die Lotrechte KG halbiert den Winkel AKB (Fig. 7).

Fig. 7.



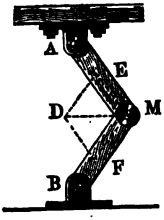
$\sin\alpha = AC : AD = 6{,}5 : 9$, woraus $\alpha = 46^0\,14'\,17''$.
$CD = AD \cdot \cos\alpha = 6{,}225$; $BD = CD - 2 = 4{,}225$;
$BM = MD = \frac{1}{2} BD = 2{,}1125$; $KD = MD : \cos\alpha$
$= 3{,}054$; $KM = KD \cdot \sin\alpha = 2{,}206$.

Die Seilspannung beträgt $170 \cdot \cos\alpha = 117{,}58$.

6. $R = \sqrt{30^2 + 24^2 - 2 \cdot 30 \cdot 24 \cdot \cos 75^0} = 33{,}22$ kg; $\sin\alpha = \frac{24 \cdot \sin 75^0}{33{,}22}$, also $\alpha = 44^0\,55'$, wo α den Winkel bedeutet, den die erste Seitenkraft mit der Mittelkraft bildet. Die Beschleunigung $p = \frac{Rg}{G}$ $= \frac{33{,}22 \cdot 9{,}81}{150} = 2{,}172$ m.

7. Stellt MD (Fig. 8) die Größe der Kraft P dar, und zerlegt man sie in die beiden Seitenkräfte ME und MF, von welchen die erste durch den Widerstand bei A aufgehoben wird, die zweite aber den gesuchten Druck Q darstellt, so hat man nach dem Ziehen von DE und DF aus dem Dreieck MDF:

Fig. 8.



$$\frac{MD}{MF} = \frac{P}{Q} = \frac{\sin MFD}{\sin MDF} = \frac{\sin 150^0}{\sin 75^0},$$

woraus $Q = \frac{P \cdot \sin MDF}{\sin MFD} = \frac{P \cdot \sin 75^0}{\sin 150^0} = \frac{20}{2 \cdot \cos 75^0} = 38{,}637$ kg folgt.

Die größtmöglichste Wirkung wird durch die Kniepresse erzeugt, wenn Winkel $MDF = 90^0$ und Winkel $MFD = 0$, d. h. Winkel $AMF = 180^0$ ist.

8. Die horizontale Komponente von P ist $P_1 = P \cos\alpha = 50 \cdot \cos 40^0 = 38{,}3$ kg, die vertikale $P_2 = P \sin\alpha = 50 \sin 40^0 = 32{,}14$ kg; die letztere sucht den Körper vom Tische abzuziehen, es bleibt folglich der Druck auf den Tisch: $G - P_2 = 37{,}86$ kg.

9. Die durch die vereinte Wirkung der beiden Kräfte P_1 und P_2 stattfindende Beschleunigung p ist der doppelte Weg in der ersten Sekunde, also hier $p = 2 \cdot 6{,}5 = 13$ m. Die Mittelkraft läßt sich also ausdrücken durch

$P = \frac{G}{g} \cdot p = \frac{13 \,.\, 110}{9{,}81} = 145{,}77\,\text{kg}$; daher $P_1 = \frac{P \,.\, \sin 77^0}{\sin (52^0 + 77^0)}$ $= \frac{145{,}77 \,.\, \sin 77^0}{\sin 51^0} = 182{,}76\,\text{kg}$ und $P_2 = \frac{145{,}77 \,.\, \sin 52^0}{\sin 51^0} =$ $147{,}81\,\text{kg}$.

10. Man suche aus zwei der gegebenen und durch Linien dargestellten Kräften die Mittelkraft, aus dieser und der dritten wieder die Mittelkraft u. s. w.

Es ist aber

die Mittelkraft Q der Kräfte P_1 und $P_2 = 34{,}992\,\text{kg}$,
Winkel $P_1 M Q = 33^0\,30'\,36''$;
die Mittelkraft R der Kräfte Q und $P_3 = 44{,}14\,\text{kg}$,
Winkel $P_1 M R = 56^0\,15'\,31{,}8''$;
die Mittelkraft P der Kräfte R und P_4, d. h. die Resultierende der vier gegebenen Kräfte $= 30{,}237\,\text{kg}$, sowie
Winkel $P_1 M P = 89^0\,18'\,2{,}3''$.

Man kann dabei das Verfahren in folgender Weise abkürzen:

Man braucht nur (Fig. 9) das Polygon $M P_1 Q R P M$ zu bilden, indem man die Seiten $M P_1$, $P_1 Q$, $Q R$, $R P$ den gegebenen Komponenten P_1, P_2, P_3, P_4 parallel und gleich macht, so ist die letzte, das Polygon schließende Seite $M P$ das Maß der gesuchten Mittelkraft. Ein anderes Verfahren in Aufgabe 12.

11. Man findet $P = 14{,}6\,\text{kg}$, sowie Winkel $P_1 M P = 86^0\,42'\,37''$.

12. a) Durch Zeichnung: Man lege (Fig. 10) durch den Angriffspunkt M der Kräfte beliebig eine Linie Mx*), nehme diese als Abscissenachse an, sowie die Normale My als Ordinatenachse, zerlege jede der gegebenen Kräfte nach

Fig. 9.

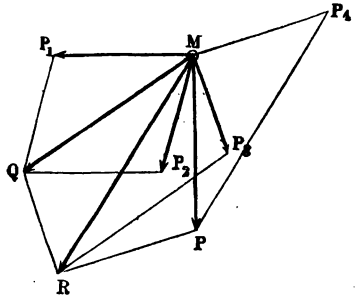
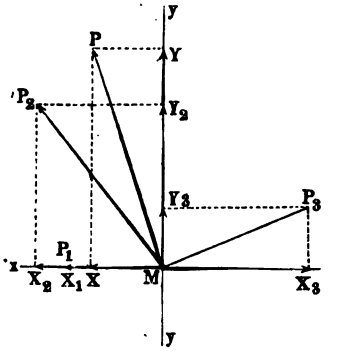


Fig. 10.



diesen beiden Richtungen in Seitenkräfte, z. B. P_2 in MX_2 und MY_2, addiere (algebraisch) die Komponenten auf beiden Achsen, und suche zu diesen Summen MX und MY die Mittelkraft MP, so findet man diese $= 78\,\text{kg}$, sowie den Winkel, den ihre Richtung mit P_1 bildet, $= 73^1/_2{}^0$.

b) Durch Rechnung: Denkt man sich in die Richtung der Kraft P_1 die Achse Mx und normal darauf die Achse My gelegt, so hat man, wenn man

*) Der Einfachheit wegen ist sie hier in die Richtung der Kraft P_1 selbst gelegt.

die Winkel, welche die Kräfte P_1, P_2, P_3 mit der Achse Mx einschließen, mit α_1, α_2, α_3 bezeichnet, also $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 56^0$, $\alpha_3 = 56^0 + 104^0 = 160^0$ ist, und wenn die Summe der Komponenten auf der Achse Mx durch X, auf der Achse My durch Y ausgedrückt wird,

$$X = 30 \,.\, cos\ 0^0 + 70 \,.\, cos\ 56^0 + 50 \,.\, cos\ 160^0 = 22{,}16\ \text{kg}.$$
$$Y = 30 \,.\, sin\ 0^0 + 70 \,.\, sin\ 56^0 + 50 \,.\, sin\ 160^0 = 75{,}13\ \text{kg}.$$

Bezeichnet man den Winkel, den die Mittelkraft mit der Achse Mx einschließt, mit φ, so ist

$$tang\ \varphi = \frac{Y}{X} = \frac{75{,}13}{22{,}16} = 3{,}3903, \text{ also } \varphi = 73^0\,34',$$

die Mittelkraft

$$P = \sqrt{X^2 + Y^2} = \frac{X}{cos\ \varphi} = \frac{Y}{sin\ \varphi} = 78{,}33\ \text{kg}.$$

13. $X = 4{,}193\ \text{kg}$, $Y = 8{,}4546\ \text{kg}$.

$$P = \sqrt{X^2 + Y^2} = 9{,}4372\ \text{kg},$$
$$tang\ \varphi = \frac{Y}{X} = \frac{8{,}4546}{4{,}193}, \text{ also } \varphi = 63^0\,37'\,16'',$$

wo φ die Neigung von P gegen die Achse der X bedeutet.

14. Legt man die Abscissenachse in die Richtung der ersten Kraft und den Anfangspunkt der Koordinaten in die Mitte des Körpers, so sind $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 160^0$, $\alpha_3 = 314^0\,48'$ die Winkel, welche die Richtungen der Kräfte mit der Abscissenachse bilden, und es ist

$$X = 300 \,.\, cos\ 0^0 + 500 \,.\, cos\ 160^0 + 241 \,.\, cos\ 314^0\,48'$$
$$= 300 - 469{,}8 + 169{,}8 = 0.$$
$$Y = 300 \,.\, sin\ 0^0 + 500 \,.\, sin\ 160^0 + 241 \,.\, sin\ 314^0\,48'$$
$$= 0 + 171 - 171 = 0;$$

die Kräfte sind also im Gleichgewicht.

15. $R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$, wo $X = \Sigma\,(K cos\ \alpha)$, $Y = \Sigma\,(K cos\ \beta)$, $Z = \Sigma\,(K\ cos\ \gamma)$. Dabei bedeuten K die gegebenen Kräfte, sowie α, β und γ die Winkel, welche die Kräfte mit den Achsen bilden.

Nun findet sich:

$$\Sigma\,(K cos\ \alpha) = 3{,}24492;\ \Sigma\,(K cos\ \beta) = 1{,}48831 \text{ und}$$
$$\Sigma\,(K cos\ \gamma) = -\,0{,}16480.$$

Daraus erhält man: $R = 3{,}574$.

Die Winkel, welche R mit den Achsen bildet, sind durch die Gleichungen bestimmt:

$$cos\ (R, X) = \frac{X}{R};\ cos\ (R, Y) = \frac{Y}{R};\ cos\ (R, Z) = \frac{Z}{R},$$

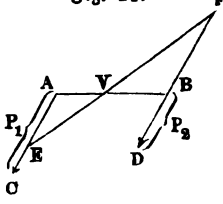
oder $R, X = 24^0\,46{,}3'$; $R, Y = 65^0\,23{,}3'$ und $R, Z = 92^0\,38{,}7'$.

---

16. a) Man verbinde (Fig. 11) die Angriffspunkte A und B der beiden parallelen Kräfte P_1 und P_2, mache $AE = P_2$ sowie $BF = P_1$ und

verbinde die Punkte E und F durch eine gerade Linie, so ist der Durchschnittspunkt V der gesuchte Punkt. Denn aus den ähnlichen Dreiecken AEV und BEV folgt: $AV : BV = AE : BF$, d. h. $= P_2 : P_1$.

Fig. 11.



b) Ähnliches Verfahren; der Mittelpunkt liegt, wenn die Kräfte ungleich sind, in der Verlängerung der Verbindungslinie ihrer Angriffspunkte auf der Seite der größeren Kraft. Sind die Kräfte gleich, so haben sie keine Resultierende.

17. Zwischen zwei parallelen Kräften P_1 und P_2, ihrer Resultierenden P, sowie der Entfernung a der Angriffspunkte der beiden parallelen Kräfte und den Entfernungen p_1 und p_2 ihrer Angriffspunkte von ihrem Mittelpunkte hat man die Gleichungen: $P = P_1 + P_2$; $P_1 p_1 = P_2 p_2$; $a = p_1 + p_2$, mittels welcher, wenn von den sechs Größen drei bekannt sind, die drei andern gefunden werden können.

Für den vorliegenden Fall findet sich:

$$P = P_1 + P_2 = 12\,\text{kg};\quad p_1 = \frac{P_2 a}{P_1 + P_2} = \frac{7 \cdot 2}{12} = 1\tfrac{1}{6}\,\text{m}.$$

$$p = \frac{P_1 a}{P_1 + P_2} = \frac{5 \cdot 2}{12} = \tfrac{5}{6}\,\text{m}.$$

18. Aus Aufgabe 16 folgt: $a = \dfrac{(P_1 + P_2) p_1}{P_2} = 3\tfrac{1}{5}\,\text{m}.$

19. Denkt man sich die Angriffspunkte der Kräfte in die Durchschnittspunkte ihrer Richtungen mit einer auf diese senkrechten Linie versetzt, so folgt aus Aufgabe 17:

$$P_1 = \frac{P p_2}{p_1 + p_2} = \frac{18 \cdot 9}{14} = 11\tfrac{4}{7},$$

$$P_2 = \frac{P p_1}{p_1 + p_2} = \frac{18 \cdot 5}{14} = 6\tfrac{3}{7}.$$

20. $P_2 = 5$, $p_2 = 6$.

21. Bezeichnen P_1, P_2 parallele Kräfte, P ihre Resultierende, sowie p_1, p_2, p die Abstände der Angriffspunkte dieser Kräfte von der Ebene, so ist $Pp = P_1 p_1 + P_2 p_2$ (Fl. §. 25, 3; Kr. §. 166), und aus dieser in Verbindung mit $P = P_1 + P_2$ folgt

$$p = \frac{P_1 p_1 + P_2 p_2}{P_1 + P_2}.$$ In der vorliegenden Aufgabe hat man also

$$p = \frac{11 \cdot 2 + 15 \cdot 3}{11 + 15} = 2{,}578\,\text{m}.$$

22. $$p = \frac{P_1 p_1 + P_2 p_2 + P_3 p_3 + \cdots}{P_1 + P_2 + P_3 + \cdots}$$

$$= \frac{4 \cdot 3 + 8 \cdot 4 + 5 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + 2 \cdot 9}{4 + 8 + 5 + 3 + 2} = 4{,}909\,\text{dm}.$$

23. $$p = \frac{4 \cdot 3 + 8 \cdot 4 + 5 \cdot 5 - 3 \cdot 7 - 2 \cdot 9}{4 + 8 + 5 + 3 + 2} = 1{,}36\,\text{dm}.$$

24. $x = \frac{18.25 + 20.39 - 30.32 + 24.16 - 18.13}{18 + 20 - 30 + 24 + 18} = {}^{420}/_{50} = 8{,}4.$

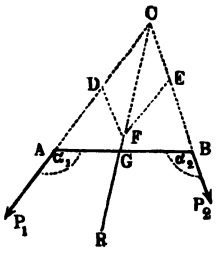
$y = \frac{18.13 + 20.24 - 30.41 + 24.39 - 18.20}{18 + 20 - 30 + 24 + 18} = {}^{60}/_{50} = 1{,}2.$

$R = 50.$

25. Er würde im Anfangspunkte der Koordinaten liegen, da in diesem Falle $x = 0$, $y = 0$ sich ergiebt.

26. Man verlängere (Fig. 12) die Richtungen AP_1 und BP_2 der beiden Kräfte bis zum Schneidepunkte C, schneide von da aus die Stücke CD und CE proportional den Kräften P_1 und P_2 ab und vollende das Parallelogramm $CDFE$, so stellt die Diagonale CF desselben die gesuchte Resultierende dar, deren Angriffspunkt man in jeden beliebigen Punkt ihrer Richtung, z. B. in den Punkt G verlegen kann.

Fig. 12.



Um die Größe und Lage der Resultierenden durch Rechnung zu finden, ergiebt sich aus dem Dreieck ABC, da in demselben AB, sowie die beiden anliegenden Winkel gegeben sind, $AC = 2{,}022$, $BC = 1{,}469$; ferner berechnet sich aus dem Dreieck CDF der Winkel $DCF = 36^0\,52'$, sowie der Winkel $FCE = 53^0\,8'$ und $R = CF = 15$. Der Angriffspunkt G in der Linie AB findet sich sodann durch die Linie AG, die sich aus dem Dreieck ACG, worin jetzt AC und die beiden anliegenden Winkel bekannt sind, $= 1{,}265$ ergiebt, oder aus dem Dreieck BCG durch $BG = 1{,}235$.

27. $R = \sqrt{20^2 + 34^2 + 2 \,.\, 20 \,.\, 34 \cos 70^0} = 44{,}96$ kg.

Bezeichnet φ den Winkel, den die Mittelkraft R mit P bildet, so ist

$$\sin \varphi = \frac{34 \,.\, \sin 70^0}{44{,}96}, \quad \text{also } \varphi = 45^0\,17',$$

und wenn a den Abstand der Mittelkraftsrichtung vom Punkte O bezeichnet

$$\varphi = \frac{20 \,.\, 4 + 34 \,.\, 1}{44{,}96} = 2{,}536 \text{ m}.$$

28. Bezeichnet x die Summe der der Achse Ox parallelen Komponenten, sowie Y die Summe der darauf senkrechten Komponenten, so ist

$X = 26 \,.\, \cos 26^0\,30' + 22{,}5 \,.\, \cos 35^0 + 15 \,.\, \cos 124^0 = 33{,}3,$

$Y = 26 \,.\, \sin 26^0\,30' + 22{,}5 \,.\, \sin 35^0 + 15 \,.\, \sin 124^0 = 36{,}94,$

woraus sich die Größe der Resultierenden ergiebt

$$R = \sqrt{33{,}3^2 + 37{,}33^2} = 49{,}73 \text{ kg},$$

sowie $\operatorname{tang} \varphi = \frac{Y}{X} = \frac{37{,}33}{33{,}3}$, woraus $\varphi = 47^0\,58'$.

Der Abstand der Resultierenden vom Punkte O ist:

$$a = \frac{26 \,.\, 6 + 22{,}5 \,.\, 5 - 15 \,.\, 8}{46{,}92} = 2{,}98.$$

Auflösungen zu IV.

1. Im Halbierungspunkte der Linie.
2. Die Halbierungspunkte D, E und F (Fig. 13) sind die Schwerpunkte der Dreieckseiten a, b und c. Teilt man die Strecke DE so, daß $DG : EG = b : a$, so ist G der Schwerpunkt der beiden den Winkel C einschließenden Seiten a und b. Teilt man ferner die Strecke GF so, daß $GS : FS = c : (a + b)$, so ist S der Schwerpunkt vom Umfang des Dreiecks ABC.

Fig. 13.

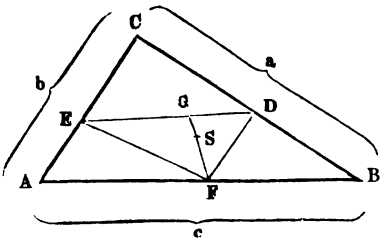
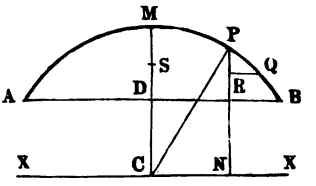


Fig. 14.



(Man findet auch den Punkt S, wenn man zwei Winkel des Dreiecks DEF halbiert; S ist also der Mittelpunkt des in das Dreieck DEF zu beschreibenden Kreises.)

3. Im Mittelpunkte der Figur.
4. Ist M (Fig. 14) die Mitte des Bogens $AB = b$, so liegt der Schwerpunkt S innerhalb des Halbmessers CM in einer Entfernung $CS = x$ vom Mittelpunkte, die sich auf folgende Weise bestimmt. Man denke sich den Bogen in unendlich viele Teile geteilt, und die statischen Momente derselben in Bezug auf eine durch C gehende, mit AB parallele Linie XX bestimmt. Ist PQ ein solcher unendlich kleiner Teil des Bogens und PN dessen Abstand von XX, so ist sein statisches Moment $= PQ \,.\, PN$ (Lehrbuch §. 25, 3). Zieht man PC, sowie $QR \parallel AB$, so erhält man zwei ähnliche Dreiecke PQR und CPN, in welchen die Schenkel der beiden Winkel PQR und CPN senkrecht aufeinander stehen, woraus $PQ \,.\, PN = QR \,.\, CP = QR \,.\, r$ folgt, d. h. das statische Moment des Bogenstückes PQ in Bezug auf die Linie XX ist gleich dem Produkt aus dem Halbmesser und der Projektion des Bogenstückes auf die Sehne AB. Dasselbe gilt für jedes andere Bogenstück, so daß also die Summe der statischen Momente aller Bogenstücke gleich ist dem Produkt aus dem Halbmesser und der Sehne $AB = s$, also $= r \,.\, s$. Ist nun S der Schwerpunkt des Bogens AB, d. h. der Mittelpunkt der auf die Massenteile des Bogens b wirkenden parallelen Schwerkräfte, und setzt man $CS = x$, so muß $x\,b = r\,s$, los-

$x = \frac{r\,s}{b}$ sein, die Entfernung des Schwerpunktes vom Mittelpunkte des Bogens ist also die vierte Proportionale zum Bogen, der zugehörigen Sehne und dem Halbmesser.

In vorliegender Aufgabe ist, da sich die Länge des Kreisbogens b aus den für r und s gegebenen Werten $= 49{,}74$ cm berechnet*), $x = \frac{27 \,.\, 43}{49{,}74}$ $= 23{,}34$ cm.

5. Halbiert man die Seite AB (Fig. 15) und verbindet den Halbierungspunkt D mit C, so ist CD eine Schwerlinie des Dreiecks. Zieht man eine

Fig. 15.

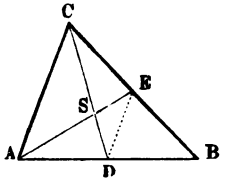
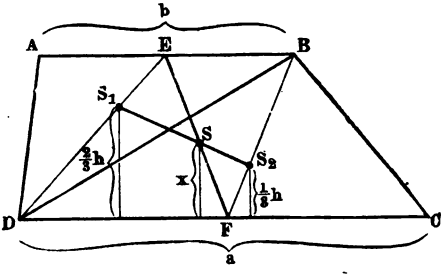


Fig. 16.



zweite Schwerlinie AE, so ist der Durchschnittspunkt S der Schwerpunkt des Dreiecks. (Die dritte Schwerlinie geht gleichfalls durch den Punkt S.)

Zieht man DE, so ist $DE = \frac{1}{2} AC$, und daraus läßt sich mittels der ähnlichen Dreiecke DSE und CSA darthun, daß $DS = \frac{1}{2} CS = \frac{1}{3} DC$ oder $CS = \frac{2}{3} CD$.

6. Der Schwerpunkt S liegt (Fig. 16) im Durchschnittspunkte der Schwerlinie EF mit der Verbindungslinie der Schwerpunkte S_1 und S_2 der beiden Dreiecke ABD und BCD. Seine Entfernung x von der größeren a der beiden parallelen Seiten bestimmt sich, wenn b die kleinere Seite und h die Höhe des Trapezes bezeichnet, aus: $\frac{(a+b)\,h}{2} \cdot x = \frac{b\,h}{2} \cdot \frac{2}{3} h + \frac{a\,h}{2} \cdot \frac{1}{3} h$, nämlich $x = \frac{a + 2b}{a + b} \cdot \frac{h}{3}$ (Lehrb. §. 31, 3).

7. Verbindet man die Schwerpunkte der beiden Dreiecke, in welche das Viereck durch die eine der beiden Diagonalen geteilt wird, und ebenso die Schwerpunkte der beiden durch Ziehen der anderen Diagonale entstehenden Dreiecke,

*) Der zugehörige Zentriwinkel β findet sich aus $r \sin \frac{1}{2} \beta = \frac{1}{2} s$, nämlich $\beta = 105^0\,33'\,20''$ und daraus $b = \frac{r \,.\, \beta \,.\, \pi}{180^0} = 49{,}74$ cm.

so ist der Durchschnittspunkt dieser zwei Verbindungslinien der Schwerpunkt des Vierecks.

8. In dem Viereck $ABCD$ ist $AC = AD = 0{,}6$ m; ferner $BC = BD = 0{,}65$ m und $CD = 1$ m (Fig. 17).

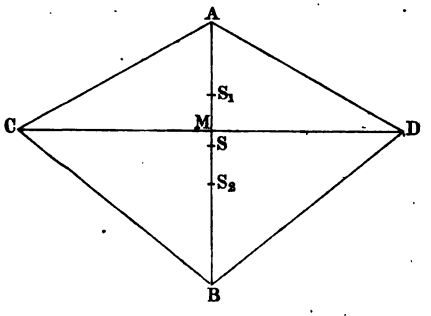
Nun ist $AM = \sqrt{0{,}6^2 - 0{,}5^2} = 0{,}3316$ und $BM = \sqrt{0{,}65^2 - 0{,}5^2} = 0{,}4153$.

Ist nun S_1 der Schwerpunkt des einen und S_2 der des andern Dreiecks, so gilt:

$$MS_1 = 0{,}1105 \text{ und } MS_2 = 0{,}1384.$$

Nun verhalten sich die Gewichte der Dreiecke wie deren Inhalte; außerdem verhalten sich die Inhalte wie die Höhen AM und BM, weil die Dreiecke gleiche Grundlinie haben. Der Schwerpunkt S des ganzen Vierecks teilt die Linie $S_1 S_2$ im umgekehrten Verhältnis von AM und BM oder von MS_1 und MS_2 (da diese gleich $\frac{1}{3} AM$ und $\frac{1}{3} BM$). Trägt man nun von S_2 eine Strecke nach M hin ab, welche gleich 0,1105 ist, so erhält man S, welches um $0{,}1384 - 0{,}1105 = 0{,}0279$ m von M absteht.

Fig. 17.



9. Man zerlege das Vieleck in Dreiecke, bestimme nach Aufgabe 5 die Schwerpunkte derselben, denke sich diese als die Angriffspunkte paralleler Kräfte, deren relative Größen durch die Flächeninhalte der Dreiecke ausgedrückt werden können, so ist der Mittelpunkt dieser parallelen Kräfte der gesuchte Schwerpunkt.

10. Die Schwerlinie des Kreisausschnittes ABC (Fig. 18) fällt mit der Halbierungslinie des Winkels ABC zusammen. Denkt man sich den Ausschnitt durch Ziehen von Radien in unendlich viele Teile geteilt, so kann man diese als Dreiecke betrachten. Die Schwerpunkte aller dieser Dreiecke liegen (Aufgabe 5) in einem Kreisbogen, dessen Halbmesser $CA_1 = \frac{2}{3} CA = \frac{2}{3} r$, und dessen zugehörige Sehne $A_1 B_1 = \frac{2}{3} AB = \frac{2}{3} s$ ist;

Fig. 18.

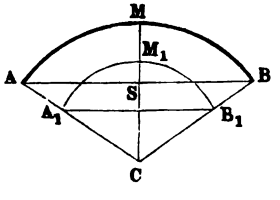
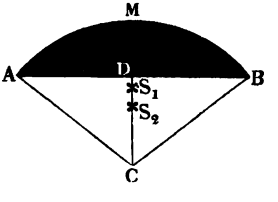


Fig. 19.



zufolge Aufgabe 4 ist also die Entfernung des Schwerpunktes S vom Mittelpunkt $C = \frac{\frac{2}{3}r \cdot \frac{2}{3}s}{\frac{2}{3}b} = \frac{2}{3} \cdot \frac{rs}{b}$, wenn nämlich b den aus den Werten von r und s berechneten Bogen AB bezeichnet. In vorliegender Aufgabe berechnet sich $b = 47{,}3$ cm, also ist $x = \frac{2}{3} \cdot \frac{36{,}44}{47{,}3} = 22{,}3$ cm.

11. Sind (Fig. 19, a. v. S.) S, S_1, S_2 die Schwerpunkte und bezeichnen F, F_1, F_2 die Flächeninhalte beziehungsweise des Kreisabschnittes AMB, des Kreisausschnittes $AMBC$ und des Dreiecks ABC, so ist $F_1 \cdot CS_1 = F \cdot CS + F_2 \cdot CS_2$ (III, 21) oder $F \cdot CS = F_1 \cdot CS_1 - F_2 \cdot CS_2$.

Nun ist $F_1 = \frac{1}{2}rb$, wenn b den Bogen AB bezeichnet;

$$F_2 = \frac{1}{2}s\sqrt{r_2 - \frac{1}{4}s^2};$$

$$CS_1 = \frac{2}{3}\frac{rs}{b} \text{ (Aufg. 10)};$$

$$CS_2 = \frac{2}{3}\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s^2} \text{ (Aufg. 5)};$$

folglich $F \cdot CS = \frac{1}{2}rb \cdot \frac{2}{3}\frac{rs}{b} - \frac{1}{2}s\sqrt{r_2 - \frac{1}{4}s^2} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s^2}$

$$= \frac{1}{12}s^3,$$

also $CS = \frac{s^3}{12F}$, worin $F = F_1 - F_2 = \frac{1}{2}rb - \frac{1}{2}s\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s^2}$.

In vorliegender Aufgabe berechnet sich der Kreisabschnitt $F = 224{,}5$ qcm, also $x = \frac{44^3}{12 \cdot 224{,}5} = 31{,}6$ cm.

12. Aus Aufgabe 10 folgt $x = \frac{2}{3} \cdot \frac{r \cdot 2r}{b} = \frac{4r}{3\pi} = 0{,}424 \cdot r = 4{,}664$ cm vom Mittelpunkte in der Schwerlinie.

13. Denkt man sich den Kegelmantel durch gerade Linien von der Spitze nach der Peripherie des Grundkreises in unendlich viele gleiche Teile geteilt, so kann man diese als Dreiecke betrachten. Die Schwerpunkte dieser Dreiecke liegen in der Peripherie eines Kreises, dessen Ebene um $^2/_3$ der Höhe des Kegels von seiner Spitze entfernt ist; der Mittelpunkt dieses Kreises ist der Schwerpunkt des Mantels.

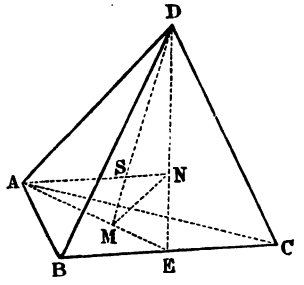
14. Denkt man sich die Kugelzone durch Ebenen, die dem Grundkreise parallel sind, in unendlich viele Teile von gleicher Höhe geteilt, so haben alle diese Elementarzonen gleichen Flächeninhalt und ihre Schwerpunkte liegen in der Senkrechten, die im Mittelpunkte des Grundkreises auf diesem senkrecht steht,

d. h. in der Höhe der Kugelzone. Da jeder dieser Schwerpunkte einer gleich großen Masse entspricht, so ist der Halbierungspunkt der Höhe der Schwerpunkt der Kugelzone.

Dasselbe gilt von der Kugelschale oder Kalotte.

15. In Fig. 20 sei M der nach Aufgabe 5 bestimmte Schwerpunkt des Dreiecks ABC, sowie N der Schwerpunkt des Dreiecks DBC. Denkt man sich die Pyramide durch Ebenen parallel mit der Grundfläche ABC geschnitten, so entstehen Dreiecke, von denen sich geometrisch nachweisen läßt, daß sie dem $\triangle ABC$ ähnlich sind und daß ihre Schwerpunkte sämtlich auf die Linie DM fallen; also muß auch der Schwerpunkt der Pyramide in DM liegen. Ebenso läßt sich zeigen, daß dieser Schwerpunkt auch in der Linie AN liegen muß; folglich muß er in den Durchschnittspunkt S der beiden in der Ebene des $\triangle ADE$ befindlichen Schwerelinien DM und AN fallen. Zieht man

Fig. 20.



MN, so ist, weil $ME = \frac{1}{3} AE$ und $NE = \frac{1}{3} DE$, $MN \parallel AD$, also $MN = \frac{1}{3} AD$ und $\triangle MNS \sim \triangle ASD$, folglich $MS = \frac{1}{3} DS = \frac{1}{4} MD$. Der Schwerpunkt einer dreiseitigen Pyramide liegt also in der Geraden, welche den Schwerpunkt der Grundfläche mit der gegenüberliegenden Spitze verbindet, und zwar um $^3/_4$ dieser Geraden von der Spitze entfernt.

16. Denkt man sich die vielseitige Pyramide mittels Ebenen, welche durch die Spitze gehen, in dreiseitige Pyramiden zerlegt, so liegen nach voriger Aufgabe die Schwerpunkte derselben in einer Ebene, die um $^1/_4$ der Höhe von der Grundfläche entfernt ist. In dieser Ebene liegt also auch der Schwerpunkt der vielseitigen Pyramide, und da derselbe auch in der Verbindungslinie des Schwerpunktes der Grundfläche mit der gegenüberliegenden Spitze liegen muß, was sich wie das Gleiche in voriger Aufgabe beweisen läßt, so ergiebt sich für die Bestimmung des Schwerpunktes der vielseitigen Pyramide die nämliche Regel, wie für die der dreiseitigen Pyramide.

Für die Bestimmung des Schwerpunktes eines Kegels gilt dieselbe Regel.

17. Man kann sich den Kugelausschnitt $AMBC$ (Fig. 21, a. f. S., die einen durch den Mittelpunkt und die Schwerlinie gehenden Durchschnitt desselben darstellt) als eine Summe von unendlich vielen Pyramiden denken, deren gemeinschaftliche Spitze der Kugelmittelpunkt C ist und deren Grundflächen die Kugelmütze AMB bilden. Die Schwerpunkte aller dieser Pyramiden stehen nach voriger Aufgabe um $^3/_4$ des Kugelhalbmessers von C ab, liegen also in einer zweiten Kugelmütze AM_1B_1 vom Halbmesser $CA_1 = \frac{3}{4} CA = \frac{3}{4} r$, deren Schwerpunkt folglich der Schwerpunkt des Kugelausschnittes ist. Ist S

der Schwerpunkt, so ist, wenn h die Höhe der äußeren Kugelmütze AMB, also $\frac{3}{4}h$ die Höhe der Kugelmütze $A_1M_1B_1$ bezeichnet,

$M_1S = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}h\right)$ (Aufg. 14), folglich $CS = CM_1 - M_1S = \frac{3}{4}r$

$$- \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}h\right) = \frac{3}{4}\left(r - \frac{1}{2}h\right) = \frac{3}{8}(2r - h).$$

18. Sind (Fig. 22) S, S_1 und S_2 die Schwerpunkte beziehungsweise des Kugelabschnittes AMB, des Kugelausschnittes $AMBC$ und des Kegels

Fig. 21.

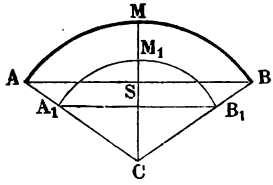
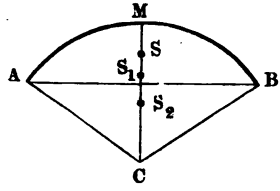


Fig. 22.



ABC, und bezeichnen K, K_1 und K_2 deren körperliche Inhalte, so muß $K_1 . CS_1 = K . CS + K_2 . CS_2$, oder $K . CS = K_1 . CS_1 - K_2 . CS_2$ sein.

Nun ist aber

$$K_1 = \frac{2}{3}r^2\pi h;$$

$$K_2 = \frac{1}{3}(2r - h)\, h\pi\, (r - h);$$

$CS_1 = \frac{3}{8}(2r - h)$ (Aufgabe 17); $CS_2 = \frac{3}{4}(r - h)$ (Aufgabe 16);

also $K . CS = \frac{2}{3}r^2\pi h \cdot \frac{3}{8}(2r - h) - \frac{1}{3}(2r - h)\, h\pi\, (r - h)$

$\cdot \frac{3}{4}(r - h) = \frac{1}{4}\pi h^2 (2r - h)^2$,

folglich, da $K = \frac{1}{3}\pi h^2 (3r - h)$ ist,

$$CS = \frac{\frac{1}{4}\pi h^2 (2r - h)^2}{\frac{1}{3}\pi h^2 (3r - h)} = \frac{3}{4} \cdot \frac{(2r - h)^2}{3r - h}.$$

19. Sowohl aus Aufgabe 17 als aus 18 folgt $CS = \frac{3}{8}r = \frac{3}{8} \cdot 2{,}4$ $= 0{,}9$ cm.

20. Das Gewicht Q des Körpers ist $lbhs = 288$ kg. Liegt der Körper auf der Seitenfläche lb, so ergiebt sich die Stabilität bezüglich der Umdrehung um die Kante l, d. h. die äußerste Kraft, welche parallel mit der Kante b

auf den Schwerpunkt wirken kann, ohne daß der Körper umgeworfen wird, aus der Gleichung $P \cdot \frac{h}{2} = Q \cdot \frac{b}{2}$, also $P = \frac{Qb}{h} = \frac{288{,}8}{5} = 460{,}8$ kg.

Liegt der Körper auf der Seitenfläche bh, so ergiebt sich die Stabilität bezüglich der Kante b . . . . $= \frac{Qh}{l} = 120$ kg.

21. Zieht man in Fig. 20 eine Gerade von E durch S und trifft sie die MN in H_1 und die AD in H (welche Punkte in der Figur nicht gezeichnet sind), so gilt: $SH_1 = \frac{1}{3} SH$ und $EH_1 = \frac{2}{3} EH$, also ist $EH_1 + SH_1 = \frac{1}{3}(EH + SH)$; oder $ES = \frac{1}{3}(ES + 2SH)$, woraus folgt, daß $ES = SH$. Zieht man noch durch S eine Parallele zu AD (und MN), so ergiebt sich leicht, daß $AH = HD$ (und $MH_1 = H_1N$). Nun ist aber die Mitte H von AD der Schwerpunkt der zwei gleichen in A und D befindlichen Massen und ebenso ist E der Schwerpunkt der in B und C befindlichen gleichen Massen; der Gesamtschwerpunkt muß also in der Mitte von EH, d. h. in S liegen. (Eine Linie, welche durch die Mitten von AB und DC gezogen wird, geht ebenso durch S und wird von diesem Punkte halbiert.)

22. 1) Inhalt des Kegelstumpfes:

$$\frac{1}{3}\pi \cdot 3{,}6 \cdot (2{,}4^2 + 2{,}4 \cdot 1{,}5 + 1{,}5^2) = 43{,}769.$$

2) Höhe des Ergänzungskegels:

Aus $x : x + 3{,}6 = 1{,}5 : 2{,}4$ folgt $x = 6$.

3) Höhe des ganzen Kegels:

$$6 + 3{,}6 = 9{,}6.$$

4) Inhalt des Ergänzungskegels:

$$\frac{1}{3}\pi \cdot 6 \cdot 1{,}5^2 = 14{,}137.$$

5) Inhalt des ganzen Kegels: 57,906; folgt durch Addition von 1) und 4).

6) Der Schwerpunkt des Ergänzungskegels liegt über der unteren Grundfläche des Stumpfes:

$$^1/_4 \cdot 6 + 3{,}6 = 5{,}1.$$

7) Der Schwerpunkt des ganzen Kegels liegt über der unteren Grundfläche des Stumpfes:

$$^1/_4 \cdot 9{,}6 = 2{,}4.$$

8) Der Schwerpunkt des Stumpfes liegt über dessen unterer Grundfläche:

$x \cdot 43{,}769 + 5{,}1 \cdot 14{,}137 = 2{,}4 \cdot 57{,}906$, woraus $x = 1{,}53$.

9) Inhalt des ausgehöhlten Cylinders:

$$\pi \cdot 1{,}2^2 \cdot 3{,}6 = 16{,}286.$$

10) Inhalt des ausgehöhlten Stumpfes:

$$43{,}769 - 16{,}286 = 27{,}483.$$

11) Schwerpunkt des ausgehöhlten Stumpfes:

$x \,.\, 27{,}483 + 1{,}8 \,.\, 16{,}286 = 1{,}53 \,.\, 43{,}769$, woraus $x = 1{,}37$.

12) Gewicht des ausgehöhlten Stumpfes:

$$27{,}483 \,.\, 2{,}4 = 65{,}959.$$

13) Gewicht des Bleicylinders:

$$8{,}143 \,.\, 11{,}5 = 93{,}645.$$

14) Gewicht des Stumpfes und Cylinders:

$$159{,}604.$$

15) Schwerpunkt des ausgehöhlten Stumpfes und Cylinders:

$1{,}37 \,.\, 65{,}959 + 0{,}9 \,.\, 93{,}645 = x \,.\, 159{,}604$, woraus $x = 1{,}09$.

23. 1) Inhalt der Röhrenwand:

$$\pi \,.\, 250 \,(1{,}5^2 - 0{,}75^2) = 1325{,}363.$$

2) Inhalt der Kugelwand:

$$4/3\,\pi \,(5^3 - 4{,}5^3) = 141{,}896.$$

3) Inhalt von Röhren- und Kugelwand: 1467,259.

4) Schwerpunkt der Röhre (bis zum unteren Ende der Kugel): 135 mm.

5) Schwerpunkt der Kugel: 5 mm.

6) Schwerpunkt von Kugel und Röhre:

$x \,.\, 1467{,}259 = 141{,}896 \,.\, 5 + 1325{,}363 \,.\, 135\,x$, also $x = 122{,}4$ mm.

7)	Gewicht der Kugel	400,147
8)	Gewicht des Weingeistes in der Kugel	332,083
9)	Gewicht von Kugel und Weingeist	732,230
10)	Gewicht von 150 mm der Röhre	2242,515
11)	Gewicht des Weingeistes in 150 mm der Röhre . .	230,613
12)	Gewicht von Weingeist + 150 mm der Röhre . .	2473,128
13)	Gewicht von Kugel + Weingeist + 150 mm der Röhre	3205,358
14)	Gewicht von 100 mm der Röhre	1495,010
15)	Gesamtgewicht des Ganzen	4700,368

16) Schwerpunkt des Ganzen, soweit es mit Weingeist gefüllt ist:

$x \,.\, 3205{,}358 = 2473{,}128 \,.\, 85 + 732{,}230 \,.\, 5\,x$, also $x = 66{,}7$ mm.

17) Schwerpunkt des Ganzen:

$x \,.\, 4700{,}368 = 3205{,}358 \,.\, 66{,}7 + 1495{,}010 \,.\, 210\,x$, also $x = 112{,}3$ mm.

Auflösungen zu V.

1. Am zweiten Arme müssen $\frac{0{,}3 \cdot 30}{0{,}5} = 18$ kg hängen und der Druck auf den Stützpunkt ist also $= 30 + 18 = 48$ kg.

2. $\frac{3 \cdot 500}{800} = 1\frac{7}{8}$ m.

3. P muß etwas größer sein als 200 kg; während aber die Kraft fünfmal so groß ist wie die Last, ist der Weg der Last fünfmal so groß wie der der Kraft.

4. Bezeichnet man die gesuchte Entfernung mit x, so ist, jenachdem man den Stützpunkt oder einen der Angriffspunkte der Kräfte als Drehpunkt (oder Mittelpunkt der Momente) nimmt: 1) $P(a - x) = Q \cdot x$, oder 2) $P \cdot a = (P + Q)x$, oder 3) $Q \cdot a = (P + Q) \cdot (a - x)$, und aus jeder dieser Gleichungen ergiebt sich $x = \frac{P \cdot a}{P + Q}$.

5. Bezeichnen wir das Gewicht am Hebelarm a mit x, so haben wir, jenachdem wir den Stützpunkt oder die Aufhängepunkte der Gewichte als Mittelpunkt der Momente annehmen, entweder
1) $x \cdot a = (Q - x) \cdot b$, oder 2) $Q \cdot b = x(a + b)$, oder 3) $Q \cdot a = (Q - x) \cdot (a + b)$, und aus jeder dieser Gleichungen folgt

$$x = \frac{Q \cdot b}{a + b}, \quad Q - x = \frac{Q \cdot a}{a + b}.$$

6. Nimmt man (Fig. 23) die Momente von B aus, so hat man, wenn der Druck in A mit D' bezeichnet wird,

Fig. 23.

$$Q \cdot BC = D' \cdot AB, \text{ also } D' = \frac{Q \cdot BC}{AB}.$$

Nimmt man dagegen die Momente von A aus und bezeichnet den Druck in B mit D'', so hat man

$$Q \cdot AC = D'' \cdot AB, \text{ also } D'' = \frac{Q \cdot AC}{AB}.$$

7. Die Last muß vom stärkeren Träger $1\frac{7}{13}$ m, vom schwächeren $2\frac{6}{13}$ m entfernt sein, und in diesem Falle hat jener $61\frac{7}{13}$ kg, dieser $38\frac{6}{13}$ kg zu tragen.

8. Aus $99 \cdot 3 \cdot \sin 30^0 = 100 \cdot \frac{5}{3} \cdot \sin B$ folgt $\sin B = 0{,}891 = \sin 63^0$, also $B = 63^0$.

9. Setzen wir die gesuchte Entfernung $= x$, so haben wir, die Momente vom Endpunkte genommen,

$$(3 + 5 + 7 + 9)\, x = 3 \,.\, 0 + 5 \,.\, 1 + 7 \,.\, 2 + 9 \,.\, 3,$$

$$\text{also } x = \frac{5 + 7 \,.\, 2 + 9 \,.\, 3}{3 + 5 + 7 + 9} = \frac{23}{12} m = 1{,}92 \text{ m (ungefähr).}$$

10. Nimmt man (Fig. 24) die Momente vom Punkte M aus, so erhält man als Gleichgewichtsbedingung unmittelbar: $P \,.\, AM = Q \,.\, MB + G \,.\, MD$. Nimmt man dagegen die Momente von A aus, so erhält man $(P + Q + G) \,.\, AM = G \,.\, AD + Q \,.\, AB$, welche Gleichung in die vorige übergeht. Der Druck ist $= P + Q + G$.

11. Aus $30 \cdot \frac{1}{3} = 2 \,.\, {}^1/_6 + x \cdot \frac{2}{3}$ folgt $x = 14\,{}^1/_2$ kg.

12. Bezeichnet x die Entfernung des Unterstützungspunktes vom Aufhängepunkte des Gewichtes von 16 kg, so folgt aus $16 \,.\, x = (6 - x) \,.\, 8 + (3 - x) \,.\, 18$, $x = 2\,{}^3/_7$ kg.

13. Aus $P \,.\, 1 = 50 \,.\, 0{,}3 + 1\,{}^1/_2 \,.\, {}^1/_2$ folgt $P = 15\,{}^3/_4$ kg.

14. Bezeichnet man (Fig. 25) den Druck auf das Ventil mit Q, so hat man $Q \,.\, 5 = 5 \,.\, 50 + 1 \,.\, 20$, also $Q = 54$ kg. Gewöhnlich reduziert man,

Fig. 24.

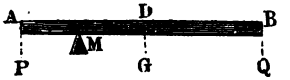


Fig. 25.

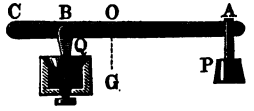
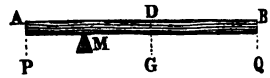


Fig. 26.



der einfacheren Berechnung des Dampfdruckes wegen, das Gewicht des Hebels auf den Endpunkt A desselben und addiert dann dies reduzierte Gewicht zu dem von P, so daß man dann den Hebel als mathematischen betrachten kann. Das vom Hebelarm CO auf den Hebelarm CA reduzierte Gewicht G wird aber $= G \cdot \frac{CO}{CA}$, also in unserem Beispiel $x = 1 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$ kg; man kann also, wenn man für $P = 5$ kg jetzt $5\,{}^2/_5$ kg in Rechnung bringt, den Hebel CA als mathematischen Hebel betrachten und statt der obigen Gleichung $Q \,.\, 5 = 5\,{}^2/_5 \,.\, 50$ setzen, woraus wieder $Q = 54$ kg folgt.

15. $P \,.\, 0{,}75 = 30 \,.\, 0{,}6 + 6 \,.\, 0{,}25 = 26$ kg und daraus

$$D = \sqrt{(Q + G)^2 + P^2} = \sqrt{36^2 + 26^2} = \sqrt{1972} = 44{,}4 \text{ kg.}$$

16. Denken wir uns E als Drehpunkt, so folgt aus $V \,.\, 4 = 200 \,.\, 3{,}5 + 75 \,.\, 1{,}5 + 100 \,.\, 1 - 150 \,.\, 0{,}7$, $V = 201{,}9$, also $W = 200 + 75 + 100 + 150 - 201{,}9 = 323{,}1$, welcher Wert sich aber auch, wenn man D als Drehpunkt betrachtet, aus der Momentengleichung $W \,.\, 4 = 200 \,.\, 0{,}5 + 75 \,.\, 2{,}5 + 100 \,.\, 3 + 150 \,.\, 4{,}7$ ergiebt.

17. Man bestimmt zuerst (Fig. 26) den Schwerpunkt D des Hebels, hängt dann an das eine Ende A desselben ein bekanntes Gewicht P und bringt

ihn nun ins Gleichgewicht, indem man ihn in M unterstützt, so ist das Gewicht G desselben $= \frac{AM}{MD} \cdot P$.

18. Im Falle des Gleichgewichtes hat man vor dem Einsinken des Körpers vom unbekannten Gewicht Q ins Wasser $Pb = Qa$, woraus man Q bestimmen könnte, was aber die Aufgabe nicht fordert.

Nach dem Einsenken in Wasser hat man, wenn p das Gewicht des verdrängten Wassers bezeichnet,

$$Pc = (Q - p)\, a.$$

Dividiert man die erste dieser Gleichungen durch die zweite, so erhält man $\frac{b}{c} = \frac{Q}{Q-p}$ und daraus $\frac{Q}{p}$, d. h. $s = \frac{b}{b-c}$.

19. Bezeichnet p den Gewichtsverlust des Glaskörpers im Wasser, p_1 den in der andern Flüssigkeit und sind bezüglich c und d die Hebelarme, an welchen das Laufgewicht wirken muß, um das Gleichgewicht beim Einsenken in Wasser und in Schwefelsäure herzustellen, so erhält man wie in 18 die Gleichungen $\frac{Q}{p} = \frac{b}{b-c}$ und $\frac{Q}{p_1} = \frac{b}{b-d}$ und aus diesen durch Division $\frac{p_1}{p}$, d. h. $s_1 = \frac{b-d}{b-c}$.

20. Eine gute Krämerwage muß

1) stabil sein; der Wagebalken muß für sich und bei gleicher Belastung sich im stabilen Gleichgewicht befinden.
2) Sie muß richtig sein, d. h. bei gleicher Belastung der beiden Schalen muß Gleichgewicht bestehen und dabei der Wagebalken eine horizontale, also der auf dem Wagebalken senkrechte Zeiger eine vertikale Lage annehmen. Das erstere wird durch gleiche Länge, überhaupt genaue Symmetrie der beiden Arme des Wagebalkens erreicht, das letztere dadurch, daß der Schwerpunkt des Wagebalkens unter den Drehpunkt zu liegen kommt; denn fiele der Schwerpunkt mit dem Drehpunkte zusammen, so würde der Wagebalken trotz gleicher Belastung der Schalen die verschiedensten Lagen annehmen können.
3) Sie muß empfindlich sein, d. h. die Lage des Wagebalkens im Zustande des Gleichgewichtes muß sich sofort merklich ändern, wenn ein kleines Übergewicht in die eine Schale gelegt wird. Zu diesem Zwecke muß sich der Drehpunkt des Wagebalkens mit den Aufhängepunkten der Wagschalen in einer geraden Linie oder um wenig darüber befinden, der Schwerpunkt des Wagebalkens darf nur sehr wenig unter dem Drehpunkte desselben liegen, die Arme des Wagebalkens müssen möglichst lang, sein Gewicht aber darf nur gering sein.
4) Sie darf nicht träge sein, d. h. ihr Wagebalken muß im Zustande des Gleichgewichtes seine horizontale Lage schnell wieder einnehmen, wenn man sie aus derselben gebracht hat. Dies wird durch die möglichste Verminderung der Zapfenreibung erreicht, weshalb man den Zapfen aus Stahl in Form einer Schneide verfertigt und auf einer Stahlplatte oder auf einem Edelstein spielen läßt.

21. $\frac{n}{2m \cdot 1000 \cdot 1000}$, da man die Empfindlichkeit einer Wage durch Angabe eines Bruches ausdrückt, der das geringste noch einen merklichen Ausschlag gebende Gewicht zum Zähler und das Gewicht der größten noch zulässigen Belastung zum Nenner hat.

22. I. Man bringe den Körper K durch Tariergewichte genau ins Gleichgewicht, nehme ihn dann aus der Schale und ersetze ihn durch soviel Gewichtsstücke, daß wieder Gleichgewicht entsteht, so geben offenbar die letzteren Gewichtsstücke das Gewicht des Körpers an.

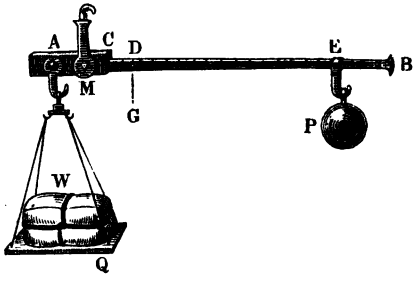
II. Man bringt den Körper K erst an dem einen Hebelarm der Wage, dessen Länge wir mit a bezeichnen wollen, ins Gleichgewicht mit einem am andern Hebelarm von der Länge $= b$ befindlichen Gewicht $= P_1$, sodann bringe man, nach Wegnahme von P_1, den Körper K an den andern Hebelarm und stelle mit Hilfe eines Gewichtes $= P_2$ das Gleichgewicht wieder her. Bezeichnet man das (richtige) Gewicht des Körpers K mit Q, so hat man

$$\begin{aligned} &\text{aus der ersten Wägung } P_1 : Q = a : b \\ &\text{aus der zweiten } \quad " \quad Q : P_2 = a : b \\ &\text{folglich } P_1 : Q = Q : P_2 \\ &\text{also } \quad Q = \sqrt{P_1 \cdot P_2}. \end{aligned}$$

23. $\sqrt{2 \cdot 2^1/_4} = 2{,}121$ kg.

24. Für den Fall, daß die Wagschale (Fig. 27) unbelastet ist, und das Laufgewicht in C sich befindet, hat man $Q \cdot MA = P \cdot MC + G \cdot MD$.

Fig. 27.



Legt man das Gewicht W einer Ware auf die Wagschale und muß man deshalb zur Herstellung des Gleichgewichtes das Laufgewicht nach E schieben, so ist jetzt

$$(Q + W) \cdot MA = P(MC + CE) + G \cdot MD.$$

Zieht man von dieser die vorige Gleichung ab, so erhält man

$$W \cdot MA = P \cdot CE \text{ oder } \frac{W}{P} = \frac{CE}{MA}.$$

Im Zustande des Gleichgewichtes ist also das Gewicht des Läufers sovielmal in dem Gewichte der Ware enthalten, wie die Strecke MA in der Strecke CE.

25. Aus der in voriger Aufgabe gefundenen Bedingungsgleichung folgen die beiden nachstehenden Einteilungsmethoden:

I. Man bestimme den Punkt C (Fig. 27), in welchem das Laufgewicht der (unbelasteten) Wagschale das Gleichgewicht hält, teile den kürzeren Hebelarm MA in ebensoviele gleiche Teile, als das Laufgewicht Kilogramme enthält, und trage diese Teile von C aus so oft als möglich auf CB ab.

II. Nach Bestimmung des Punktes C, wie bei voriger Methode, bringe man das Laufgewicht an den äußersten Punkt B des längeren Hebelarmes und stelle durch Auflegung einer Last, deren Gewicht W_n man kennt, auf die Wagschale das Gleichgewicht her. Sovielmal nun W_n Kilogramme enthält, in soviele gleiche Teile hat man die Strecke CB zu teilen.

26. a) Die im vorhergehenden näher betrachtete Schnellwage mit konstantem Gewicht an veränderlichem Hebelarm (Schnellwage mit Laufgewicht);

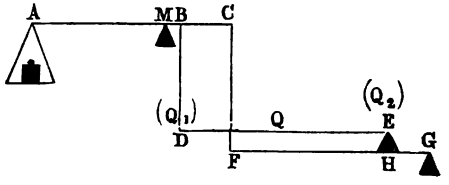
b) die mit veränderlichem Gewicht an konstantem Hebelarm (Schnellwage mit verjüngtem Gewicht, gewöhnlich Dezimalwage);

c) die mit konstantem Gewicht bei veränderlichem Stützpunkt des Wagebalkens (Schnellwage mit festem Gewicht oder dänische Schnellwage).

27. Es sei Q das Gewicht der auf einer beliebigen Stelle der Brücke DE (Fig. 28) liegenden Last und Q_1 und Q_2 seien die Drücke, welche sie bezüglich auf die Punkte D und E ausübt.

Das Moment des auf D, also auch auf den Punkt B wirkenden Drucks Q_1 in Beziehung auf den Drehpunkt M ist

Fig. 28.



$$Q_1 \cdot MB.$$

Der in E auf den Hebel FG wirkende Druck Q_2 zerlegt sich in zwei auf die Punkte G und F wirkende Drücke, wovon der erstere durch den Widerstand des festen Drehpunktes G aufgehoben wird, während der auf F wirkende $= Q_2 \cdot \frac{GH}{GF}$ ist. Dieser letztere Druck wirkt am Hebel MC, sein Moment in Beziehung auf den Drehpunkt M ist also

$$Q_2 \cdot \frac{GH}{GF} \cdot MC.$$

Wenn nun die beiden an B und C angreifenden Kräfte gerade so wirken sollen, als ob das auf der Brücke liegende Gewicht Q am Punkte B wirkte, so muß

$$Q_1 \cdot MB + Q_2 \cdot \frac{GH}{GF} \cdot MC = Q \cdot MB,$$

$$\text{d. h.} = (Q_1 + Q_2) \cdot MB$$

sein, woraus die gesuchte Bedingungsgleichung, nämlich $\frac{GH}{GF} = \frac{MB}{MC}$ folgt.

Wenn also MC z. B. viermal so groß ist wie MB, so muß auch GF viermal so groß sein wie GH.

28. Weil in der Regel der Hebelarm MA zehnmal so groß ist wie MB, also die Lasten mit zehnmal geringeren Gewichten gewogen werden können.

29. $P = \frac{200 \cdot 0{,}12}{0{,}8} = 30\,\text{kg}$.

30. 8 dm.

31. Aus $80\,x = 320 \cdot 5$ folgt $x = 20\,\text{cm}$.

32. Um der Last Q das Gleichgewicht zu halten, muß am Umfange des Wellrades a die Kraft $Q \cdot \frac{r}{R_1}$ wirken, und um diese Kraft am Getriebe c mittels der Kurbel P hervorzubringen, muß an dieser die Kraft $K = Q \cdot \frac{r \cdot r_1}{R_1 \cdot R} = Q \cdot \frac{r}{R} \cdot \frac{r_1}{R_1} = 2000 \cdot \frac{6 \cdot 5}{30 \cdot 40} = 50\,\text{kg}$ wirken; um aber die Last Q zu heben, muß K größer sein, als die gefundene Zahl. — Der Quotient $\frac{r_1}{R_1} = \frac{5}{40}$ gibt das Verhältnis der Anzahl Zähne an, welche Getriebe und Wellrad haben müssen; je nach der Stärke dieser Zähne können also 5 und 40, oder 10 und 80 u. s. w. der Aufgabe Genüge leisten.

33. $Q = K \cdot \frac{R_1}{r_1} \cdot \frac{R_2}{r_2} \cdot \frac{R_3}{r_3} = 20\,000\,\text{kg}$. Die Quotienten $\frac{R_1}{r_1}$ u. s. w. geben die Verhältnisse der Anzahl Zähne der Räder und Getriebe an.

34. $P = \frac{1}{4} \cdot \frac{6}{30} \cdot \frac{8}{24} \cdot \frac{8}{32} = 1{,}25\,\text{kg}$.

35. Aus $\frac{Q}{P} = \frac{7200}{20} = \frac{8.9.10.10}{1.2.2.5}$ oder auch $= \frac{3.4.5.6}{1.1.1.1}$ u. s. w. folgt, daß, wenn die Räder die Halbmesser 8, 9, 10, 10 erhalten, die Wellen die Halbmesser 1, 2, 2, 5 erhalten müssen, oder wenn 3, 4, 5, 6 die Halbmesser der Räder sind, jede Welle einen Halbmesser $= 1$ u. s. w.

36. Bezeichnen n und N die bezüglichen Umdrehungszahlen des ersten und dritten Rades während einer bestimmten Zeit, so hat man $\frac{n}{N} = \frac{7}{42} \cdot \frac{5}{55} = \frac{1}{66}$.

37. $\frac{24}{3} \cdot \frac{27}{3} = 24$.

38. Bezeichnet
n_1 die Anzahl der Zähne des ersten Getriebes,
n_2 „ „ „ „ „ zweiten „
N_1 „ „ „ „ „ Rades, in welches das erste Getriebe eingreift,
N_2 „ „ „ „ „ „ in welches das zweite Getriebe eingreift, so hat man $\frac{720}{12} = \frac{N_1 \cdot N_2}{n_1 \cdot n_2}$, man braucht also 720 und 12 nur je in zwei Faktoren zu zerlegen und hat dann z. B., wenn man für N_1 und N_2 die Zahlen 24 und 30 nimmt, für n_1 und n_2 die Zahlen 3 und 4 zu nehmen.

39. $P = \frac{8 - 5}{2 \cdot 20} \cdot 140 = 10{,}5\,\text{kg}$.

40. $P = \frac{10 - 8}{2 \cdot 10} \cdot 172 = 17{,}2\,\text{kg}$.

41. $\frac{160 + 10}{2} = 85$ kg.

42. $\frac{160 + 10}{2 \,.\, cos\ 30^0} = \frac{170}{2 \,.\, 0{,}866} =$ nahe 98,15 kg.

43. $P = \frac{Q}{2^n} = 39{,}06$ kg; die Kraft muß aber einen $2^8 = 256$mal so großen Weg zurücklegen wie die Last.

44. $P = \frac{1}{2^n}[Q + (2^n - 1)\ G] = \frac{Q - G}{2^n} + G = 49$ kg.

45. $Q = 2^n \,.\, (P - G) + G = 396$ kg.

46. $n = \frac{log\ (Q - G) - log\ (P - G)}{log\ 2} = 3.$

47. $P = \frac{600}{2 \,.\, 4} = 75$ kg; der Weg der Kraft ist aber achtmal so groß als der der Last.

48. a) $P = \frac{Q + G}{2n}$. b) $P = \frac{Q + G}{2n + 1}$.

49. a) $P = 152$ kg. b) $P = 135^1/_4$ kg.

50. $Q = m \,.\, P - G = 548$ kg.

51. a) $P = Q \cdot \frac{h}{l} = 300$ kg, $D = Q \cdot \frac{b}{l} = 400$ kg.

b) $P = Q \,.\, \frac{h}{b} = 375$ kg, $D = Q \cdot \frac{l}{b} = 625$ kg.

52. a) $P = 460$ kg, $C = 300$ kg.
b) $P = 858^2/_3$ kg, $D = 1045^1/_3$ kg.

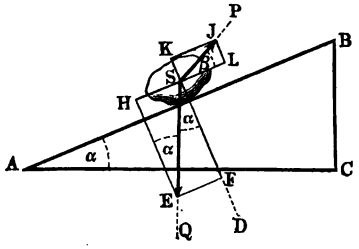
53. a) $P = Q\ sin\ A = 200 \,.\, sin\ 30^0 = 100$ kg.
$D = Q\ cos\ A = 200 \,.\, cos\ 30^0 = 173{,}2$ kg.
b) $P = Q\ 200 \,.\, sin\ 19^1/_2{}^0 = 66{,}76$ kg.
$D = 200 \,.\, cos\ 19^1/_2{}^0 = 188{,}55$ kg.
c) $P = 50{,}08$ kg, $D = 193{,}63$ kg.
d) $P = 141{,}42$ kg, $D = 141{,}42$ kg.
e) $P = 173{,}2$ kg, $D = 100$ kg.

54. a) $P = Q\ tang\ A = 200 \,.\, tang\ 30^0 = 115{,}47$ kg.
$D = \frac{Q}{cos\ A} = \frac{200}{cos\ 30^0} = 230{,}95$ kg.
b) $P = 200 \,.\, tang\ 19^1/_2{}^0 = 70{,}82$ kg.
$D = \frac{200}{cos\ 19^1/_2{}^0} = 212{,}17$ kg.
c) $P = 51{,}72$ kg, $D = 206{,}58$ kg.
d) $P = 200$ kg, $D = 282{,}84$ kg.
e) $P = 346{,}41$ kg, $D = 400$ kg.

55. $P = 13 \cdot \frac{1}{300} = 0{,}0433$ Ztr.

56. Zerlegt man (Fig. 29) das durch SE dargestellte Gewicht Q in die beiden Seitenkräfte $SF = Q \cos \alpha$ und $SH = Q \sin \alpha$, wovon die erstere auf der schiefen Ebene senkrecht steht und durch deren Widerstand aufgehoben wird, die andere ihr parallel ist; zerlegt man ferner die durch SJ dargestellte Kraft in ähnlicher Weise in die Komponenten $SK = P \sin \beta$ und $SL = P \cos \beta$, so ergiebt sich, daß im Falle des Gleichgewichtes $SL = SH$ oder $P \cos \beta = Q \sin \alpha$, also

Fig. 29.



$$\text{I.} \quad P = Q \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} = 391{,}622 \text{ kg}$$

sein muß, D aber $= SF - SK = Q \cos \alpha - P \sin \beta$, oder für P seinen Wert aus I. gesetzt,

$$= Q \frac{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}{\cos \beta}, \text{ also}$$

$$\text{II.} \quad D = Q \frac{\cos (\alpha + \beta)}{\cos \beta} = 148{,}275 \text{ kg}.$$

57. a) $\beta = 0$ gesetzt, wird $P = Q \sin \alpha = 300$ kg; $D = Q \cos \alpha = 400$ kg.

b) $\beta = -\alpha$ gesetzt, wird $P = Q \frac{\sin \alpha}{\cos (-\alpha)} = Q \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = Q \operatorname{tang} \alpha = 375$ kg.

$$D = \frac{Q}{\cos \alpha} = 625 \text{ kg}.$$

c) Für β negativ und zwar $= -40^0$ wird $P = Q \frac{\sin \alpha}{\cos (-\beta)} = Q \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} = 391{,}622$ kg

$$D = Q \frac{\cos (\alpha - \beta)}{\cos \beta} = 500 \cdot \frac{\cos (-3^0\,1'\,50'')}{\cos 40^0} = 651{,}73 \text{ kg}.$$

Die Endwerte in a) und b) sind die nämlichen wie die in Aufgabe 52 gefundenen. Warum?

58. $P : 60 = 6 : 24$, also $P = 15$ kg.

59. Da die Höhe des Keiles $= \sqrt{24^2 - 3^2} = 23{,}7118$ cm ist, so hat man $P_1 : 60 = 6 : 23{,}7118$, also $P_1 = 15{,}1186$ kg.

60. a) Aus $P : Q = h : 2r\pi$ (vergl. 52, b) folgt $P = Q \frac{h}{2r\pi} = 3{,}183$ kg.

b) Wegen $P_1 r_1 = Pr$ erhält man aus a) $P_1 = Q \frac{h}{2r_1\pi} = 0{,}796$ kg.

61. Bezeichnet x die Kraft, welche von der Schraube auf die Zähne des Rades ausgeübt wird, so hat man:

$$P : x = h : 2r\pi \text{ nach voriger Aufgabe}$$
$$x : Q = r_2 : r_1$$

folglich $P : Q = hr_2 : 2rr_1\pi = 1 : 188{,}4.$

62. Es ist nur nötig, den Beweis für den Hebel und die schiefe Ebene zu führen, weil alle andern Maschinen sich auf diese zurückführen lassen.

a) Sind P und Q zwei an einem Hebel im Gleichgewicht befindliche Kräfte, sowie a und b ihre Hebelarme, so beschreiben die Angriffspunkte von P und Q bei einer Drehung des Hebels um einen sehr kleinen Winkel die kleinen Bogen α und β; auch kann man annehmen, daß die Kräfte während der sehr kleinen Drehung auf den Hebelarmen senkrecht bleiben; die kleinen Bogen, d. h. die Wege der Angriffspunkte, fallen also in die Richtungen der Kräfte. Nun verhält sich:

$$\alpha : \beta = a : b$$

und

$$P : Q = b : a,$$

also

$$P : Q = \beta : \alpha.$$

b) Stehen zwei Kräfte P und Q (Fig. 29) einer schiefen Ebene im Gleichgewicht, wobei wir den allgemeinen Fall voraussetzen, daß P mit der Länge der schiefen Ebene den Winkel β bildet, und bewegen wir den auf der schiefen Ebene liegenden Körper über die ganze Länge aufwärts, so sind die Projektionen des Weges auf die Richtungen der Kräfte Q und P bezw.

$$l \,.\, \sin\alpha \text{ und } l \,.\, \cos\beta;$$

also gilt:

$$Q \,.\, l \,.\, \sin\alpha = P \,.\, l \,.\, \cos\beta,$$

woraus

$$P = Q \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\beta}.$$

Auflösungen zu VI.

1. a) $v = 9{,}81 \,.\, \sin 30^0 \,.\, 8 = 9{,}81 \,.\, 0{,}5 \,.\, 8 = 39{,}24$ m; $s = {}^1/_2 \,.\, 9{,}81 \,\sin 30^0 \,.\, 64 = 156{,}96$ m.

b) $v = \sqrt{2 \,.\, 9{,}81 \,.\, \sin 15^0 \,.\, 10} = 7{,}126$ m.

2. a) $t = \sqrt{\dfrac{2 \,.\, 10}{9{,}81 \,.\, {}^1/_{10}}} = 4{,}52$ Sekunden.

$v = \sqrt{2 \,.\, 10 \,.\, 9{,}81 \,.\, 0{,}1} = 4{,}43$ m.

b) $v = \sqrt{2 \,.\, 9{,}81 \,.\, {}^1/_{10} \,.\, 36} = 8{,}404$ m.

3. Aus $20 = 9{,}81 \cdot \sin 30^0 \cdot \frac{t}{2}$ folgt $t = 8{,}155$ Sekunden und daraus

$$s = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot \frac{8{,}155}{2} = 40{,}775 \text{ m}.$$

4. Aus der Formel $s = \frac{1}{2} g \sin\alpha \, t^2$ findet sich $g = \frac{2s}{t^2 \sin\alpha}$ und daraus ergeben sich im vorliegenden Falle die bezüglichen Werte 9,867; 9,753; 9,791 m, also als arithmetisches Mittel derselben 9,804 m.

5. $x = \frac{366{,}09}{\sin 32^0 24' \cdot (4{,}25)^2} = 38$ Fuß, also die Beschleunigung $= 76$ Fuß.

6. a) Die erforderliche Zeit zum Durchlaufen

von $AB = s$ (Fig. 30) ist $= \sqrt{\frac{2s}{g}}$

„ $AC = s_1$ „ $= \sqrt{\frac{2 s_1}{g \sin\alpha}}$

„ $CB = s_2$ „ $= \sqrt{\frac{2 s_2}{g \cos\alpha}}$;

aber es ist $s_1 = s \cdot \sin\alpha$, $s_2 = s \cdot \cos\alpha$, folglich sind die drei Ausdrücke einander gleich.

b) Die Endgeschwindigkeit in B (Fig. 31) ist $= \sqrt{2gs}$

„ „ „ C „ $= \sqrt{2g \sin\alpha_1 \cdot s_1}$

„ „ „ D „ $= \sqrt{2g \sin\alpha_2 \cdot s_2}$;

aber es ist sowohl $s_1 \sin\alpha_1$ als auch $s_2 \sin\alpha_2 = s$.

Fig. 30.

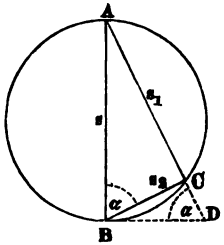
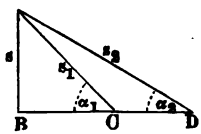


Fig. 31.



7. Bezeichnet t die zum Herabfallen auf der schiefen Ebene erforderliche Zeit, t_1 diejenige zum Herabfallen von der senkrechten Höhe und t_2 diejenige zum Durchlaufen der Basis, so soll $t = t_1 + t_2$ sein.

Setzt man die Länge der schiefen Ebene $= 1$, also ihre Höhe $= \sin\alpha$, ihre Basis $= \cos\alpha$, so findet man

$$t = \sqrt{\frac{2}{g \sin\alpha}}; \; t_1 = \sqrt{\frac{2 \sin\alpha}{g}} = \sqrt{\frac{2}{g \sin\alpha}} \cdot \sin\alpha;$$

$$t_2 = \sqrt{\frac{\cos\alpha^2}{2g \sin\alpha}} = \sqrt{\frac{2}{g \sin\alpha}} \cdot \frac{\cos\alpha}{2}$$

Substituiert man diese Werte in die obige Gleichung und dividiert durch $\sqrt{\frac{2}{g \sin\alpha}}$, so erhält man $1 = \sin\alpha + {}^1/_2 \cos\alpha$, woraus $\cos\alpha = 0{,}8$, also $\alpha = 36^0 52' 11''$ folgt.

Die Länge der schiefen Ebene verhält sich also zur Basis und Höhe wie $1 : \cos\alpha : \sin\alpha = 1 : 0{,}8 : \sqrt{1 - 0{,}8^2}$, d. h. wie $5 : 4 : 3$.

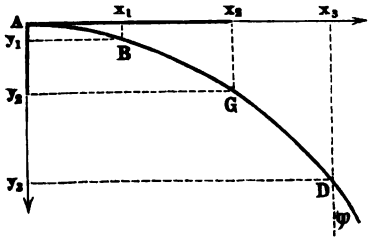
8. Bei einer schiefen Ebene von der Basis a und dem Neigungswinkel α ist die Zeit zum Herabgleiten:

$$t = \sqrt{\frac{2a}{g \sin\alpha \cdot \cos\alpha}} = \sqrt{\frac{4a}{g \sin 2\alpha}},$$

sie ist also am kleinsten, wenn $\sin 2\alpha$ am größten, d. h. $= 1$, also $2\alpha = 90^0$ oder $\alpha = 45^0$ ist.

9. Man mache (Fig. 32) nach einem verjüngten Maßstabe $Ax_1 = c = 6$ m, $Ay_1 = {}^1/_2 p = 1$ m, ziehe durch x_1 und y_1 die Parallelen $x_1 B$ und $y_1 B$, so giebt B den Punkt an, in welchem sich der Körper nach 1 Sekunde befindet. Macht man ferner $Ax_2 = 2c = 12$ m, $Ax_3 = 3c = 18$ m, sowie $Ay_2 = 4 \cdot \frac{p}{2} = 4$ m, $Ay_3 = 9 \cdot \frac{p}{2} = 9$ m und zieht die entsprechenden Parallelen, so bestimmen sich C und D als diejenigen Punkte der Kurve, in welchen sich der Körper nach 2 und 3 Sekunden befindet u. s. w.

Fig. 32.



10. Die Abscisse x in horizontaler, die Ordinate y in vertikaler Richtung genommen, ist $x = 19{,}62 \cdot 4 = 78{,}48$ m, $y = \frac{9{,}81}{2} \cdot 4^2 = 78{,}48$ m.

11. a) Um $\frac{9{,}81}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 0{,}3$ m ungefähr, die Geschwindigkeit der Kugel möge sein, welche sie wolle.

b) Aus $\frac{4}{3} = \frac{1}{2} \cdot 9{,}81\, t^2$ folgt $t = 0{,}52$ Sekunden.

12. a) Nimmt man die horizontale Richtung als Abscissen-, die vertikale als Ordinatenachse, so hat man $x = ct$, $y = \frac{1}{2} g t^2$.

b) $v = \sqrt{c^2 + g^2 t^2}$.

c) Der Winkel φ, den die resultierende Geschwindigkeit mit der vertikalen Richtung bildet, bestimmt sich aus $\tang\varphi = \frac{c}{g t}$.

13. a) Eliminiert man aus den beiden Gleichungen $x = ct$ und $y = \frac{1}{2} g t^2$

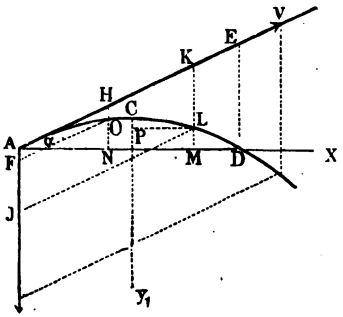
die Veränderliche t, so erhält man $x^2 = \frac{2c^2}{g} y$, woraus man erkennt, daß die Bahn des Körpers eine Parabel ist.

b) $x^2 = \frac{2 \cdot (19{,}62)^2}{9{,}81} \cdot y$ oder $x^2 = 78{,}48\, y$.

14. Aus der in Aufgabe 13 gefundenen Gleichung, welche die Gestalt des ausströmenden Wasserstrahles ausdrückt, folgt $c = x\sqrt{\frac{g}{2y}}$, und da hier $y = 0{,}6$ m, $x = 1{,}75$ m, so ergiebt sich die gesuchte Geschwindigkeit $c = 4{,}95$ m.

15. a) Vermöge der erhaltenen gleichbleibenden Geschwindigkeit würde der Körper in der Richtung AV (Fig. 33) während der Zeit t den Weg ct, vermöge seines Fallens in der Richtung AY aber den Weg $\frac{1}{2} g t^2$ zurücklegen; er wird sich also wegen der Gleichzeitigkeit der beiden Bewegungen nach der Zeit t in einem Punkte befinden, der sich als der dem Punkte A gegenüberliegende Eckpunkt eines Parallelogramms darstellt, dessen den Winkel $90^0 + \alpha$ einschließende Seiten ct und $\frac{1}{2} g t^2$ sind.

Fig. 33.



Ist nun $AK = ct$ und $KL = AJ = \frac{1}{2} g t^2$, also L der Punkt, in welchem sich der Körper nach der Zeit t befindet, so sind die Koordinaten dieses Punktes L

$$AM = ct \cos \alpha$$
$$ML = MK - KL = ct \sin \alpha - \tfrac{1}{2} g t^2.$$

Denken wir uns t als veränderlich und bezeichnen die Koordinaten jedes beliebigen Punktes der Wurfbahn bezüglich mit x und y, die Abscissen x von A an auf der Horizontalen AX, die Ordinaten y von der Horizontalen nach oben genommen, so erhalten wir

$$\text{I.} \quad x = ct \cos \alpha$$
$$\text{II.} \quad y = ct \sin \alpha - \tfrac{1}{2} g t^2.$$

b) Eliminiert man t aus den vorstehenden Gleichungen I. und II., so erhält man

$$\text{III.} \quad y = x \operatorname{tang} \alpha - x^2 \frac{g}{2c^2 \cos^2 \alpha} \quad \text{(Gleichung der Wurfbahn).}$$

16. a) Setzt man in der Gleichung III. $y = 0$, so ergiebt sich daraus x ($= AD$ in Fig. 33), also die Wurfweite $W = \frac{2c^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$ $= \frac{c^2 \sin 2\alpha}{g}$.

(Da die Gleichung III. eine quadratische ist, so hat sie noch eine zweite, hier aber unbrauchbare Wurzel, nämlich 0.)

b) Setzt man in der Gleichung I. für t die Wurfzeit T und für x den in a) für W gefundenen Ausdruck $\frac{2c^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$, so erhält man

$$\text{die Wurfzeit } T = \frac{2c \sin\alpha}{g}.$$

c) Setzt man in der Gleichung II. statt x die halbe Wurfzeit ($\frac{1}{2}T$), also $\frac{c \sin\alpha}{g}$, so erhält man y, d. h. die Wurfhöhe $H = \frac{c^2 \sin^2\alpha}{2g}$.

Um sich zu überzeugen, daß dieser Ausdruck die größte vom Körper erreichbare Höhe angiebt, und daß die Wurfbahn nach Erreichung dieser Höhe in derselben Weise fällt, wie sie vorher gestiegen war, setze man in der Gleichung II. statt t zuerst $T + t_1$ und sodann $T - t_1$, substituiere in beiden Gleichungen für T den oben gefundenen Wert $\frac{2c \sin\alpha}{g}$, so findet man aus beiden für y den nämlichen Wert, nämlich $\frac{c^2 \sin^2\alpha}{2g} - \frac{1}{2} g t_1^2 = H - \frac{1}{2} g t_1^2$, welcher Ausdruck ein Maximum wird, wenn $t_1 = 0$, also die zur Erreichung dieser Höhe erforderliche Zeit $\frac{1}{2}T$ ist.

17. a) Nach voriger Aufgabe ist die Wurfweite $W = \frac{c^2}{g} \sin 2\alpha$; nun ist aber $\sin 2\alpha = \sin(180^0 - 2\alpha) = \sin[2(90^0 - \alpha)]$, folglich W auch $= \frac{c^2}{g} \sin[2(90^0 - \alpha)]$.

b) Nein. Die den komplementären Elevationswinkeln entsprechenden Wurfweiten verhalten sich wie $\sin\alpha : \cos\alpha$, und die Wurfhöhen wie $\sin^2\alpha : \cos^2\alpha$.

18. Aus Auflösung zu 16 a) folgt, daß bei gleicher Geschwindigkeit W am größten sein muß, wenn $\sin 2\alpha$ am größten, d. h. wenn $\alpha = 45^0$, also $\sin 2\alpha = 1$ ist. Da nun in diesem Falle $W = \frac{c^2}{g}$, $H = \frac{c^2}{2g}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 = \frac{c^2}{4g}$, so ergiebt sich die Wurfweite viermal so groß als die Wurfhöhe.

19. $W = 141{,}25$ m; $H = 20{,}4$ m; $T = 4{,}08$ Sekunden.
$W = 163{,}1$ m; $H = 40{,}78$ m; $T = 5{,}76$ Sekunden.

20. In einer Höhe von $800 \cdot 2{,}5 \cdot \sin 15^0 - \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot (2{,}5)^2 = 517{,}6 - 30{,}66 = 486{,}94$ m.

21. Aus $\sin\alpha = \sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}81 \cdot 400}{120^2}} = 0{,}73824$ folgt $\alpha = 47^0 35'$.

22. a) Aus Aufgabe 16 a) folgt $\sin 2\alpha = \frac{eg}{c^2}$ und daraus $\alpha = 7^0 49{,}5'$.

b) Die Gleichung III. der Aufgabe 15, b) wird, wenn man darin $1 + tg^2\alpha$ statt $\frac{1}{cos^2\alpha}$ setzt, $y = x\,tg\,\alpha - x^2\frac{g\,(1 + tg^2\alpha)}{2c^2}$, woraus folgt $tg^2\alpha - \frac{2c^2}{gx}\,tg\,\alpha = -1 - \frac{2c^2y}{gx^2}$,

$$\text{also I. } tg\,\alpha = \frac{c^2}{gx} \pm \sqrt{\left(\frac{c^2}{gx}\right)^2 - 1 - 2\cdot\frac{c^2}{gx}\cdot\frac{y}{x}}.$$

Wenn man nun der Aufgabe gemäß $x = e$, $y = e\,tg\,\beta$ gesetzt und den Wert von $\frac{c^2}{ge} = n$ berechnet hat, so ist

$$\text{II. } tg\,\alpha = n \pm \sqrt{n^2 - 1 - 2n\,tg\,\beta}.$$

Aus der Gleichung folgen zwei Werte für α, im Falle aber $n^2 - 1 - 2n\,tg\,\beta = 0$, also $tg\,\beta = \frac{n^2 - 1}{2n}$ ist, nur einer, und die Gleichung wird unmöglich, wenn $tg\,\beta > \frac{n^2 - 1}{2n}$.

Für $\beta = 0$ wird $2n\,tg\,\beta = 0$, also $tg\,\alpha = n \pm \sqrt{n^2 - 1}$.

Für einen negativen Wert von β, d. h. wenn der zu bewerfende Punkt unter der Horizontalen AX liegt, wird $tg\,\beta$ negativ, also die Gleichung:

$$tg\,\alpha = n \pm \sqrt{n^2 - 1 + 2n\,tg\,\beta}.$$

In Anwendung auf die numerischen Werte der Aufgabe erhält man $n = 3{,}7068$, $n^2 = 13{,}7403$, $2n\,tg\,\beta = 0{,}6486$, und mit diesen Werten

für $\beta = 5^0$ . . . . . $\alpha_1 = 82^0\,4{,}5'$ (Bogenschuß); $\alpha_2 = 12^0\,56{,}5'$ (scharfer Schuß);

für $\beta = 0$ . . . . . $\alpha_1 = 82^0\,10{,}5$; $\alpha^2 = 7^0\,49{,}5'$,

welche zwei Winkel, wovon der letztere schon oben in a) gefunden ist, zu 90^0 sich ergänzen (siehe Aufgabe 17, a), was im vorigen und nachfolgenden Fall nicht stattfinden kann,

für $\beta = -5^0$ . . . . $\alpha_1 = 82^0\,17{,}1'$; $\alpha_2 = 2^0\,43{,}9'$.

c) unter b) erledigt.

23. $H = \frac{30^2\,.\,sin^2\,60^0}{2\,.\,9{,}81} = 45{,}87\,.\,sin^2\,60^0 = 34{,}4$ m,

$W = 2\,.\,45{,}87\,.\,sin\,120^0 = 79{,}45$ m.

24. Sie sind einander gleich, wie überhaupt die Wurf- oder Sprungweiten bei zwei Elevationswinkeln, die sich einander zu 90^0 ergänzen (siehe 17).

25. Setzt man in der Gleichung $g = x\,tg\,\alpha - x^2\frac{g}{2c^2\,cos\,\alpha^2}$

$$y = H - y_1 = \frac{c^2}{2g}\,sin^2\,\alpha - Y_1$$

$$x = \frac{1}{2}\,W + x_1 = \frac{c^2\,sin\,\alpha\,cos\,\alpha}{g} + x_1$$

(d. h. bezüglich des Punktes L in Fig. 33 $y = ML = BC - CP$; $x = AM = AB + PL$), so erhält man $x_1^2 = \frac{2c^2 \cos^2\alpha}{g} y_1$, woraus man erkennt, daß die Wurfbahn eine Parabel ist. Man kann aber natürlich dafür $x^2 = \frac{2c^2 \cos^2\alpha}{g} y$ schreiben, wenn man sich merkt, daß bei dieser Form der Gleichung die Koordinaten x und y vom Scheitelpunkte der Wurfbahn genommen sind. Die Gleichung geht für $\alpha = 0$ in die schon in 13 gefundene über.

Auflösungen zu VII.

1. Die Lineargeschwindigkeit ist $= \frac{2\pi r}{t}$, die Winkelgeschwindigkeit $= \frac{2\pi}{t}$, da man unter Winkelgeschwindigkeit die Geschwindigkeit eines Körpers in einem Kreise vom Halbmesser $= 1$ versteht (4,7124 m; 1,5708 m).

2. $v = \frac{3 \,.\, 3{,}1416 \,.\, 40}{60} = 6{,}283$ m.

3. Die erstere $= \frac{5400 \,.\, 7420}{24 \,.\, 60 \,.\, 60} = 466{,}25$ m,

   die letztere $= \frac{2 \,.\, 3{,}1416}{24 \,.\, 60 \,.\, 60} = 0{,}0000727$.

4. Aus $\frac{n d \pi}{60} = c$ folgt $d = \frac{60\,c}{n\pi} = 1{,}43$ m.

5. $F = \frac{c^2}{r} \cdot \frac{G}{g} = \frac{3^2}{0{,}5} \cdot \frac{109}{9{,}81} = 200$ g. Der Faden muß also ein Gewicht von wenigstens 200 g tragen können, wenn er durch die Gegenwirkung der rotierenden Masse nicht zerrissen werden soll. Die Zentripetalbeschleunigung beträgt $\frac{3^2}{0{,}5} = 18$ m.

6. $F = \frac{3^2}{2} \cdot \frac{65{,}4}{9{,}81} = 30$ kg, oder die Zentripetalkraft ist $\frac{50}{109}$ mal so groß wie das Gewicht des Körpers.

7. Aus $F = \frac{c^2}{r} \cdot \frac{G}{g}$ folgt, wenn man der Bedingung der Aufgabe gemäß

$F = G$ setzt, $\frac{c^2}{rg} = 1$; also muß $F = G$ sein, wenn entweder $c = \sqrt{rg}$ oder $r = \frac{c^2}{g}$ oder $g = \frac{c^2}{r}$ ist.

In der vorhergehenden Aufgabe würde also die Ablenkungskraft dem Gewicht des Körpers gleich sein, wenn entweder $r = 0{,}9174$ m, oder $c = 4{,}4295$ m, oder $g = 4{,}5$ m wäre.

8. Bezeichnen wir die Zentrifugalkraft der ersten Kugel mit F_1, die der zweiten mit F_2, so haben wir

$$F_1 = \frac{c^2}{r} \cdot \frac{G}{g} = \frac{\left(\frac{2r\pi}{t}\right)^2}{r} \cdot \frac{G}{g} = \frac{4\pi^2 r}{t^2} \cdot \frac{G}{g} = \frac{4\pi^2 \cdot 0{,}15 \cdot 6}{t^2 g} \text{ Gramm},$$

$F_2 = \frac{4\pi^2 \cdot x \cdot 2}{t^2 g}$ Gramm, wo x die gesuchte Entfernung bezeichnet. Nun muß der Bedingung der Aufgabe gemäß $F_1 = F_2$, also $0{,}15 \cdot 6 = x \cdot 2$ sein, woraus $x = 0{,}45$ m folgt.

9. Wenn der Wagen nicht aus den Schienen getrieben werden soll, darf offenbar das Drehungsmoment der Zentrifugalkraft am Wagen höchstens dem der Schwerkraft (beide Momente auf die äußere Bahnschiene bezogen) gleich sein. Das Drehungsmoment der Zentrifugalkraft am Wagen ist $= 1{,}2 \cdot \frac{v^2}{72} \cdot \frac{G}{g}$, das Drehungsmoment der Schwerkraft $= 0{,}75\,G$. Aus der Gleichsetzung dieser beiden Momente ergiebt sich $v^2 = \frac{72 \cdot 1{,}5 \cdot 9{,}81}{2 \cdot 1{,}2}$ $= 436{,}45$, also $v = 20{,}9$ m.

10. Bezeichnet c die Geschwindigkeit des Körpers, so hat man (Lehrbuch §. 45)

$$f_0 = \frac{c^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{t^2} = 0{,}0339 \text{ m}.$$

11. Bezeichnet g_0 die beobachtete Beschleunigung der Schwerkraft am Äquator, G aber die Beschleunigung der Erdanziehung, welche am Äquator stattfinden würde, wenn sich die Erde nicht drehte (in welcher also noch die Ablenkungskraft enthalten ist), so findet sich mittels des in der vorhergehenden Aufgabe gefundenen Wertes von f_0

$$G = g_0 + f_0 = 9{,}7806 + 0{,}0339 = 9{,}8145 \text{ m},$$

$$\text{und } \frac{f_0}{g_0} = \frac{0{,}0339}{0{,}7806} = \frac{1}{288{,}5},$$

die Beschleunigung der Schwerkraft ist also am Äquator nahe 289 mal so groß wie die Zentripetalbeschleunigung.

12. Für diesen Fall müßte die Zentripetalbeschleunigung f_0 der Beschleunigung der Schwerkraft gleich, also der vorhergehenden Aufgabe gemäß 289 mal so groß sein, wie sie wirklich ist, folglich müßte, da $f_0 = \frac{c^2}{r}$ ist, r aber unverändert bleibt, c^2 289 mal, d. h. c müßte 17 mal so groß sein, als dies jetzt der Fall ist.

13. Nach dem Vorhergehenden müßte die Geschwindigkeit des Körpers wenigstens 17 mal so groß sein, als die Umdrehungsgeschwindigkeit der Erde, d. h. 17 . 469 m.

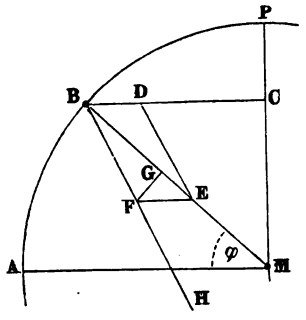
14. Bezeichnet r den Halbmesser der als kugelförmig angenommenen Erde und t ihre Umlaufszeit, so ist die Beschleunigung der Ablenkungskraft eines Körpers (Fig. 34)

$$\text{an einem Punkte } A \text{ des Äquators} = \frac{4\pi^2 r}{t^2} = f_0,$$

$$\text{also an einem Punkte } B \text{ in der Breite } \varphi = \frac{4\pi^2 r \cos\varphi}{t^2} = f_0 \cos\varphi.$$

Stellt nun BE die Beschleunigung G der Anziehungskraft der Erde, d. h. derjenigen, welche an der Oberfläche der Erde stattfinden würde, wenn sie sich nicht drehte (in welcher also noch die Ablenkungskraft enthalten ist), sowie BD die Beschleunigung der Ablenkungskraft am Punkte B dar, so ergiebt sich durch Zerlegung von BE in die beiden Komponenten BD und BF diese letztere BF als die Beschleunigung g_φ der Schwerkraft im Punkte B*). Fällt man FG senkrecht auf BE, so ist $EG = EF \,.\, \cos\varphi = BD \,.\, \cos\varphi$, oder, da $BD = f_0 \cos\varphi$ ist, $EG = f_0 \cos^2\varphi$. Wegen der Kleinheit des Winkels EBF**) kann man $BF = BG = BE - EG$ setzen; also ist $g_\varphi = G - f_0 \cos^2\varphi = G - f_0 + f_0 \sin^2\varphi$, oder, da $G - f_0 = g_0$, d. h. der Beschleunigung der Schwerkraft am Äquator ist, $g_\varphi = g_0 + f_0 \sin^2\varphi$, woraus $g_\varphi - g_0 = f \sin^2\varphi$ folgt, was zu beweisen war.

Fig. 34.



15. Aus der vorhergehenden Auflösung folgt $g_\varphi = g_0 \left(1 + \frac{f_0}{g_0} \sin^2\varphi\right)$, oder, da $\frac{f_0}{g_0} = \frac{1}{289}$ (Aufgabe 11), $g_\varphi = g_0 \left(1 + \frac{1}{289} \sin^2\varphi\right)$, und daraus für $\varphi = 90^0$, $g_{90} = g_0 \left(1 + \frac{1}{289}\right)$, also die Zunahme der Schwere am Pole $= \frac{1}{289} g_0$.

16. Aus der Formel der Aufgabe ergiebt sich, weil $\sin 90^0 = 1$, $g_{90} = g_0$ (1 + 0,0052), also ist die Zunahme der Schwere am Pol $= 0{,}0052\, g_0$

*) Nämlich desjenigen Teiles der Anziehungskraft der Erde, in welcher die Ablenkungskraft nicht mehr steckt.

**) $\sphericalangle EBF$ ist in der Breite von 45°, wo er seinen größten Wert hat, nur nahe = 6 Minuten (Lehrbuch §. 94, 2).

oder nahe $= \frac{1}{200} g_0$, woraus bei Vergleichung mit dem Resultat der vorigen Aufgabe hervorgeht, daß die Erde nicht eine kugelförmige, sondern eine abgeplattete Gestalt haben muß.

17. Da $\sin^2 45^0 = 0{,}5$ ist, $g_{45} = g_0 (1 + 0{,}0026) = 9{,}8060$ m.

18. Die Geschwindigkeit des Mondes in seiner Bahn ist

$$= \frac{2\pi \cdot 60r}{27{,}3 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60} = c, \text{ also } f = \frac{c^2}{60r} = 0{,}002712 \text{ m}.$$

19. Die Beschleunigung des Falles der Erde gegen die Sonne oder die Zentripetalbeschleunigung der Erde ist $= \frac{(4{,}12)^2}{21\,000\,000}$ Meilen $= \frac{(4{,}12)^2 \cdot 7420}{21\,000\,000}$ $= 0{,}006$ m, also würde der Fallraum während der ersten Sekunde $= 0{,}003$ m, folglich während der ersten Minute $= 0{,}003 \cdot 60^2 = 10{,}8$ m.

20. Die Beschleunigung des Falles des Mondes gegen die Erde ist (nach Aufgabe 18) $= 0{,}002712$, also sein Fallraum während der ersten Minute $= \frac{1}{2} \cdot 0{,}002712 \cdot 60^2 = 4{,}88$ m. Da nun die Sonne 400 mal so weit von der Erde entfernt ist als der Mond, also jeder Massenteil der Sonne von der Erde 160 000 mal so wenig angezogen wird, als ein gleicher des Mondes, so ist der Fallraum der Sonne nach der Erde während der ersten Minute $= \frac{4{,}88}{160\,000} = 0{,}0000305$ m.

21. Da sich die Massen zweier aneinander anziehenden Körper zu einander umgekehrt verhalten, wie ihre Beschleunigungen oder wie die vom Anfang der Bewegung an während gleicher Zeiten zurückgelegten Wege, so hat man im vorliegenden Falle $M : 1 = 10{,}8 : 0{,}0000305$, woraus $M = 354\,100$ (s. Auflösungen zu 19 und 20), $D = \frac{M}{V} = \frac{354\,100}{1\,400\,000} = \frac{1}{4}$ beiläufig.

22. Wäre der Halbmesser der Sonne gleich dem der Erde, so würde die Anziehung auf der Sonnenoberfläche 360 000 mal so groß sein (wenn wir 360 000 für 354 100 nehmen), wie auf der Erdoberfläche, weil nach voriger Auflösung die Masse der Sonne 360 000 mal so groß ist, wie die der Erde. Da aber der Sonnenhalbmesser 112 mal so groß ist, wie der Erdhalbmesser, also ein Körper an der Sonnenoberfläche 112 mal so weit von ihrem Mittelpunkte (in welchem wir uns ihre Masse vereinigt denken können) entfernt ist, als vorhin angenommen wurde, so wird die Anziehung an der Sonnenoberfläche 112^2 oder 12 544 mal so gering, wie die oben angegebene, also nur $\frac{360\,000}{12\,544}$ oder 28 mal stärker sein, wie die an der Erdoberfläche, d. h. ein Körper wird an der Oberfläche der Sonne 28 mal so viel Gewicht haben, wie an der Oberfläche der Erde.

23. Bezeichnet x die Beschleunigung, welche die Erdmasse M jeder Masseneinheit des Steines zu erteilen strebt, und m die Masse des Steines, so drückt mx die Kraft aus, mit welcher der Stein von der Erdmasse angezogen wird (II, 3). Ist dagegen y die Beschleunigung, welche der Stein jeder Massen-

einheit der Erde zu erteilen strebt, so giebt My die Kraft an, mit welcher die Erde vom Stein angezogen wird. Folglich muß nach dem Gravitationsgesetz $My = mx$ sein, d. h. die Beschleunigungen der beiden Körper verhalten sich umgekehrt wie ihre Massen. Daraus folgt $y = \frac{m}{M}x$. Da nun m gegen M verschwindend klein ist, so muß auch y gegen x, also die Bewegung der Erde gegen die des Steines verschwindend klein sein.

24. Nein! Das angeführte Gesetz bezieht sich nur auf außerhalb der Erde befindliche Körper, da nur auf diese die Anziehung der ganzen Erdkugel im Sinne der Bewegung nach dem Mittelpunkte zu wirkt, während ein im Innern der Erde befindlicher Körper nur durch einen Teil der Kugelmasse in dieser Richtung, durch den übrigen Teil aber in entgegengesetzter Richtung angezogen wird. Die Erde von überall gleicher Dichte vorausgesetzt, so läßt sich nachweisen, daß die Anziehung auf einen in ihrem Innern befindlichen materiellen Punkt derjenigen einer kleineren Erdkugel gleich ist, welche die Entfernung jenes Punktes vom Erdmittelpunkte zum Halbmesser hat. Im Mittelpunkte der Erde wird daher ein Körper gar kein Gewicht haben.

25. Aus $\frac{g}{x} = \frac{(r+h)^2}{r^2} = \left(1+\frac{h}{r}\right)^2$ oder hinlänglich genau $= 1 + 2\frac{h}{r}$ folgt $x = g\left(1 - \frac{2h}{r}\right)$.

26. Er würde seine größte Geschwindigkeit im Mittelpunkte der Erde haben und mit der nämlichen Geschwindigkeit, mit welcher er in die Erde eintrat, sie wieder verlassen.

27. Bezeichnet β die Beschleunigung, welche von zwei um die Längeneinheit voneinander entfernte Masseneinheiten jede der andern erteilt, so ist $M\beta$ die Kraft, welche von der Sonnenmasse M jeder in der Entfernung $= 1$ befindlichen Masseneinheit und $\frac{M\beta}{e^2}$ die Kraft, welche ihr in der Entfernung $= e$ erteilt wird *). $\frac{M\beta}{e^2}$ drückt also die Größe der Beschleunigung, folglich $m \cdot \frac{M\beta}{e^2}$ die bewegende Kraft aus, welche auf die Erdmasse m durch die Anziehung der Sonne wirkt (II, 3), und zwar in Kilogrammen, wenn β und e in Metern, sowie M und m in den Masseneinheiten der Aufgabe 4 in II. gegeben sind.

Durch ähnliche Schlüsse findet man $\frac{m\beta}{e^2}$ als die Beschleunigung und $M \cdot \frac{m\beta}{e^2}$ als die Kraft, welche auf die Sonnenmasse M wirkt.

Während also die anziehenden Kräfte der Sonne und der Erde einander

*) Die Massen der Sonne und der Erde werden hier in ihren Mittelpunkten konzentriert gedacht, da sich beweisen läßt, daß eine aus konzentrischen Schichten bestehende solide Kugel auf einen äußeren materiellen Punkt gerade so wirkt, als ob ihre Masse in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre.

gleich sind, verhalten sich die Beschleunigungen, welche sie durch die Anziehung erhalten, umgekehrt wie ihre Massen. Wenn also die beiden Himmelskörper plötzlich ohne Bewegung einander gegenüberständen, so würden sie sich in der Art gegeneinander bewegen, daß sie in gleicher Zeit Strecken zurücklegten, welche den Massen umgekehrt proportional wären, sie würden folglich in einem Punkte zusammentreffen, dessen Entfernungen von ihrer anfänglichen Stellung gleichfalls in jenem Verhältnis ständen. Bezeichnet x die Entfernung dieses Punktes vom Mittelpunkte der Sonne, so folgt aus $\frac{x}{e-x} = \frac{m}{M} \cdots x = \frac{me}{M+m}$. Dieser Punkt ist der Schwerpunkt beider Massen.

28. Bezeichnet x die gesuchte Entfernung der Masse m von der Masse M_1, so ergiebt sich nach voriger Aufgabe $\frac{mM_1\beta}{x^2}$ als die bewegende Kraft, welche die Masse m von der Masse M_1 erhält, und $\frac{mM_2\beta}{(d-x)^2}$ als die, welche die Masse m nach der Masse M_2 treibt, und aus der Gleichsetzung dieser beiden Ausdrücke ergiebt sich $x = \frac{M_1 \pm \sqrt{M_1 M_2}}{M_1 - M_2} \cdot d$; man findet also zwei Punkte, in welchen die Masse m gleich stark von den beiden Massen M_1 und M_2 angezogen wird, wovon der eine in der Verlängerung der Verbindungslinie der beiden Massen, der andere zwischen den beiden Massen liegt; aber natürlich kann die Masse m nur im letzteren Punkte in Ruhe bleiben.

29. Da die gesuchte Entfernung x kleiner sein muß, als die Entfernung zwischen Erde und Mond, so muß von den beiden in voriger Aufgabe gefundenen Werten von x der mit dem negativen Wurzelausdruck genommen werden, also

$$x = \frac{M_1 - \sqrt{M_1 M_2}}{M_1 - M_2} d = \frac{1 - \sqrt{1 \cdot \frac{1}{81}}}{1 - \frac{1}{81}} \cdot 60 = 54 \text{ Erdhalbmesser.}$$

30. Nach dem dritten Keplerschen Gesetz hat man $U^2 : u^2 = D^3 : d^3$ und daraus $d = \sqrt[3]{\frac{u^2 D^3}{U^2}} = 20 \cdot 10^6 \sqrt[3]{\frac{224{,}72^2}{365{,}262^2}}$ = nahe 14,5 Millionen Meilen.

Auflösungen zu VIII.

1. a) Man denke sich die Stange (Linie) in sehr viele gleiche Teile geteilt, bilde die Produkte aus jedem dieser Teilchen mit dem Quadrate seiner Entfernung von der Drehachse und addiere diese Produkte. Ist n die Anzahl der gleichen Teilchen, so ist $\frac{M}{n}$ die Masse, $\frac{b}{n}$ die Länge eines solchen, also, wenn das Trägheitsmoment der Stange mit M bezeichnet wird,

$$\mathfrak{M} = \frac{M}{n}\left[\left(1\cdot\frac{b}{n}\right)^2 + \left(2\cdot\frac{b}{n}\right)^2 + \left(3\cdot\frac{b}{n}\right)^2 + \cdots + \left(n\cdot\frac{b}{n}\right)^2\right]$$
$$= \frac{M b^2}{n^3}\,(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)$$

oder, da, wenn n unendlich groß, $\frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) = \frac{1}{3}$ ist *),

$$\text{I.}\quad \mathfrak{M} = {}^1/_3\, M b^2,$$

d. h. die Masse ${}^1/_3 M b^2$, in einer der Längeneinheit gleichen Entfernung von der Achse, oder die Masse ${}^1/_3 M$ am Ende der Stange b, oder die Masse M am Dreharm $b\sqrt{{}^1/_3}$, in einem Punkte konzentriert, leistet einer drehenden Kraft denselben Widerstand, wie die Masse M bei ihrer Verteilung auf der Stange.

b) Man muß die Trägheitsmomente der beiden Teile b_1 und b_2 der Stange in Beziehung auf die Drehachse bestimmen und diese addieren.

Da die Masse des einen Teiles $= \frac{b_1}{b_1 + b_2} M$, die des andern $= \frac{b_2}{b_1 + b_2} M$ ist, so erhält man (nach I.)

$$\mathfrak{M} = {}^1/_3 \frac{b_1}{b_1 + b_2} M b_1^2 + {}^1/_3 \frac{b_2}{b_1 + b_2} M b_2^2 = {}^1/_3\, M \frac{b_1^3 + b_2^3}{b_1 + b_2}$$

oder

$$\text{II.}\quad \mathfrak{M} = {}^1/_3\, M\,(b_1^2 - b_1 b_2 + b_2^2).$$

c) Aus II. folgt, weil hier $b_1 = b_2 = {}^1/_2 b$ ist,

$$\text{III.}\quad \mathfrak{M} = {}^1/_3\, M\,({}^1/_2 b)^2 = {}^1/_{12}\, M b^2.$$

---

*) Denn $\frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)$ ist $= \frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{1\,.\,2\,.\,3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$; für $n = \infty$ werden aber die beiden letzten Summanden $= 0$.

2. a) Denkt man sich die Länge b der Stange in n sehr kleine Teile geteilt, so ist $\frac{M}{n}$ die Masse und $\frac{b}{n}$ die Länge jedes dieser Teilchen und

das erste derselben ist von O entfernt um die Strecke $OA = a$,

„ zweite „ „ „ „ „ „ „ „ $OC = \sqrt{a^2 + \left(\frac{b}{n}\right)^2}$,

„ dritte „ „ „ „ „ „ „ „ $OD = \sqrt{a^2 + \left(2\frac{b}{n}\right)^2}$,

. . .

„ $n$te „ „ „ „ „ „ „ „ $ON = \sqrt{a^2 + \left((n-1)\frac{b}{n}\right)^2}$

folglich ist das gesuchte Trägheitsmoment

$$\mathfrak{M} = \frac{M}{n}\left[a^2 + \left(a^2 + \frac{b^2}{n^2}\right) + \left(a^2 + 4\cdot\frac{b^2}{n^2}\right) + \left(a^2 + 9\cdot\frac{b^2}{n^2}\right) + \cdots + \left(a^2 + (n-1)^2\frac{b^2}{n^2}\right)\right]$$

$$= \frac{M}{n}\left[n a^2 + \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2\right)\frac{b^2}{n^2}\right]$$

$$= M\left[a^2 + \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots (n-1)^2\right)\frac{b^2}{n^3}\right],$$

oder, da, wenn n unendlich groß, $\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 \cdot \frac{1}{n^3}\right) = 1/3$ ist (s. vor. Aufg.),

I. $\mathfrak{M} = M\,(a^2 + 1/3\, b^2)$.

b) Die Massen der beiden Teile b_1 und b_2 sind bezüglich $\frac{b_1}{b_1 + b_2} M$ und $\frac{b_2}{b_1 + b_2} M$, also $\mathfrak{M} = \frac{b_1}{b_1 + b_2} M\,(a^2 + 1/3\, b_1^2) + \frac{b_2}{b_1 + b_2} M\,(a^2 + 1/3\, b_2^2)$, oder

II. $\mathfrak{M} = M\,[a^2 + 1/3\,(b_1^2 - b_1\, b_2 + b_2^2)]$.

c) Wegen $b_1 = b_2 = 1/2\, b$ ist

III. $\mathfrak{M} = M\,[a^2 + 1/3\,(1/2\, b)^2] = M\,(a^2 + 1/12\, b^2)$.

Bemerkung. Die vorstehenden Formeln I., II., III. gehen, wenn man in ihnen $a = 0$ setzt, in die Formeln I., II., III. der vorigen Aufgabe über.

3. Man denke sich das Dreieck AOB in n sehr schmale, auf OA senkrecht stehende Streifen zerlegt und addiere die Trägheitsmomente derselben. Jeder dieser Streifen hat eine Breite $= \frac{a}{n}$, der erste zunächst O liegende eine

$$\text{Höhe} = \frac{b}{n}, \text{ also eine Masse} = \frac{ab\mu}{n^2},$$

der zweite Streifen hat eine Höhe $= 2 \cdot \frac{b}{n}$, „ „ „ $= 2 \cdot \frac{ab\mu}{n^2}$,

„ dritte „ „ „ „ $= 3 \cdot \frac{b}{n}$, „ „ „ $= 3 \cdot \frac{ab\mu}{n^2}$

. . .

„ $n$te „ „ „ „ $= n \cdot \frac{b}{n}$, „ „ „ $= n \cdot \frac{ab\mu}{n^2}$,

wenn μ die Masse der Flächeneinheit bezeichnet; also ist nach voriger Aufgabe das Trägheitsmoment

des ersten Streifens $= \frac{ab\mu}{n^2}\left[\left(\frac{a}{n}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{b}{n}\right)^2\right]$,

„ zweiten „ $= 2 \cdot \frac{ab\mu}{n^2}\left[\left(2 \cdot \frac{a}{n}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(2 \cdot \frac{b}{n}\right)^2\right]$,

„ dritten „ $= 3 \cdot \frac{ab\mu}{n^2}\left[\left(3 \cdot \frac{a}{n}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(3 \cdot \frac{b}{n}\right)^2\right]$,

. . .

„ $n$ten „ $= n \cdot \frac{ab\mu}{n^2}\left[\left(n \cdot \frac{a}{n}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(n \cdot \frac{b}{n}\right)^2\right]$,

folglich das gesuchte Trägheitsmoment

$$\mathfrak{M} = \frac{ab\mu}{n^4}(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3)(a^2 + {}^1/_3 b^2),$$

oder, da, wenn n unendlich groß, $\frac{1}{n^4}(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3) = {}^1/_4$ ist*),

$$\mathfrak{M} = \frac{ab\mu}{4}(a^2 + {}^1/_3 b^2) = \frac{ab\mu}{12}(3a^2 + b^2),$$

oder, wegen $\frac{ab\mu}{2} = M$,

$$\text{I.} \quad \mathfrak{M} = {}^1/_6 M (3a^2 + b^2),$$

oder, wenn man statt der Kathete b die Hypotenuse c einführt, also $b^2 = c^2 - a^2$ setzt,

$$\text{II.} \quad \mathfrak{M} = {}^1/_6 M (2a^2 + c^2).$$

*) Denn $\frac{1}{n^4}(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3)$ ist $= \frac{1}{n^4}\frac{n^2(n+1)^2}{4} = {}^1/_4 + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2}$, in welchem Ausdruck für $n = \infty$ die zwei letzten Summanden $= 0$ werden.

4. Da man sich das Dreieck aus zwei rechtwinkeligen Dreiecken bestehend denken kann, so folgt aus Formel II der Aufgabe 3:

$$\mathfrak{M} = {}^1/_6\,({}^1/_2 M)\,(2a^2 + c^2) + {}^1/_6\,({}^1/_2 M)\,(2a^2 + c^2) = {}^1/_6\,M(2a^2 + c^2).$$

5. Aus Formel I der Aufgabe 3 folgt, da man sich das Rechteck aus zwei rechtwinkeligen Dreiecken bestehend denken kann,

$$\mathfrak{M} = {}^1/_6\,({}^1/_2 M)\,(3a^2 + b^2) + {}^1/_6\,({}^1/_2 M)\,(3b^2 + a^2) = {}^1/_3\,M(a^2 + b^2).$$

6. Das regelmäßige n-Eck besteht aus n kongruenten, gleichschenkeligen Dreiecken; aus Aufgabe 4 folgt daher

$$\mathfrak{M} = n \,.\, {}^1/_6 \left(\frac{1}{n} M\right) (2r^2 + R^2) = {}^1/_6\,M\,(2r^2 + R^2).$$

7. Aus voriger Aufgabe folgt:

$$\mathfrak{M} = {}^1/_6\,M\,(2r^2 + r^2) = {}^1/_2\,Mr^2.$$

8. Denkt man sich das Prisma in unendlich viele, mit der Grundfläche parallele Schichten zerlegt, so ist, wenn n die Anzahl derselben bezeichnet, die Masse jeder dieser Schichten $= \frac{M}{n}$ und das Trägheitsmoment einer solchen (nach Aufgabe 3, Formel I) $= {}^1/_6 \frac{M}{n}\,(3a^2 + b^2)$, folglich das Trägheitsmoment aller n Schichten

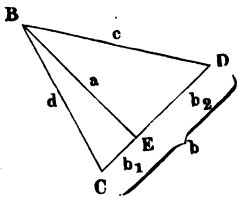
$$\mathfrak{M} = n \,.\, {}^1/_6 \frac{M}{n}\,(3a^2 + b^2) = {}^1/_6\,M\,(3a^2 + b^2).$$

9. Das gesuchte setzt sich aus den Trägheitsmomenten zweier Prismen zusammen, wovon ein jedes ein rechtwinkeliges Dreieck von der Grundlinie ${}^1/_2 b$ und der Höhe a zur Grundfläche und die Höhe h sowie die Masse ${}^1/_2 M$ hat und sich um die der Kante b gegenüberliegende Kante h dreht; nach voriger Aufgabe ist daher

$$\mathfrak{M} = 2 \,.\, {}^1/_6\,({}^1/_2 M)\,[3a^2 + ({}^1/_2 b)^2] = {}^1/_{24}\,M\,(12a^2 + b^2).$$

10. Man denke sich das Prisma durch eine Ebene, die durch die Kante h geht und auf der Grundfläche senkrecht steht, in zwei Prismen zerlegt, deren Grundfläche rechtwinkelige Dreiecke sind, bestimme deren Trägheitsmomente in Beziehung auf die Drehachse h und addiere diese. BCD (Fig. 35) sei die Grundfläche des Prismas, B der Punkt, durch welchen die Drehachse h geht, und jene Ebene schneide die Grundfläche in der Linie a, die also auf b senkrecht steht und diese in die beiden Segmente b_1 und b_2 zerlegt. Das eine der beiden Prismen hat also zur Grundfläche ein rechtwinkeliges Dreieck mit den

Fig. 35.



Katheten a und b_1, das andere ein solches mit den Katheten a und b_2, beide Prismen haben die gemeinschaftliche Höhe h, also ist die Masse des einen Prismas $= \frac{Mb_1}{b}$, die des andern $= \frac{Mb_2}{b}$, folglich das gesuchte Trägheitsmoment

$$\mathfrak{M} = {}^1/_6 \frac{Mb_1}{b}(3a^2 + b_1^2) + {}^1/_6 \frac{Mb_2}{b}(3a^2 + b_2^2)$$

$$= {}^1/_6 M\left(3a^2 + \frac{b_1^3 + b_2^3}{b}\right),$$

worin noch a, b_1 und b_2 durch die Seiten b, c und d auszudrücken sind.

Nun ist $b_1 = \frac{b^2 + d^2 - c^2}{2b}$, $b_2 = \frac{b^2 + c^2 - d^2}{2b}$ (Ebene Geometrie, §. 47, 2),

folglich $\frac{b_1^3 + b_2^3}{b} = \frac{b^4 + 3c^4 - 6c^2d^2 + 3d^4}{4b^2}$

und $a^2 = d^2 - b_1^2 = \frac{2b^2c^2 + 2c^2d^2 + 2c^2d^2 - b^4 - c^4 - d^4}{4b^2}$

als nach Substitution dieser Ausdrücke und gehöriger Reduktion

$$\mathfrak{M} = {}^1/_{12} M(3c^2 + 3d^2 - b^2).$$

11. a) Denkt man sich das Parallelepiped mittels einer durch die Kante h gelegten Diagonalebene in zwei gleiche Prismen geteilt, deren Grundflächen rechtwinkelige Dreiecke sind, so ergiebt sich nach Aufgabe 8:

$$\mathfrak{M} = {}^1/_6 ({}^1/_2 M)(3a^2 + b^2) + {}^1/_6 ({}^1/_2 M)(a^2 + 3b^2)$$
$$= {}^1/_3 M(a^2 + b^2).$$

b) In diesem Falle kann man sich den Körper in zwei gleiche Parallelepipede zerlegt denken und findet nach a):

$$\mathfrak{M} = {}^1/_3 ({}^1/_2 M)[({}^1/_2 a)^2 + b^2] + {}^1/_3 ({}^1/_2 M)[({}^1/_2 a)^2 + b^2]$$
$$= {}^1/_{12} M(a^2 + 4b^2).$$

c) $\mathfrak{M} = 4 \cdot {}^1/_3 ({}^1/_4 M)[({}^1/_2 a)^2 + ({}^1/_2 b)^2] = {}^1/_{12} M(a^2 + b^2)$.

12. Durch ähnliche Schlüsse wie in Aufgabe 8 findet man aus Aufgabe 7:

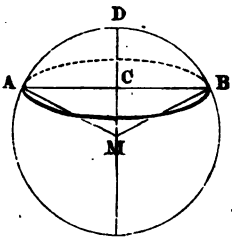
$$\mathfrak{M} = {}^1/_2 Mr^2.$$

13. Ein massiver Cylinder von der gleichen Dichte wie die Masse M des hohlen Cylinders würde bei einem Halbmesser $= R$ die Masse $\frac{MR^2}{R^2 - r^2}$ und bei einem Halbmesser $= r$ die Masse $\frac{Mr^2}{R^2 - r^2}$ haben, also ist der vorigen Aufgabe entsprechend:

$$\mathfrak{M} = {}^1/_2 \frac{MR^2}{R^2 - r^2} \cdot R^2 - {}^1/_2 \frac{Mr^2}{R^2 - r^2} \cdot r^2 = {}^1/_2 M(R^2 + r^2).$$

14. Man denke sich (Fig. 36) die Höhe $CD = h$ des Kugelsegmentes in n gleiche Teile geteilt und durch die Teilungspunkte Ebenen parallel mit der Grundfläche AB gelegt, so kann man sich, wenn man n unendlich groß annimmt, das Segment aus unendlich vielen Cylindern bestehend denken, wovon jeder die Höhe $\frac{h}{n}$ hat, während die Quadrate der Radien ihrer Grundflächen (in der Reihe von D nach C genommen) gleich sind: $\left(2r - \frac{h}{n}\right)\frac{h}{n}$,

Fig. 36.



$\left(2r - 2\cdot\frac{h}{n}\right)2\cdot\frac{h}{n}$, $\left(2r - 3\cdot\frac{h}{n}\right)3\cdot\frac{h}{n}$, $\cdots\left(2r - n\cdot\frac{h}{n}\right)n\cdot\frac{h}{n}$ *),

also, wenn μ die Masse der Kubikeinheit bezeichnet,

die Masse des ersten Cylinders $= \left[\left(2r - \frac{h}{n}\right)\frac{h}{n}\right]\pi\cdot\frac{h}{n}\,\mu$,

$= \left(2r - \frac{h}{n}\right)\left(\frac{h}{n}\right)^2\pi\mu$,

„ „ „ zweiten „ $= \left(2r - 2\frac{h}{n}\right)2\left(\frac{h}{n}\right)^2\pi\mu$,

„ „ „ dritten „ $= \left(2r - 3\frac{h}{n}\right)3\left(\frac{h}{n}\right)^2\pi\mu$,

. .

„ „ „ $n$ten „ $= \left(2r - n\frac{h}{n}\right)n\left(\frac{h}{n}\right)^2\pi\mu$,

also nach Aufgabe 12 das Trägheitsmoment

des ersten Cylinders $= \frac{1}{2}\left[\left(2r - \frac{h}{n}\right)\left(\frac{h}{n}\right)^2\pi\mu\right]\left[\left(2r - \frac{h}{n}\right)\frac{h}{n}\right]$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{h}{n}\right)^3\pi\mu\left[4r^2 - 4r\frac{h}{n} + \left(\frac{h}{n}\right)^2\right]$,

„ zweiten „ $= \frac{1}{2}\left(\frac{h}{n}\right)^3\pi\mu\left[2^2.4r^2 - 2^3.4r\frac{h}{n} + 2^4\left(\frac{h}{n}\right)^2\right]$,

„ dritten „ $= \frac{1}{2}\left(\frac{h}{n}\right)^2\pi\mu\left[3^2.4r^2 - 3^3.4r\frac{h}{n} + 3^4\left(\frac{h}{n}\right)^2\right]$,

. .

„ $n$ten „ $= \frac{1}{2}\left(\frac{h}{n}\right)^3\pi\mu\left[n^2.4r^2 - n^3.4r\frac{h}{n} + n^4\left(\frac{h}{n}\right)^2\right]$.

*) Da CA die mittlere Proportionale zwischen EC und CD ist, so hat man $CA^2 = EC\,.\,CD = (2r - h)\,h$ u. s. w.

Durch Addition erhält man

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{2}\left(\frac{h}{n}\right)^3 \pi\mu \Big[4r^2\,(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) - 4r\,\frac{h}{n}\,(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3) + \frac{h^2}{n^2}\,(1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4)\Big]$$

$$= \frac{1}{2}\,h^3\pi\mu\Big[3r^2\,\frac{1}{n^3}\,(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) - 4r\,\frac{h}{n}\cdot\frac{1}{n^4}\,(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3) + h^2\cdot\frac{1}{n^5}\,(1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4)\Big]$$

$$= \frac{1}{2}\,h^3\pi\mu\left(\frac{4r^2}{3} - \frac{4rh}{4} + \frac{h^2}{5}\right)$$

$$= \frac{1}{30}\,h^3\pi\mu\,(20r^2 - 15rh + 3h^2).$$

Es ist aber $M = (r - {}^1/_3\,h)\,h^2\pi\mu$, und daraus ergiebt sich ${}^1/_{30}\,h^3\pi\mu = \dfrac{Mh}{30r - 10h}$, folglich nach Substitution dieses Ausdrucks

$$\mathfrak{M} = \frac{Mh}{30r - 10h}\,(20r^2 - 15rh + 3h^2).$$

15. Setzt man in die Formel der vorigen Aufgabe $2r$ statt h, so erhält man für die Kugel

$$\mathfrak{M} = {}^2/_5\,Mr^2.$$

16. Das Prisma hat ein Gewicht von $\dfrac{6\,.\,10}{2}\cdot 4\cdot 0{,}007 = 0{,}84\,\text{kg}$, also eine Masse von $\dfrac{0{,}84}{9{,}81}$ Masseneinheiten (siehe II., 5), folglich ist nach Aufgabe 9:

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{24}\cdot\frac{0{,}84}{9{,}81}\,(12\,.\,10^2 + 6^2) = \frac{43{,}26}{9{,}81}$$ Masseneinheiten oder 43,26 kg in der Entfernung eines Zentimeters von der Drehachse, d. h.: Eine Masse von $\dfrac{43{,}26}{9{,}81}$ Masseneinheiten oder 43,26 kg, die in der Entfernung eines Zentimeters von der Drehachse in einem Punkte konzentriert wäre, würde vermöge ihrer Trägheit einer bewegenden Kraft den nämlichen Widerstand leisten, wie die Masse des Prismas in ihrer Verteilung.

Gewöhnlich wird das Trägheitsmoment nur durch das Gewicht der Masse angegeben, die man sich in der Entfernung der zu Grunde gelegten Längeneinheit (hier 1 cm) angebracht denkt, also im vorliegenden Falle kurz so berechnet und ausgedrückt:

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{24} \cdot 0{,}84\ (12 \,.\, 10^2 + 6^2) = 43{,}26\ \text{kg}.$$

17. $\mathfrak{M} = \frac{43{,}26}{100^2} = 0{,}004326\ \text{kg}$ (Lehrb. §. 51, 2, I).

18. Das Volumen des Cylinders ist $= (0{,}2)^2 \,.\, 3{,}1416 \,.\, 0{,}5 = 0{,}062832$ cbm $= 62{,}832$ cdm, sein Gewicht also $= 62{,}832 \,.\, 7{,}2 = 452{,}39$ kg, folglich nach Aufgabe 12:

$$\mathfrak{M} = {}^1/_2 \,.\, 452{,}39\ (0{,}2)^2 = 9{,}0478\ \text{kg}, \text{ oder } \frac{9{,}0478}{9{,}81} \text{ Masseneinheiten}$$

in der Entfernung eines Meters von der Drehachse (vergleiche Aufgabe 16).

19. $Q = \frac{9{,}0478}{(0{,}2)^2} = 226{,}195\ \text{kg}.$

20. Die Masse M der Pendellinse wiegt 5,87823 kg, und ihr Trägheitsmoment $\mathfrak{M}$ in Beziehung auf die durch den Schwerpunkt gehende (geometr.) Achse ist (nach Aufg. 14) $= 0{,}02902$ kg in der Entfernung eines Meters von der Drehachse, folglich ihr Trägheitsmoment in Beziehung auf eine mit jener parallele und um die Strecke $e = 0{,}99$ m von ihr entfernte Achse (nach §. 51, 3 d. Lehrb.):

$$\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M} + Me^2 = 0{,}02902 + 5{,}87823 \,.\, 0{,}99^2 = 5{,}79027\ \text{kg}$$

in der Entfernung eines Meters von der Drehachse.

21. Das Trägheitsmoment des Radkranzes ist nach Aufgabe 13:

$$\mathfrak{M} = {}^1/_2\ G_1\ (R^2 + r^2),$$

das der sechs Radarme, wenn man sie bis zum Mittelpunkte rechnet, dafür aber die Nabe unberücksichtigt läßt (nach Aufgabe 11, b):

$$\mathfrak{M}_2 = 6 \,.\, {}^1/_{12}\ G_2\ (b^2 + 4r^2);$$

folglich das gesuchte Trägheitsmoment:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 = {}^1/_2\ G_1\ (R^2 + r^2) + 6 \,.\, {}^1/_{12}\ G_2\ (b^2 + 4r^2)$$

$= 51\,200$ kg in der Entfernung eines Meters von der Drehachse.

22. Die Länge des einfachen Pendels, das die gleiche Schwingungszeit wie das vorliegende zusammengesetzte Pendel hat, ist (nach §. 60, 1 d. Lehrbuchs) sowohl $= \frac{g\,T^2}{\pi^2}$, als auch, wenn M die Masse des Körpers bezeichnet, $= \frac{\mathfrak{M}}{Me}$, und aus der Gleichsetzung dieser Ausdrücke findet sich $\mathfrak{M} = \frac{Mge\,T^2}{\pi^2}$ $= \frac{Qe\,T^2}{\pi^2}$.

Auflösungen zu IX.

1. $l_1 : l_2 = 150^2 : 120^2 = 25 : 16.$

2. $t = 3{,}1416 \sqrt{\frac{1}{9{,}808}} = 1{,}0031$ Sekunden.

3. $l = \frac{9{,}808 \,.\, 2{,}5^2}{3{,}1416^2} = 6{,}212$ m.

4. $g = \frac{3{,}1416^2 \,.\, 3{,}97501}{2^2} = 9{,}80792$ m.

5. $g_0 = \pi^2 \,.\, L_0 = 0{,}978103$ m.

6. $L = \frac{g}{\pi^2} = \frac{9{,}808}{3{,}1416^2} = 0{,}9937$ m $= 3{,}166$ preuß. Fuß.

7. $\frac{l \,.\, n^2}{t^2 \,.\, 60^2} = \frac{1 \,.\, 239^2}{4^2 \,.\, 60^2} = 0{,}992$ m.

8. Aus $\sqrt{1{,}25541} : \sqrt{0{,}994277} = 60 : x$ folgt $x = 53{,}4$.

9. Bezeichnen wir die Anzahl der in 24 Stunden enthaltenen Sekunden, nämlich 86400, der Kürze wegen mit N, und die Anzahl der Schwingungen, welche das Pendel täglich weniger als N macht, mit n, so hat man, da sich die Pendellängen umgekehrt wie die Quadrate der Schwingungszahlen verhalten: $(L + d) : L = N^2 : (N - n)^2$ oder

$$\frac{L + d}{L} = \frac{N^2}{(N - n)^2} = 1 + \frac{2n}{N} + \cdots,$$

wenn man nämlich die höheren Potenzen von $\frac{n}{N}$ unberücksichtigt läßt. Daraus ergiebt sich $n = \frac{d \,.\, N}{2L}$.

10. a) Bezeichnet L_0 die Länge des Sekundenpendels am Äquator, L_1 diejenige am Pole, so erhält man die Anzahl n der Schwingungen, welche das Pendel L_0 am Pole während 24 Stunden machen würde, aus der Proportion $n^2 : 86\,400^2 = L_1 : L_0$, nämlich $n = 86\,400 \,.\, \sqrt{\frac{L_1}{L_0}}$, also nach Substitution der Werte von L_1 und L_0 aus Tabelle 6 im Anhang:

$$n = 86\,400 \sqrt{\frac{3{,}17388}{3{,}15750}} = 86\,623,$$

also würde das Pendel L_0 am Pole 223 Schwingungen täglich mehr machen als am Äquator, die Uhr also um ebensoviel Sekunden, d. h. 3 Minuten 43 Sekunden vorgehen.

b) Aus $L : (L - x) = N^2 : (N - n)^2$ folgt $x = \left(2 - \frac{n}{N}\right)\frac{n}{N} \cdot L$ $= 0{,}002942$ m.

11. Die Schwingungsebene des Pendels dreht sich in 24 Stunden um 285,6°, also in einer Stunde um 11,9°, und würde einen vollständigen Umlauf in $\frac{360}{11{,}9} = 30{,}25$ Stunden machen.

12. Für Berlin ist $L = 0{,}99419$ m $= 3{,}16749$ pr. Fuß.
„ Kassel „ $L = 0{,}994117$ „ $= 3{,}16745$ „ „
„ Hanau „ $L = 0{,}994014$ „ $= 3{,}16713$ „ „

13. Bezeichnen wir die Beschleunigung der Schwere am Meeresspiegel mit g, in der Höhe h mit g_1, so erhalten wir aus

$g_1 : g = r^2 : (r + h)^2$, $g_1 = g\,\frac{r^2}{(r+h)^2} = g\,\frac{r^2}{r^2 + 2hr + h^2}$ $= g\left(1 - \frac{2h}{r} + \cdots\right)$, oder da wir in diesem Ausdruck die letzten Glieder ihrer Kleinheit wegen vernachlässigen können, $g_1 = g\left(1 - \frac{2h}{r}\right)$. Folglich hat man, weil $L : L_1 = g : g_1$,

$$L : L_1 = 1 : \left(1 - \frac{2h}{r}\right),$$

also $L_1 = L\left(1 - \frac{2h}{r}\right)$,

und nach Substitution der Werte der Aufgabe:

$$L_1 = L\,(1 - {}^1/_{2119}) = 0{,}99385\text{ m}.$$

14. Da $t = \pi\sqrt{\frac{x}{g}}$ und $T = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\alpha}{g}}$, der Bedingung der Aufgabe gemäß aber $2t = T$ ist, so ergiebt sich $x = l\cos\alpha$, oder wenn α sehr klein, $x = l$.

15. Bezeichnet T die Zeit eines Umlaufs, so hat man $T = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}$, sowie auch $T = \frac{60}{n}$, und daraus ergiebt sich $h = \frac{60^2 g}{4\pi^2 n^2}$ $= \frac{3600 \,.\, 9{,}81}{4 \,.\, 9{,}8696 \,.\, n^2} = \frac{894{,}8}{n^2}$ m.

16. Wenn T die Umlaufszeit der Achse, also auch des Pendels bezeichnet, so hat man $w = \frac{2\pi}{T}$, und wenn h die Höhe des von der Pendelstange gebildeten Kegels bezeichnet, $T = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}$, und aus der Verbindung dieser beiden Gleichungen ergiebt sich $h = \frac{g}{w^2}$, folglich $x = l - \frac{g}{w^2}$.

17. Die reduzierte Länge des zusammengesetzten Pendels ist $l = \frac{gt^2}{\pi} = \frac{9{,}806 \,.\, 1{,}5^2}{3{,}1416^2} = 2{,}2355$ m.

18. Das Trägheitsmoment der Stange, in Beziehung auf die Schwingungsachse, ist $= {}^1/_3 Ml^2$, das statische Moment des im Schwerpunkte der Stange vereinigt gedachten Gewichtes, auf dieselbe Achse bezogen, ist $= {}^1/_2 Ml$, also $L = \frac{{}^1/_3 Ml^2}{{}^1/_2 Ml}$ (Lehrb. §. 60, 1) $= {}^2/_3 l = 2$ m.

19. Das Trägheitsmoment der Kugel in Beziehung auf eine beliebige durch ihren Schwerpunkt gehende Achse ist (nach VIII, 15) $= \frac{2}{5} Mr^2$, folglich ist (nach §. 51, 3 des Lehrbuchs) ihr Trägheitsmoment in Beziehung auf die Schwingungsachse $= {}^2/_5 Mr^2 + Md^2$; das statische Moment der Kugel ist $= Md$, also ist, da der feine Faden in der Rechnung vernachlässigt werden kann (nach §. 60, 1 d. Lehrb.), $x = \frac{{}^2/_5 Mr^2 + Md^2}{Md} = \frac{2r^2}{5d} + d = {}^1/_{225} + 90$ cm. Der Schwingungspunkt ist somit so wenig vom Mittelpunkte der Kugel entfernt, daß er als damit zusammenfallend betrachtet werden kann.

20. Aus den beiden vorhergehenden Aufgaben 18 und 19 ergiebt sich

$$x = \frac{{}^2/_5 \,.\, 0{,}75 \,.\, 4^2 + 0{,}75 \,.\, 34^2 + {}^1/_3 \,.\, 0{,}025 \,.\, 30^2}{0{,}75 \,.\, 34 + {}^1/_2 \,.\, 0{,}025 \,.\, 30} = 38{,}44 \text{ cm}$$

und daraus $t = \pi \sqrt{\frac{38{,}44}{9{,}81}} = 0{,}6219$ Sekunden.

21. Die Länge des gleichzeitigen einfachen Pendels ist

$$l = \frac{pa^2 + qx^2}{pa - qx}, \text{ folglich } t = \pi \sqrt{\frac{pa^2 + qx^2}{(pa - qx) \,.\, g}}.$$

22. Bezeichnet $\mathfrak{M}$ das Trägheitsmoment des Pendels, so ist die auf den Stoßpunkt G reduzierte Masse des Pendels, d. h. diejenige Masse, welche, im Punkte G konzentriert, die nämliche Drehkraft zur Erzeugung einer bestimmten Winkelgeschwindigkeit in Anspruch nehmen würde, wie die Pendelmasse in ihrer Verteilung, $= \frac{\mathfrak{M}}{a^2}$ (§. 51, 2 d. Lehrb.). Der Stoß der Kugel, die eine Masse $= m$ und eine Geschwindigkeit $= x$ hat, auf das Pendel kann nun betrachtet werden, als ob er auf eine in G befindliche ruhende Masse $\frac{\mathfrak{M}}{a^2}$ gerichtet wäre; alsdann berechnet sich die Geschwindigkeit des Punktes G [nach §. 63, 3 a) des Lehrb.] $= \frac{mx}{\frac{\mathfrak{M}}{a^2} + m} = \frac{ma^2 x}{\mathfrak{M} + ma^2}$, folglich ist die Geschwindigkeit, welche der Schwingungsmittelpunkt M im Anfang des von ihm beschriebenen Bogens MO erhält,

$$= \frac{m a^2 x}{\mathfrak{M} + m a^2} \cdot \frac{l}{a}.$$

Diese Geschwindigkeit wird durch die Arbeit der Schwerkraft während des Durchlaufens des Bogens MO vernichtet, dann aber bei der Rückkehr von O nach M in entgegengesetzter Richtung wieder erzeugt, ihre absolute Größe ist also, da das vorliegende Pendel als ein einfaches Pendel von der Länge l betrachtet werden kann, dessen schwerer Punkt die im Schwingungsmittelpunkte konzentriert gedachte Masse $\frac{\mathfrak{M}}{a^2} + m$ ist,

$$= \sqrt{2gl\,(1 - \cos\alpha)} \text{ (Lehrb. §. 55).}$$

Aus der Gleichsetzung dieses und des obigen Ausdruckes findet sich nun die gesuchte Geschwindigkeit der Kugel

$$\text{I.} \quad x = \frac{\mathfrak{M} + m a^2}{m a} \sqrt{\frac{2g}{l}}\,(1 - \cos\alpha).$$

Da aber $\mathfrak{M} + m a^2$ das Trägheitsmoment der Pendelmasse M nebst der in dem Pendel stecken gebliebenen Kugelmasse m, auf die Drehachse C bezogen, ausdrückt, also (nach §. 60, 1 d. Lehrb.) $\frac{\mathfrak{M} + m a^2}{(M + m)e} = l$, folglich $\mathfrak{M} + m a^2 = (M + m) l e$ ist, so erhält man nach der Substitution dieses Ausdruckes in I.:

$$\text{II.} \quad x = \frac{M + m}{m} \cdot \frac{e}{a} \sqrt{2gl\,(1 - \cos\alpha)}$$

$$= \frac{1439 + 3}{3} \cdot \frac{1{,}32}{1{,}4} \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}5\,(1 - \cos 15^0)}$$

$$= 453{,}79 \text{ m.}$$

Wie vereinfacht sich der Ausdruck für x, wenn der Stoßpunkt mit dem Schwingungsmittelpunkte zusammenfällt?

Auflösungen zu X.

1. $c = \frac{M_1 c_1 + M_2 c_2}{M_1 + M_2} = \frac{80 \cdot 5 + 20 \cdot 8}{80 + 20} = 5^3/_5$ m.

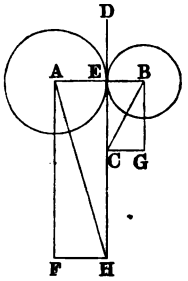
2. $c = \frac{M_1 c_1 - M_2 c_2}{M_1 + M_2} = \frac{80 \cdot 5 - 20 \cdot 8}{80 + 20} = 2^2/_5$ m.

3. $c = \frac{M_1 c_1}{M_1 + M_2} = \frac{80 \cdot 5}{80 + 20} = 4$ m.

4. $c_2 = c + \frac{M_1 (c - c_1)}{M_2} = 3 + \frac{150 (3 - 2)}{60} = 5^1/_2$ m.

5. Man zerlege (Fig. 37) die Geschwindigkeit der Kugel A in zwei rechtwinkelige Seitengeschwindigkeiten, wovon die eine senkrecht auf die Berührungsebene (von A nach E zu), die andere parallel der Berührungsebene (von A nach F zu) gerichtet ist, nämlich in 22,5 . *sin* 25° und 22,5 . *cos* 25°; ebenso die Geschwindigkeit der Kugel B in die beiden Seitengeschwindigkeiten 12 . *sin* 36° und 12 . *cos* 36°. Die Kraft, mit welcher A gegen B wirkt, ist also = 3 . (22,5 . *sin* 25°) = 28,53, und die, mit welcher B gegen A wirkt, = 2 . (12 . *sin* 36°) = 14,11, und aus beiden entsteht eine Geschwindigkeit beider Kugeln von $\frac{28{,}53 - 14{,}11}{5} = 2{,}884$ m in der Richtung von A nach E. Die Kugel A wird also nach E zu durch eine Kraft getrieben, die ihr die Geschwindigkeit $AI = 2{,}884$ m, und von einer darauf rechtwinkeligen von A nach F zu wirkenden Kraft, die ihr die Geschwindigkeit 75 . *cos* 25° = 20,3919 m erteilt, woraus für A eine Geschwindigkeit von 20,595 m unter einem Winkel $AKI = 8°\,3'$ gegen CD folgt. — Ebenso erhält B durch die beiden Kräfte, wovon ihr die eine in der Richtung von B nach L die Geschwindigkeit 2,884 m, die andere in der Richtung von B nach G die Geschwindigkeit 12 . *cos* 36° = 9,708 m erteilt, die resultierende Geschwindigkeit von 10,127 m unter einem Winkel $GBM = 16°\,33'$ abwärts von DC.

Fig. 37.



6. Aus Aufgabe 1 folgt

Summe der Bewegungsgrößen:

vor dem Stoß	nach dem Stoß	Differenz
$\frac{80.5 + 20.8}{9{,}81} = \frac{560}{9{,}81}$	$\frac{(80 + 20).5{,}6}{9{,}81} = \frac{560}{9{,}81}$	0

Summe der lebendigen Kräfte:

vor dem Stoß	nach dem Stoß	Differenz
$\frac{1}{2}\cdot\frac{80}{9{,}81}\cdot 5^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{20}{9{,}81}\cdot 8^2 = 167{,}18$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{80+20}{9{,}81}\cdot 5{,}6^2 = 159{,}84$	7,34 mkg.

Aus Aufgabe 2 folgt

Summe der Bewegungsgrößen:

vor dem Stoß	nach dem Stoß	Differenz
$\frac{80.5 - 20.8}{9{,}81} = \frac{240}{9{,}81}$	$\frac{(80 + 20).2{,}4}{9{,}81} = \frac{240}{9{,}81}$	0

Summe der lebendigen Kräfte:

vor dem Stoß	nach dem Stoß	Differenz
$\frac{1}{2}\cdot\frac{80}{9{,}81}\cdot 5^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{20}{9{,}81}\cdot 8^2 = 167{,}18$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{80+20}{9{,}81}\cdot 2{,}4^2 = 29{,}36$	137,82 mkg.

Aus Aufgabe 3 folgt

Summe der Bewegungsgrößen:

vor dem Stoß	nach dem Stoß	Differenz
$\frac{80.5+0}{9{,}81}=\frac{400}{9{,}81}$	$\frac{(80+20).4}{9{,}81}=\frac{400}{9{,}81}$	0

Summe der lebendigen Kräfte:

vor dem Stoß	nach dem Stoß	Differenz
$\frac{1}{2}\cdot\frac{80}{9{,}81}\cdot 5^2+0=101{,}94$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{80+20}{9{,}81}\cdot 4^2=81{,}55$	20,39 mkg.

7. In diesem Falle muß in dem Ausdruck der Aufgabe für die gemeinschaftliche Geschwindigkeit c nach dem Stoß c_2 negativ gesetzt werden, man hat also

$$\text{I.}\quad c=\frac{M_1c_1-M_2c_2}{M_1+M_2},\ \text{woraus folgt}$$

$$\text{II.}\quad M_1c+M_2c=M_1c_1-M_2c_2.$$

Um nun diese Ausdrücke für die Bewegungsgröße der Kugeln in die für die entsprechenden lebendigen Kräfte zu verwandeln, braucht man nur jedes der Produkte mit der bezüglichen halben Geschwindigkeit zu multiplizieren (Lehrbuch §. 16, 3). Geschieht dieses, so erhält man aus den Ausdrücken links der Gleichung II $\frac{1}{2}M_1c^2+\frac{1}{2}M_2c^2$, und aus denen rechts $\frac{1}{2}M_1c_1^2+\frac{1}{2}M_2c_2^2$. Hierdurch ist aber die rechte Seite der Gleichung II offenbar stärker gewachsen als die linke, folglich ist

$$\frac{1}{2}M_1c^2+\frac{1}{2}M_2c^2<\frac{1}{2}M_1c_1^2+\frac{1}{2}M_2c_2^2,$$

woraus sich für den Unterschied der lebendigen Kräfte vor und nach dem Stoß zunächst derselbe Ausdruck ergiebt, wie in der Aufgabe; durch Substitution des Wertes für c aus I. erhält man aber $\frac{1}{2}\frac{M_1M_2}{M_1+M_2}(c_1+c_2)^2$.

8. $$v_1=c_1-\frac{2M_2(c_1-c_2)}{M_1+M_2}=20-\frac{2.40(20-12)}{30+40}=10^6/_7\,\text{dm};$$

$$v_2=c_2+\frac{2M_1(c_1-c_2)}{M_1+M_2}=12+\frac{2.30.(20-12)}{30+40}=18^6/_7\,\text{dm};$$

beide Körper behalten ihre Richtung.

9. $$v_1=20-\frac{2\,.\,105\,(20-2)}{30+105}=-7{,}3\,\text{dm}.$$

$v_2=2+\frac{2\,.\,30\,(20-2)}{30+100}=10{,}3\,\text{dm}$, also die stoßende Kugel erhält nach dem Stoß eine der ursprünglichen entgegengesetzte Richtung, während die gestoßene in ihrer Richtung bleibt.

10. $$v_1=c_1-\frac{2M_2(c_1+c_2)}{M_1+M_2}=4{,}5-\frac{2.16(4{,}5+2{,}5)}{10+16}=-4{,}04\,\text{m},$$

$$v_2=-c_2+\frac{2M_1(c_1+c_2)}{M_1+M_2}=-2{,}5+\frac{2\,.\,10\,(4{,}5+2{,}5)}{10+16}$$

$= 2{,}885$ m; beide Kugeln erhalten also durch den Stoß Richtungen, die der ursprünglichen entgegengesetzt sind.

11. $v_1 = 2{,}58$ m, $v_2 = 5{,}63$ m, d. h. die beiden Kugeln vertauschen (annähernd) ihre Geschwindigkeiten.

12. Aus Auflösung zu 8 oder 10 folgt für $c_2 = 0$, $v_1 = 0$, $v_2 = 2$ m.

13. Aus den Formeln der Auflösungen zur 8. oder 10. folgt für $c_2 = 0$ die Geschwindigkeit

der zweiten Kugel $= \dfrac{2 \,.\, 1 \,.\, 1}{1 + \frac{1}{2}} = \dfrac{4}{3}$,

„ dritten „ $= \dfrac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \left(\dfrac{4}{3}\right)^2$,

„ vierten „ $= \dfrac{2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2}{\frac{1}{4} + \frac{1}{8}} = \left(\dfrac{4}{3}\right)^3$,

„ $n$ten „ $= \left(\dfrac{4}{3}\right)^{n-1}$ cm,

„ 10ten „ $= 0{,}13318$ m,

„ 100sten „ $= 23\,384\,670\,000$ m.

14. Aus den beiden Gleichungen $M_1 + M_2 = 75$ und $6 = 21 - \dfrac{2 M_2 (21 + 10)}{36}$ findet sich $M_1 = 27{,}29$ kg, $M_2 = 8{,}71$ kg, also $v_2 = -10 + \dfrac{2 \,.\, 27{,}29 \,(21 + 10)}{36} = 37$ m in einer der ursprünglichen entgegengesetzten Richtung.

15. Bei dem schiefen Stoß elastischer Körper muß die Bewegung eines jeden ebenso wie bei den unelastischen in eine gegen die Berührungsebene senkrechte und in eine mit dieser Ebene parallele zerlegt werden. In Beziehung auf A sind die Seitengeschwindigkeiten $10 \,.\, \sin 16^0$ und $10 \,.\, \cos 16^0$, für B aber $3{,}5 \,.\, \sin 24^0$ und $3{,}5 \,.\, \cos 24^0$.

Die ersten Teile dieser Seitengeschwindigkeiten werden nach dem Stoß für A:

$$v_1 = 10 \,.\, \sin 16^0 - \frac{2 \,.\, 3{,}5 \,(10 \,.\, \sin 16^0 + 3{,}5 \,.\, \sin 24^0)}{9 + 3{,}35},$$

für B:

$$v_2 = -3{,}5 \,.\, \sin 24^0 + \frac{2 \,.\, 9 \,(10 \sin 16^0 + 3{,}5 \,.\, \sin 24^0)}{9 + 3{,}5}.$$

Auf die zweiten Teile jener Seitengeschwindigkeiten hat der Stoß keinen Einfluß. Setzt man nun v_1 mit der darauf senkrechten Seitengeschwindigkeit $10 \,.\, \cos 16^0$ zusammen, so findet man für A die resultierende Geschwindig-

keit = 9,622 m, und ebenso durch Zusammensetzung von v_2 mit $3{,}5 \cdot \cos 24^0$ für B die resultierende Geschwindigkeit 5,605 m. Der Winkel, welchen die Richtung von A nach dem Stoße mit der Berührungsebene macht, findet sich $= 1^0\,58'\,24''$ und der von $B = 124^0\,46'\,53''$.

16. Der Rammbär fällt mit einer Geschwindigkeit $= \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}5}$ = nahe 5,4 m auf den Pfahl, die gemeinschaftliche Geschwindigkeit der beiden Massen nach dem Stoße würde also, wenn kein Widerstand vorhanden wäre, $= \frac{500 \cdot 5{,}4}{500 + 300} = 3{,}375$ m sein. Die daraus hervorgehende Arbeit $= \frac{1}{2} \cdot \frac{800}{9{,}81} \cdot 3{,}375^2$ mkg wird aber durch den Widerstand des Erdbodens beim Eindringen des Pfahles in denselben um 0,004 m vernichtet. Ist x die Größe dieses Widerstandes, also gleich der Größe einer konstanten Kraft, vermöge welcher die Masse des Rammbärs und des Pfahles von der Ruhe aus nach Zurücklegung eines Weges von 0,004 m eine Geschwindigkeit von 3,375 m erlangen würde, folglich $x \cdot \frac{4}{1000}$ ihre Arbeit, so muß $x \cdot \frac{4}{1000}$ $= \frac{1}{2}\frac{800}{9{,}81} \cdot 3{,}375^2$ mkg sein, woraus $x = 116\,100$ kg folgt, welches Gewicht die Belastung angiebt, die jetzt der Pfahl tragen kann, ohne tiefer einzusinken.

(Theoretisch genauer hätte zu dem obigen Ausdruck für die Arbeit des Rammbärs und des Pfahles nach dem Stoße noch die Arbeit der Schwerkraft, welche auf diese Massen während des Eindringens um 0,004 m wirkt, als das Produkt $800 \cdot \frac{4}{1000}$ addiert werden müssen, wodurch sich $x = 116\,100 + 800 = 116\,900$ kg ergeben hätte.)

Auflösungen zu XI.

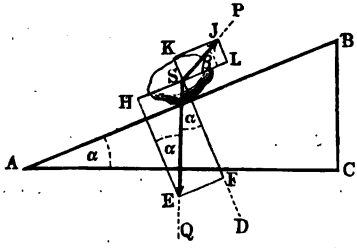
1. $f = \frac{18{,}2}{52} = 0{,}35$.
2. $P = 0{,}06 \cdot 400 = 24$ kg.
3. $L = 0{,}45 \cdot 600 \cdot 400 = 108\,000$ mkg.
4. Die lebendige Kraft des Körpers, nämlich $\frac{1}{2}\frac{G}{g} v^2$, wird durch die Arbeit der Reibung, nämlich Gfx aufgezehrt; aus der Gleichung $\frac{1}{2} \cdot \frac{19{,}62}{9{,}81} \cdot 20^2 = 19{,}62 \cdot 0{,}02 \cdot x$ folgt also $x =$ nahe 1020 m.

5. a) 0,07 . 100 = 7 kg, wenn man $f = 0{,}07$ nimmt,
b) 2 . 0,5 . 7 = 7 mkg in der Sekunde.

6. Der Kolbendruck an die Wand des Cylinders ist = 8 . 150 . 1,25 = 1500 kg, also, wenn man den Reibungskoeffizienten von Metall auf Metall = $1/8$ annimmt, die gesuchte Kraft = $1/8$. 1500 = 187,5 kg.

7. Zerlegt man (Fig. 38) ähnlich wie in Aufgabe 55 in V. das Gewicht Q und die Kraft P jede in zwei Komponenten, wovon die eine auf der schiefen Ebene senkrecht steht, die andere mit ihr parallel ist, so ergiebt sich der Druck D, welchen die schiefe Ebene erleidet, = $Q \cos\alpha - P \sin\beta$, folglich die Reibung $f\,(Q \cos\alpha - P \sin\beta)$. Soll nun a) der Körper bloß am Herabgleiten gehindert werden, so muß

Fig. 38.



$$P \cos\beta = Q \sin\alpha - f\,(Q \cos\alpha - P \sin\beta),$$

also $$P = Q\,\frac{\sin\alpha - f\cos\alpha}{\cos\beta - f\sin\beta} = 201{,}43\text{ kg}$$ fein.

b) Soll aber der Körper aufwärts bewegt werden, so muß $P \cos\beta = Q \sin\alpha + f\,(Q \cos\alpha - P \sin\beta)$,

also $$P = Q\,\frac{\sin\alpha + f\cos\alpha}{\cos\beta + f\sin\beta} = 407{,}68\text{ kg}$$ fein.

8. Da in diesem Falle der Winkel $\beta = -\alpha$ ist, so folgt aus der Auflösung der vorigen Aufgabe:

für a) $$P = Q\,\frac{\sin\alpha - f\cos\alpha}{\cos\alpha + f\sin\alpha} = Q\,\frac{tg\,\alpha - f}{1 + f\,tg\,\beta} = 175{,}11\text{ kg}.$$

für b) $$P = Q\,\frac{\sin\alpha + f\cos\alpha}{\cos\alpha - f\sin\alpha} = Q\,\frac{tg\,\alpha + f}{1 - f\,tg\,\alpha} = 656{,}33\text{ kg}.$$

Zusatz. Ist h die Höhe und b die Basis der schiefen Ebene, also $\frac{h}{b} = tg\,\alpha$, so ergiebt sich für a) $P = Q\,\frac{h - bf}{b + hf}$, für b) $P = Q\,\frac{h + bf}{b - hf}$.

9. Solange die Kugel auf horizontaler Bahn läuft, wirkt ihr eine Kraft entgegen, deren Beschleunigung = 9,81 . 0,02 ist. Nachdem die Kugel 5 m weit gelaufen ist, hat sie also an Geschwindigkeit verloren: $\sqrt{2 . 9{,}81 . 0{,}02 . 5}$ = 1,4 m; folglich besitzt sie noch 6,6 m Geschwindigkeit, wenn sie an die schiefe Ebene kommt. Hier zerlegt sich ihre Geschwindigkeit in zwei, die eine beträgt 6,6 . $\cos 20^0$, die andere 6,6 . $\sin 20^0$. Die letztere erzeugt Reibung, so daß nur 6,6 . ($\cos 20^0$ — 0,02 . $\sin 20^0$) an Geschwindigkeit übrig bleibt. Beim Aufsteigen längs der schiefen Ebene wirkt die Schwerkraft

entgegen mit der Beschleunigung $9{,}81 \cdot \sin 20^0$, sowie die Reibung mit $9{,}81 \cdot 0{,}02 \cdot \cos 20^0$. Also ist $s = \frac{v^2 (\cos 20^0 - 0{,}02 \sin 20^0)^2}{2g (\sin 20^0 + 0{,}02 \cos 20^0)} = 6{,}74$ m.

10. Setzt man in der Formel $P = Q \frac{h + bf}{b - hf}$ (siehe Zusatz zu Auflösung 8) $b = 2r\pi$, so erhält man

$$P = 37{,}07 \text{ kg}.$$

11. a) $P = (f \cdot \cos\alpha + \sin\alpha) \cdot Q = (0{,}48 \cos 50^0 + \sin 50^0) \cdot 300 = 322{,}5$ kg.

b) $P = (\sin\alpha - f \cos\alpha) \cdot Q = (\sin 50^0 - 0{,}48 \cos\alpha) \cdot 300 = 91{,}5$ kg.

12. Den Reibungskoeffizienten $f = 0{,}075$ genommen, beträgt die Reibung $0{,}075 \cdot 10\,000 = 750$ kg. Da der Radhalbmesser $\frac{300}{10} = 30$ mal so groß ist wie der Zapfenhalbmesser oder Hebelarm der Reibung, so ist die auf den Radumfang reduzierte Zapfenreibung $= {}^{750}/_{30} = 25$ kg.

Der Zapfenumfang ist $= 2 \cdot 0{,}1 \cdot \pi = 0{,}62832$ m, also der Weg der Reibung während einer Sekunde $= \frac{0{,}62832 \cdot 5}{60} = 0{,}05236$ m, und demnach die Arbeit der Reibung während einer Sekunde $= 0{,}05236 \cdot 750 = 39{,}27$ mkg.

13. Größe der Reibung $= f \cdot Q = 0{,}07 \cdot 25\,000 = 1750$ Pfd., Geschwindigkeit des Zapfens in der Sekunde $= \frac{d\pi n}{60} = \frac{8 \cdot 3{,}1416 \cdot 6}{60}$ $= 0{,}209$ Fuß. Verlorner Nutzeffekt $= 0{,}209 \cdot 1750 = 366{}^1/_3$ Pfd.

14. a) Aus der Gleichung $Pr_1 = Qr_1 + f(P + Q + G) r_2$ folgt

$$P = \frac{Qr_1 + f(Q + G) r_2}{r_1 - fr_2} = \text{nahe } 1018 \text{ kg}.$$

b) Aus Tabelle 8 C. folgt die zur Überwindung der Steifigkeit des Seiles erforderliche Kraft

$$= \frac{1}{2} \frac{d^2}{r_1} Q = \frac{1}{2} \cdot \frac{0{,}4^2}{1{,}2} \cdot 1000 = \text{nahe } 67 \text{ kg},$$

welche zu der in a) gefundenen Kraft zu addieren ist.

15. Nimmt man den Koeffizienten der wälzenden Reibung für diesen Fall (nach de Pambour) $= {}^1/_{370}$, so ist

$P = {}^1/_{370} \cdot 10\,000 = 27$ kg.

$$L = Qs = Q \cdot \frac{v^2}{2g} = (10\,000 + 27) \cdot \frac{8^2}{2 \cdot 9{,}81} = 32\,708 \text{ mkg}.$$

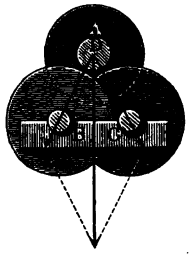
$L_1 = 54 \cdot 30 \cdot 60 = 12\,960$ mkg.

16. Bezeichnet f den bezüglichen Reibungskoeffizienten, so ist, wenn das gewöhnlich geringe Gewicht der Friktionsrollen unberücksichtigt bleibt, die Zapfenreibung $= f \cdot Q$ und ihr statisches Moment in Beziehung auf die Zapfen-

achse $= f \cdot Q \cdot r$. Das statische Moment der Kraft P, welche in der Tangente der Friktionsrollen wirkt, ist aber in Beziehung auf die Zapfenachse $= PR$, folglich $P \cdot R = f \cdot Q \cdot r$, also $P = \frac{r}{R} \cdot f \cdot Q$, also nur $\frac{r}{R}$ mal so groß, wie diese Kraft sein müßte, wenn sie die gleitende Reibung unmittelbar zu überwinden hätte.

17. Zerlegt man (Fig. 39) den Druck Q des Rades A in zwei Seitendrücke nach den Zapfen der Friktionsräder, wovon jeder $= \frac{Q}{2 \cos \frac{1}{2}\alpha}$, wenn man den Winkel BDC mit α bezeichnet, so ist (nach Auflösung der vorigen Aufgabe) durch die Welle des Rades A am Umfange des Rades B die Kraft $\frac{r}{R} \cdot f \cdot \frac{Q}{2 \cos \frac{1}{2}\alpha}$ zu überwinden und ebensoviel am Umfange des Rades C. Es ist also die zur Überwindung der Reibung erforderliche Kraft am Umfange der Welle des Rades A $= \frac{r}{R} \cdot \frac{fQ}{\cos \frac{1}{2}\alpha}$, während sie $f \cdot Q$ betragen würde, wenn die Welle unmittelbar in einer Pfanne ruhte.

Fig. 39.



18. Die Wirkung der Reibung am Umfange der Welle kann dem Widerstande eines Gewichtes Q gleich gesetzt werden, das mittels eines um die Welle geschlungenen Seiles in die Höhe gezogen wird und das sich, wenn r den Halbmesser der Welle bezeichnet, aus der Gleichung $Q \cdot r = P \cdot l$ bestimmt, nämlich $Q = \frac{Pl}{r}$. Die Arbeit, welche verrichtet werden muß, um das Gewicht Q bei $n$maliger Umdrehung der Welle, also um den Weg $2r\pi \cdot n$ zu heben, ist $Q \cdot 2r\pi \cdot n$ oder, für Q den obigen Wert gesetzt, $= P \cdot l \cdot 2 \cdot \pi \cdot n$ $= 260 \cdot 3{,}5 \cdot 2 \cdot 3\frac{1}{7} \cdot 6 =$ nahe 32 890 mkg in der Minute und drückt also die Leistungsfähigkeit der am Umfange der Welle wirkenden Kraft in der Minute aus.

19. In diesem Falle findet sich $L = 245 \cdot 3{,}5 \cdot 2 \cdot 3\frac{1}{7} \cdot 5 = 26\,950$ mkg.

20. Daß die Leistungsfähigkeit der an der Welle wirkenden Kraft größer ist, wenn die Welle sechs Umdrehungen in der Minute macht, als wenn sie nur fünf Umdrehungen macht, und daß man überhaupt mittels des Pronyschen Zaumes durch Versuche ermitteln kann, bei welcher Umdrehungszahl einer Welle die Leistungsfähigkeit am größten ist.

Auflösungen zu XII.

1. $d = \frac{Df}{Pl} = \frac{1{,}71 \,.\, 0{,}34}{6{,}72 : 1493} = 0{,}0000566$ mm, also

$E = \frac{1}{d} = 17\,668$ kg, d. h. dieses Gewicht würde einen Draht von der materiellen Beschaffenheit der Klaviersaite und beliebiger Länge, aber 1 qmm Querschnitt um die gleiche Länge ausdehnen, wenn der Draht so elastisch wäre wie etwa Gummi elastikum.

2. $P = \frac{DfE}{l} = \frac{0{,}5 \,.\, 0{,}4 \,.\, 20\,800}{2000} = 2{,}08$ kg.

3. Der Festigkeitsmodul $K = \frac{1200}{150} = 8$.

4. Nach Tabelle 7 ist der Festigkeitsmodul K des Messingdrahtes $= 50$, also ist $Q = 50 \,.\, 1{,}227 = 61{,}356$ kg. Nimmt man, wie gewöhnlich, sechsfache Sicherheit, so ist das Gewicht, das er dauernd tragen kann, $= 10{,}2$ kg.

5. Nimmt man den Querschnitt, da dieser beliebig ist, zu 1 qmm an, so ist, da 1 cmm Blei 0,0114 g wiegt, das Gewicht der Stange $0{,}0000114 . l$ kg, und dieses Gewicht muß dem Festigkeitsmodul 1,25 kg (Tab. 7 A.) gleich sein. Daraus folgt $l = 1096{,}5$ mm $= 1{,}0965$ m.

6. Nimmt man den Sicherheitsmodul S aus Tabelle 7 A., so erhält man aus $x^2 \,.\, 6{,}5 = 2000$ $x = 17{,}54$ mm.

7. Aus $e = P \,.\, \frac{L}{\lambda}$ folgt $e = 5 \,.\, \frac{' 3}{0{,}00088} = 17\,045$.

8. Der Balken würde abgebrochen werden durch die Last $Q = K_1 \,.\, \frac{bh^2}{l}$ (Tab. 7 C.) $= 150 \cdot \frac{18 \,.\, 20^2}{400} = 2700$ kg, mit Sicherheit würde er also tragen 270 kg.

9. a) In diesem Falle kann man sich die Last in dem Schwerpunkte des Balkens, also im Halbierungspunkte der Länge vereinigt denken, wo sie dann nur halb so stark wirkt, als am Ende; es muß also $\frac{1}{2} P = K_1 \frac{bh^2}{l}$ oder $P = 2 K_1 \frac{bh^2}{l}$ sein, also ist die Tragkraft des Balkens doppelt so groß, wie im vorigen Falle, demnach 540 kg.

b) Man muß $\frac{1}{2}\,Q$ statt Q und $\frac{1}{2}\,l$ statt l setzen, so daß $Q = 4\,K_1 \cdot \frac{b\,h^2}{l}$ wird. Folglich ist seine sichere Tragkraft viermal so groß, wie in Aufgabe 8, also 1080 kg.

c) $Q = 8\,K_1 \cdot \frac{b\,h^2}{l}$; der Balken wird also in diesem Falle achtmal soviel tragen, wie derselbe Balken unter den in Aufgabe 8 angenommenen Umständen, folglich 2160 kg.

10. Aus der Formel in der Auflösung zu 9 b) folgt $4\,K_1 = \frac{Q\,l}{b\,h^2} = \frac{100{,}8 \cdot 98}{(2{,}634)^3}$ $= 540{,}5$, also $K = 135{,}1$.

11. Aus der Formel $Q = 4\,K_1\,\frac{b\,h^2}{l}$ [Aufl. zu 9 b)] und der Tab. 7 C. ergiebt sich die Brechungskraft $= 4 \cdot 500 \cdot \frac{4 \cdot 36}{300} = 960$ kg und die sichere Tragkraft $= \frac{960}{4} = 240$ kg.

12. Das Gewicht eines parallelepipedischen Getreidehaufens von 80 dm Länge, 7,5 dm Breite und x Dezimeter Höhe ist $80 \cdot 7{,}5 \cdot x \cdot 0{,}8$ kg $= Q$, also ist nach Auflösung zu 9 c), wenn man für K_1 den Sicherheitsmodul $\frac{1}{10}\,K_1$ $= 15$ setzt, $80 \cdot 7{,}5 \cdot x \cdot 0{,}8 = 8 \cdot 15 \cdot \frac{30 \cdot 40^2}{800}$, woraus $x = 15$ dm.

13. Das kleinste, zum Zerreißen notwendige Gewicht Q wäre $q \cdot \frac{A}{a}$.

Auflösungen zu XIII.

---

1. a) 4,5 kg. b) $4{,}5 \cdot 1000 = 4500$ kg. c) $4{,}5\,\text{g} = \frac{4{,}5}{1000} = 0{,}0045$ kg.

2. $3 \cdot 8 = 24$ kg.

3. $6 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ kg.

4. $\frac{5^2 \cdot 3{,}1416}{4} \cdot 20 = 392{,}7$ kg.

5. 1) $1{,}2 \cdot 2{,}5 = 3$ kg.
2) $3 \cdot 2{,}8 = 8{,}4$ kg.

6. Bodendruck $= 132 \cdot 40 = 5{,}280$ kg. Gewicht des Wassers $= \frac{40}{3}$ $(132 + \sqrt{132 \cdot 88} + 88) = 4{,}373$ kg. Bodendruck — Gewicht $= 0{,}907$ kg.
7. $5{,}28 \cdot 13{,}6 = 71{,}788$ kg.
8. $6 \cdot 8 \cdot {}^8/_2 = 192$ kg.
9. Der Druck auf den Boden ist $= 5 \cdot 3 \cdot 8 = 120$ kg, der auf jede der breiteren Seitenwände $= 5 \cdot 8 \cdot {}^8/_2 = 160$ kg, auf jede der schmäleren $= 3 \cdot 8 \cdot {}^8/_2 = 96$ kg.
10. Das Wasser wird gar keinen Druck auf das Gefäß verursachen.
11. $1{,}6 \cdot 100 = 160$ g.
12. Der Schwerpunkt der gedrückten Fläche liegt 1,5 m unter der Oberfläche des Wassers, also ist der gesuchte Druck $= 50 \cdot 40 \cdot 15 = 30\,000$ kg $= 600$ Zentner.
13. Die Höhe des Wassers ist $= \sqrt{5^2 - 1} = 4{,}9$ dm, also ist der Bodendruck $= 4 \cdot 4{,}9 = 19{,}6$ kg. Der Schwerpunkt einer Seitenfläche liegt 2,222 dm . . . von der oberen Seite entfernt, woraus sich mittels der Proportion $5 : 4{,}9 = 2{,}222 \ldots : x$ die Entfernung des Schwerpunktes von der Oberfläche des Wassers $= 2{,}178$ dm ergiebt, daher der Druck auf die Seitenfläche, deren Inhalt $= 15$ qdm ist, $= 15 \cdot 2{,}178 = 32{,}67$ kg.
14. Der Schwerpunkt der inneren Kugelfläche ist 1 dm von der Oberfläche des Wassers entfernt, also der Druck des Wassers $= \frac{4^2 \cdot 3{,}14}{2} \cdot 1$ $= 25{,}12$ kg. Das Gewicht des Wassers ist $= {}^2/_3 \cdot 2^3 \cdot 3{,}14 = 16{,}75$ kg, also um 8,37 kg kleiner als der Druck des Wassers.
15. $2 \cdot 1{,}5 \cdot 4 = 120$ kg.
16. $Q = 0{,}25 \cdot (20 - 2) = 4{,}5$ kg.
17. $P = \frac{3^2 \cdot \pi}{4} \cdot 20 = 141{,}37$ kg.
18. Aus $5 \cdot 8 \cdot x - 4 \cdot 5 \cdot x = 20 \cdot (10 - x)$ folgt $x = 5$ dm.
19. Eine $4 \cdot 13{,}6$ cm hohe Wassersäule.
20. $Q = \frac{P \cdot L \cdot D^2}{l \cdot d^2} = \frac{11 \cdot 36 \cdot 9^2}{9 \cdot 1^2} = 3564$ kg.
21. $d = \sqrt{\frac{20 \cdot 10^2 \cdot 4}{2000 \cdot 1}} = 2$ cm.
22. Das Grundwasser braucht längere Zeit, um durch die Erde hindurchzusickern, der höchste Stand des Wassers im Flusse bei seiner Anschwellung tritt aber gewöhnlich bald ein und dauert nur kurze Zeit.
23. Aus $h_1 : h_2 = d_2 : d_1$ oder $24 : h_2 = 1 : 1{,}3$ folgt $h_2 = 31{,}2$ mm.

Auflösungen zu XIV.

1. $6 \cdot 7{,}21 = 43{,}26$ g.
2. Aus $x \cdot 8 = 2{,}4$ folgt $x = 0{,}3$ cdm.
3. Aus $x \cdot 19{,}36 \cdot 1{,}125$ folgt $x = 0{,}05811$ cdm.
4. $8 - \frac{8}{11{,}4} = 7{,}3$ kg.
5. $0{,}031 \cdot 1000 \cdot 2{,}5 - 31 = 46{,}5$ kg.
6. 3 ccm.
7. $^1/_3 \cdot 36 = 12$ kg.
8. Aus $6 \cdot 4 \cdot x = 30$ folgt $x = 1{,}25$ dm.
9. Aus $2 \cdot 1{,}5 \cdot x = 2$ folgt $x = 0{,}66 \ldots$ dm.
10. Ist x Kubikfuß das Volumen des verdrängten Wassers, so ist das Volumen der gesamten Eismasse $= 160\,000\,000 + x$ Kubikfuß, und diese Eismasse wiegt gerade soviel, wie die x Kubikfuß Wasser. Nimmt man das Gewicht eines Kubikfußes Wasser $= 1$ an, so ist das Gewicht eines Kubikfußes Eis $= {}^9/_{10}$, und $160\,000\,000 + x$ Kubikfuß Eis wiegen ${}^9/_{10}\,(160\,000\,000 + x)$ dieser Gewichtseinheiten, folglich muß $x = {}^9/_{10}\,(160\,000\,000 + x)$, also $x = 1440$ Millionen Kubikfuß sein.

   Oder: Die spezifischen Gewichte des Wassers und des Eises verhalten sich wie 10 : 9. Bei gleichem absoluten Gewicht zweier Körper verhalten sich aber ihre Volumina umgekehrt wie ihre spezifischen Gewichte, also $(160\,000\,000 + x) : x = 10 : 9$.
11. $30 - 0{,}6 \cdot 30 = 12$ kg.
12. $20 \cdot 1{,}2 \cdot 1000 - 20 \cdot 150 = 21\,000$ kg.
13. a) $G = V \cdot s \cdot \gamma$. b) $\frac{G}{s}$.
14. a) Ist x das Gewicht des Bleies, y das des Korkholzes, beide Zahlen auf dieselbe Gewichtseinheit bezogen, so ist (nach 13):

    $\frac{x}{11{,}35}$ das Gewicht des Wassers vom Rauminhalte des Bleies,

    $\frac{y}{0{,}24}$ „ „ „ „ „ „ „ Korkholzes.

    Der Aufgabe gemäß muß aber das Gewicht der beiden verbundenen Körper der Summe dieser beiden Wassergewichte gleich sein,

d. h. $x + y = \frac{x}{11{,}35} + \frac{y}{0{,}24}$,

woraus $\frac{x}{y} = \frac{11{,}35\ (1 - 0{,}24)}{0{,}24\ (11{,}35 - 1)} = 3{,}4726$ folgt,

d. h. das Gewicht des Bleies muß 3,4726mal so groß sein, wie das des Korkholzes.

b) Nach voriger Auflösung 3,4726 kg.

15. 1 cdm des Menschen wiegt 1,1 kg, ein Mensch von 65 kg hat also ein Volumen von $\frac{65}{1{,}1} = 59{,}09$ cdm, er wiegt also im Wasser $65 - 59{,}09 = 5{,}91$ kg. Dieses Gewicht muß demnach vom Kork getragen werden. Nun wiegt aber ein Kubikdezimeter Kork 0,24 kg, er hat also einen Auftrieb von $1 - 0{,}24 = 0{,}76$ kg. Ist x das Volumen des erforderlichen Korkstückes, so muß also $x \,.\, 0{,}76 = 5{,}91$, folglich $x = 7{,}776$ cdm, also sein Gewicht $= 0{,}24 \,.\, 7{,}776 = 1{,}87$ kg sein.

16. Wenn man das Gewicht der Kubikeinheit Wasser mit γ bezeichnet, so ist das Gewicht der hohlen Kugel $= {}^4/_3\,\pi\,(R^3 - r^3)\,\gamma s$ und jenes der verdrängten Flüssigkeit, wenn die Kugel bis zur Hälfte eintaucht, $= {}^2/_3\,\pi\gamma R^3$. Aus der Gleichsetzung dieser beiden Werte folgt $R : r = \sqrt[3]{2s} : \sqrt[3]{2s - 1}$ oder, wegen $R = r + d$, $(r + d)\sqrt[3]{2s - 1} = r\sqrt[3]{2s}$, woraus für die gegebenen Werte von d und s folgt: $r = 56{,}8$ mm.

17. Das Gewicht der Holzkugel ist $= {}^4/_3\,r^3 \,.\, \pi \,.\, s \,.\, \gamma$, und ebensoviel muß das verdrängte Wasser wiegen. Das Volumen des eingesenkten Teiles der Kugel ist $= \frac{2r\pi h \,.\, r}{3} - \frac{(2r - h)\,h\pi \,.\, (r - h)}{3} = {}^1/_3\,\pi h^2\,(3r - h)$, wenn h die Höhe dieses Kugelabschnittes bezeichnet, also das Gewicht des verdrängten Wassers $= {}^1/_3\,\pi h^3\,(3r - h)\,\gamma$. Aus der Gleichsetzung dieser beiden Ausdrücke folgt nun, wenn man für r und s die Werte der Aufgabe setzt, die Gleichung $h^3 - 15\,h^2 + 200 = 0$ und daraus $h = 4{,}33$ dm.

18. Das Gewicht des Zinns sei $= x$, das des Bleies $= y$, so erhält man aus den beiden Gleichungen $x + y = 7$ und $137{,}15\,x + 88{,}09\,y = 812{,}87$, $\ldots$ $x = 4$, $y = 3$ kg.

19. Bezeichnet x das Gewicht des Goldes, y das des Silbers, so hat man (vergl. 14) die beiden Gleichungen

$$x + y = 20 \text{ und } \frac{x}{19{,}26} + \frac{y}{10{,}47} = 1{}^1/_4,$$

und daraus $x = 15{,}146$ Pfd., $y = 4{,}854$ Pfd.

20. Das Volumen des ersten Körpers ist $= \frac{Q}{s_1}$, das des zweiten $= \frac{x}{s_2}$, also das Volumen beider Körper $= \frac{Q}{s_1} + \frac{x}{s_2}$; anderseits ist dieses Volumen $= \frac{Q + x}{s}$, folglich hat man $\frac{Q}{s_1} + \frac{x}{s_2} = \frac{Q + x}{s}$, woraus $x = \frac{s_2\,(s_1 - s)}{s_1\,(s - s_2)}\,Q$ folgt.

21. Das Volumen des Menschen ist $\frac{Q}{1{,}1}$, das der angehängten Luft $\frac{x}{0{,}0013}$, also das Volumen beider Körper $\frac{Q}{1{,}1} + \frac{x}{0{,}0013}$; aber dieses Volumen kann auch dargestellt werden durch $\frac{Q+x}{0{,}6}$, also hat man $\frac{Q}{1{,}1} + \frac{x}{0{,}0013} = \frac{Q+x}{0{,}6}$, woraus $x = 0{,}01\ Q$ folgt.

Auflösungen zu XV.

1. Aus $G = V \,.\, s \,.\, \gamma$ folgt $s = \frac{G}{V \,.\, 8} = \frac{1{,}7}{0{,}08 \,.\, 1} = 21{,}25.$

2. $s = \frac{106}{40} = 2{,}65.$

3. $s = \frac{145{,}5}{10 \,.\, 1{,}07} = 13{,}6.$

4. a) Man bestimmt sein absolutes Gewicht G, sowie nach Aufgabe 6 in XIV. sein Volumen V, so hat man, wenn γ das Gewicht der Volumeneinheit Wasser bedeutet, $s = \frac{G}{V\gamma}$.

   b) Man bestimmt sein absolutes Gewicht G, füllt dann ein Glasgefäß, das sich mittels eines konisch eingeschliffenen Stöpsels dicht verschließen läßt (es ist gut, wenn der Stöpsel der Länge nach fein durchbohrt ist), mit Wasser, bestimmt das Gewicht P dieses mit Wasser gefüllten Gefäßes, bringt dann jenen Körper in dasselbe, schließt wieder, wischt alles abfließende Wasser sorgfältig ab und wägt abermals. Ist jetzt das Gewicht $= P_1$, so ist das Gewicht des verdrängten Wassers $= G + P - P_1$, folglich $s = \frac{G}{G + P - P_1}$.

5. $s = \frac{P}{P - P_1} = \frac{161{,}875}{62{,}5} = 2{,}59.$

6. Da das Gewicht des Körpers in der Luft $= P$, sein Gewicht im Wasser $= \varphi - p_1$ ist, so ist sein Gewichtsverlust im Wasser $= P - (\varphi - p_1)$, also das gesuchte spezifische Gewicht $s = \frac{P}{P + p_1 - \varphi}$.

7. $s = \frac{30}{30 + 110 - 15} = 0{,}24.$

8. $s = \frac{38 - 2}{22 - 2} = 1{,}8.$

9. Gewicht der 4 Drahtstücke . . . . . 1,613 g
„ des Gläschens mit Wasser . . . . . 31,981 „
Zusammen 33,594 g
Gewicht des Gläschens mit Wasser und Drähten . . . . 33,404 „
„ „ ausgeflossenen Wassers . . . . . 0,190 g.

Folglich das gesuchte spezifische Gewicht $= \frac{1{,}613}{0{,}190} = 8{,}4805.$

10. $s = \frac{60}{45} = 1\frac{1}{3}.$

11. $I = 6{,}57 - 0{,}63 = 5{,}94$ cdm.

12. Bezeichnen p_1, p_2, p_3 ... die Gewichtsverluste der betreffenden Bestandteile im Wasser, so hat man

$$s = \frac{G_1 + G_2 + G_3 + \cdots}{p_1 + p_2 + p_3 + \cdots}.$$

Nun ist $p_1 = \frac{G_1}{s_1}$, $p_2 = \frac{G_2}{s_2}$, $p_3 = \frac{G_3}{s_3} \cdots$,

folglich $s = \frac{G_1 + G_2 + G_3 + \cdots}{\frac{G_1}{s_1} + \frac{G_2}{s_2} + \frac{G_3}{s_3} + \cdots}$

$$= \frac{(G_1 + G_2 + G_3 + \cdots)\, s_1 s_2 s_3 \cdots}{G_1 s_2 s_3 + G_2 s_1 s_3 + G_3 s_1 s_2 + \cdots}.$$

Für nur zwei Bestandteile ist $s = \frac{(G_1 + G_2) s_1 s_2}{G_1 s_2 + G_2 s_1}.$

13. $s = \frac{1{,}8}{0{,}51} = 3{,}53.$

14. a) Der Gebrauch der Gewichtsaräometer beruht darauf, daß sich die spezifischen Gewichte ungleich dichter Flüssigkeiten zu einander verhalten, wie die absoluten Gewichte gleicher Volumina, oder, was dasselbe ist, wie die Gewichtsverluste, welche ein in sie versenkter Körper erleidet.

b) Der Gebrauch der Skalenaräometer beruht auf dem Satz, daß bei gleichem absoluten Gewicht zweier Körper ihre spezifischen Gewichte sich umgekehrt verhalten, wie ihre Volumina.

15. $s = \frac{56 + 1{,}1}{56 + 16} = 0{,}793.$

16. Da die Flüssigkeitsmengen, welche ein und dasselbe Volumeter beim Eintauchen in verschiedene Flüssigkeiten verdrängt, stets dasselbe absolute Gewicht haben, so ergiebt sich aus 14 b) für die erste Flüssigkeit $s : 1 = 100 : 56$, also $s = {}^{100}/_{56} = 1{,}786$, d. h. man erhält das spezifische Gewicht der Flüssigkeit, wenn man die Zahl, welche demjenigen Teilstriche entspricht, bis

zu welchem das Volumeter einsinkt, in 100 dividiert. Für die drei andern Flüssigkeiten erhält man beziehungsweise 1,25; 0,8; 0,714.

17. a) Um die Skala eines Volumeters für Flüssigkeiten, die spezifisch schwerer sind als Wasser, zu verfertigen, taucht man das vollkommen cylindrische, unten verschlossene Glasrohr zuerst in Wasser und bezeichnet den Punkt, bis zu welchem es einsinkt, welchem Punkt dann später der Volumetergrad 100 beigeschrieben wird. Alsdann taucht man es in eine dichtere Flüssigkeit von bekanntem spezifischen Gewicht und bemerkt gleichfalls den Einsenkungspunkt. Hat man als zweite Flüssigkeit z. B. konzentrierte Schwefelsäure von 1,85 spezifischem Gewicht genommen, so gehört (nach der vorhergegangenen Aufgabe) dieser Stelle der Volumetergrad $\frac{100}{1{,}85} = 54$ an, und der Raum zwischen den beiden bezeichneten Punkten muß in $100 - 54 = 46$ Teile geteilt werden, und diese Teilung kann nach Befinden auch noch über die Punkte fortgesetzt werden. Nimmt man als zweite Flüssigkeit eine Salzlösung von der Dichte $= 1{,}33$, so entspricht dem Einsenkungspunkt die Zahl $\frac{100}{1{,}33} = 75$, und man muß nun den Raum zwischen den beiden gefundenen Punkten in 25 gleiche Teile teilen. Diese Teilung wird gewöhnlich auf Papier aufgetragen, dieses dann in das oben offene Rohr hineingeschoben und so befestigt, daß die entsprechenden Striche der Teilung mit den beiden markierten Punkten des Rohres zusammenfallen; alsdann wird das Rohr auch oben zugeblasen.

b) Um ein Volumeter bloß für leichtere Flüssigkeiten als Wasser zu verfertigen, kann man als zweite Flüssigkeit Weingeist von bekannter Dichte benutzen und gerade wie vorher verfahren. Man kann aber auch die Teilung ohne eine zweite Flüssigkeit in folgender Weise vornehmen. Nachdem man den Einsenkungspunkt im reinen Wasser bestimmt hat, befestigt man am oberen Ende der Röhre ein Gewicht, welches den vierten Teil von dem des Instrumentes beträgt. Dadurch sinkt die Röhre tiefer, und das Gewicht oder Volumen des im zweiten Falle verdrängten Wassers verhält sich zu dem Gewicht oder Volumen des im ersten Falle verdrängten wie 125 zu 100. Den oberen Einsenkungspunkt bezeichnet man nun mit 125 und teilt den Abstand der beiden Punkte in 25 gleiche Teile u. s. w.

Auflösungen zu XVI.

1. $0{,}03 \cdot 20 \cdot 3600 = 2160 \text{ cdm} = 2{,}16 \text{ cbm}.$

2. $v = \frac{720}{0{,}03 \cdot 3600} = 6{,}66 \text{ dm}$ in der Sekunde.

3. $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2g} \cdot \sqrt{h} = 4{,}43 \cdot 3 = 13{,}29$ m. — Bei Quecksilber hat v dieselbe Größe wie bei Wasser.

4. Bezeichnet v die Ausflußgeschwindigkeit, so ist nach Aufgabe 4 $v = \sqrt{2gh}$; aber wenn x die Steighöhe bezeichnet, so muß auch $v = \sqrt{2gx}$ sein, folglich ist $x = h$, wobei aber die Reibungswiderstände und der Widerstand des zurückfallenden Wassers nicht berücksichtigt sind. Bei Beachtung dieser Widerstände ist die Druckhöhe noch mit einem Erfahrungskoeffizienten zu multiplizieren, den man bei nicht zu großen Druckhöhen $= 0{,}8$ annehmen kann.

5. Bezeichnet v die Ausflußgeschwindigkeit, so hat man (Aufgabe 16 in VI.)

$$x = \frac{v^2 \cdot (\sin 45^0)^2}{2g}, \quad g = \frac{v^2}{g} \sin (2 \cdot 45)^0,$$

oder, da im vorliegenden Falle $v^2 = 2gh$ ist,

$$x = \frac{2gh\,(\sqrt{1/2})^2}{2g} = \frac{h}{2}, \quad y = \frac{2gh}{g} = 2h.$$

6. Wegen der mit der Zeit zunehmenden Geschwindigkeit beim freien Falle müßte sich der Strahl, wenn keine Kohäsion der Wasserteilchen stattfände, in dünne Schichten zerteilen, die mit verschiedener Geschwindigkeit herabfielen; vermöge der Kohäsion der Wasserteilchen aber bleiben diese anfänglich noch im Zusammenhang, nur wird der Strahl immer dünner, bis er endlich in Tropfen zerfällt.

7. Dieselbe Kraft, welche der Kolben ausübt, kann man auch durch eine Wassersäule ausüben lassen, deren Gewicht bei 1 qcm Querschnitt $= 0{,}5$ kg ist. Die Höhe dieser Wassersäule findet sich aber $= 5$ m, also ist die in Rechnung zu bringende Druckhöhe $= 0{,}6 + 5 = 5{,}6$ m, also $v = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 5{,}6} = 10{,}48$ m.

8. Bedeutet x die Höhe der Öffnung über dem Boden und y die Sprungweite, so ist $y^2 = 2 \cdot \frac{2gh}{g} x = 4hx = 4 \cdot 50 \cdot 30 = 6000$, also $y = 77{,}5$ cm. — Ebenso groß!

9. Die theoretische Wassermenge ist $= at\sqrt{2g} \cdot \sqrt{h} = 0{,}0003 \cdot 60 \cdot 4{,}43 \cdot 2 = 0{,}15948$ cbm, also, da hier nach Tabelle 10 des Anhangs der Ausflußkoeffizient $m = 0{,}62$ ist, die wirkliche Wassermenge $= 0{,}62 \cdot 0{,}15948 = 0{,}0988$ cbm.

10. Für diesen Fall ist wieder der Ausflußkoeffizient $m = 0{,}62$, also die wirkliche Wassermenge (für $g = 981$ cm)

$$V = m \cdot a \cdot t\sqrt{2gh} = 31\,270\,320 \text{ ccm} = 31{,}27 \text{ cbm}.$$

11. $1\,900\,000 = 0{,}82 \cdot 4 \cdot t \cdot \sqrt{1962 \cdot 121}$ (siehe Anhang 10), woraus $t = 1/3$ Stunde (ungefähr).

12. Nimmt man hier, weil nur an einer, nämlich an der oberen Seite Kontraktion stattfindet (aus Tabelle 10), $m = 0{,}7$, so erhält man

$$V = 0{,}7 \cdot 15 \cdot 45 \cdot \sqrt{1962 \cdot 200} = 0{,}296 \text{ cbm}.$$

13. Die mittlere theoretische Geschwindigkeit ist $= \frac{1}{2}\sqrt{2gh}$, folglich die wirkliche Ausflußmenge $= \frac{1}{2} mat\sqrt{2gh}$, wo $m = 0{,}62$, und da diese der vorhandenen Wassermenge Ah gleich sein muß, so hat man

$$\frac{1}{2} mat\sqrt{2gh} = Ah, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (I)$$

woraus $t = \dfrac{2 \cdot 130 \cdot 600}{0{,}62 \cdot 10\sqrt{2 \cdot 981 \cdot 130}} = 49{,}8$ Sekunden.

14. $t_1 = \dfrac{2A}{ma\sqrt{2g}}(\sqrt{h} - \sqrt{h_1}) = \dfrac{2 \cdot 600}{0{,}62 \cdot 10 \cdot 44{,}3}(\sqrt{130} - \sqrt{100})$
$= 6{,}1$ Sekunden.

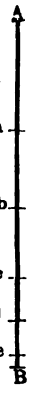
15. a) Aus der Formel (I) der Auflösung zu 13 folgt die Größe der Öffnung

$$a = \frac{2A\sqrt{h}}{mt\sqrt{2g}} = \frac{2 \cdot \frac{25}{4} \cdot 3{,}1416 \cdot 1}{0{,}62 \cdot 3600 \cdot 7{,}9} = 0{,}002227 \text{ Quadratzoll, woraus}$$

sich der Durchmesser dieser Öffnung $= 0{,}0532$ Zoll $= 0{,}638$ Linien ergiebt.

b) Behufs der Anfertigung der Skala ergiebt sich aus derselben Formel, daß sich bei einem und demselben Gefäß und derselben Ausflußmündung die Ausflußzeiten t und t_1 wie die Quadratwurzeln aus den Druckhöhen h und h_1 verhalten, oder $t^2 : t_1^2 = h : h_1$. Setzen wir hiernach der Aufgabe gemäß $t = 60$ Minuten, $t_1 = 10$ Minuten, sowie $h = AB = 12$ Zoll (Fig. 40), so findet man die Höhe $h_1 = eB = \dfrac{10^2 \cdot 12}{60^2} = \frac{1}{3}$ Zoll und ebenso $dB = \dfrac{20^2 \cdot 12}{60^2} = \frac{4}{3}$ Zoll, $cB = 3$ Zoll, $bB = 5\frac{1}{3}$ Zoll, $aB = 8\frac{1}{3}$ Zoll.

Fig. 40.



16. In diesem Falle müssen die Flächeninhalte (Q_1, Q_2) des sinkenden Wasserspiegels in demselben Verhältnis abnehmen, wie die Ausflußgeschwindigkeiten (v_1, v_2), also wie die Quadratwurzeln aus den Druckhöhen (h_1, h_2), d. h. es muß $Q_1 \cdot Q_2 = v_1 : v_2 = \sqrt{h_1} : \sqrt{h_2}$ sein, oder wenn D_1, D_2 die bezüglichen Durchmesser sind:

$$D_1 : D_2 = \sqrt[4]{h_1} : \sqrt[4]{h_2}.$$

17. Der erste genäherte Wert der Geschwindigkeit, also v_1, ist $= \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 4} = 8{,}86$ m, also $\sqrt{v_1} = 2{,}98$ m, folglich nach Substitution dieses Wertes in Gleichung (II.) der Aufgabe, $e = 0{,}0176$, und wenn man diese Zahl in Gleichung (I.) einsetzt, erhält man den mehr genäherten Wert der Geschwindigkeit

$$v_2 = \frac{8{,}86}{\sqrt{1 + 0{,}0176 \cdot \frac{20}{0{,}1}}} = 4{,}17, \text{ daher } \sqrt{v_2} = 2{,}04,$$

durch Substitution dieses Wertes in Gleichung (II.), $e = 0{,}01903$, und endlich daraus mittels der Gleichung (I.)

$$v = \frac{8{,}86}{\sqrt{1 + 0{,}01903 \cdot \frac{20}{0{,}1}}} = 4{,}04 \text{ m}.$$

Die in der Sekunde ausfließende Wassermenge ist gleich

$$\frac{\pi d^2}{4} \cdot v = \frac{3{,}1416 \,.\, (0{,}1)^2}{4} \cdot 4{,}04 = 0{,}03173 \text{ cbm} = 31{,}73 \text{ l}.$$

18. Jene Gesetze gelten in voller Strenge nur unter der Voraussetzung, daß die Körper ohne Reibungs- und Luftwiderstand fallen, beim fließenden Wasser wirkt aber insbesondere noch die Kohäsion der Wasserteilchen (vergl. 6), sowie die Adhäsion an die Wände des Flußbettes hemmend auf die Bewegung, so daß man die von der Schwerkraft herrührende Beschleunigung (die, wenn der Neigungswinkel des Flußbettes im Mittel α^0 beträgt, $g \sin \alpha$ ist) als von der Wirkung jener Molekularkräfte und anderer von Gegenströmungen des leicht beweglichen Wassers herrührenden Hindernissen aufgehoben betrachten muß.

Bei der technischen Verwendung der Wasserkraft muß man daher von der theoretischen Arbeitsfähigkeit des Wassers, wie man das Produkt Qh oder $\frac{1}{2}\frac{Q}{g}v^2$ nennt, die Nutzarbeit unterscheiden, welche immer kleiner ist und selten mehr als 70 Prozent des theoretischen Arbeitsvermögens beträgt.

19. Weil durch die (eigentlichen) Stöße nicht bloß an Wirkungs- oder Arbeitsfähigkeit verloren geht, sondern auch Abnutzung und Zerstörung der Maschinenteile bewirkt wird.

20. Die während einer Sekunde gegen die Fläche bewegte Wassermenge hat ein Volumen von $f \,.\, c$ Kubikeinheiten, ihr Gewicht ist also $= fc\gamma$ Gewichtseinheiten, wenn γ das Gewicht der Kubikeinheit Wasser bezeichnet, und ihre Masse kann durch die Zahl $\frac{fc\gamma}{g}$ ausgedrückt werden. Während des unendlich kleinen Zeitteilchens τ kommt also eine Wassermenge zum Stoß, deren Masse $= \frac{\tau fc\gamma}{g}$ ist. Da nun diese Masse mit einer Geschwindigkeit $= c$ zur Fläche gelangt, so kann man diese Wirkung einer bewegenden Kraft zuschreiben, welche der Masse $\frac{\tau fc\gamma}{g}$ während der Zeit τ die Geschwindigkeit c, also während einer Sekunde die Beschleunigung $\frac{c}{\tau}$ erteilt, folglich ist die Stoßkraft

$$P = \frac{\tau fc\gamma}{g} \cdot \frac{c}{\tau} = \frac{c^2 f\gamma}{g} = \frac{3^2 \,.\, 0{,}2 \,.\, 1000 \text{ kg}}{9{,}81} = 183{,}5 \text{ kg}.$$

21. Der hydraulische Druck ist doppelt so groß wie der hydrostatische, denn während der erstere $= \frac{c^2}{g} f\gamma = 2hf\gamma$, ist der letztere $= hf\gamma$.

22. Da in diesem Falle während einer Sekunde nicht cf Kubikmeter, sondern nur $(c-v)f$ Kubikmeter Wasser mit einer Geschwindigkeit von $c-v$ Meter gegen die Fläche stoßen, so hat man

$$\text{I. } P=(c-v)\frac{(c-v)f\gamma}{g}=\frac{(c-v)^2f\gamma}{g}=\frac{(3-2)^2\,.\,0{,}2\,.\,1000\,\text{kg}}{9{,}81}$$

$= 20{,}04$ kg.

Wenn aber, wie dies annähernd bei enggeschaufelten unterschlächtigen Mühlenrädern der Fall ist, kein Wasserteilchen ohne zu stoßen fortfließen könnte, weil die bewegliche Fläche jeden Augenblick durch eine andere mit jener in Verbindung stehende ersetzt würde, wenn also cf Kubikmeter Wasser zum Stoße gelangen, aber mit einer Geschwindigkeit von $c-v$ Meter die Fläche treffen würden, so würde man erhalten

$$\text{II. } P=(c-v)\frac{cf\gamma}{g}=(3-2)\cdot\frac{3\,.\,0{,}2\,.\,1000\,\text{kg}}{9{,}81}=60{,}12\text{ kg}.$$

Dagegen darf für den Stoß im unbegrenzten Wasser, wie bei Schiffmühlen, den Beobachtungen gemäß, nur ungefähr die Hälfte des vorigen Wertes für P genommen werden, was zum Teil dadurch erklärt wird, daß in diesem Falle nicht alles Wasser, das gegen die Schaufeln anrückt, nach dem Stoße die Geschwindigkeit der Schaufeln annimmt, sondern zur Seite weicht.

23. Da in jeder Sekunde cf Volumeneinheiten Wasser mit der Geschwindigkeit $c-\frac{1}{2}c$ zum Stoße gelangen, so hat man nach Formel II. der vorigen Auflösung die Stoßkraft $P=\left(c-\frac{1}{2}c\right)\frac{cf\gamma}{g}=\frac{1}{2}c\,\frac{V\gamma}{g}$, wenn $cf=V$ gesetzt wird, folglich die Leistungsfähigkeit in der Sekunde $L=P\cdot\frac{1}{2}c$ $=\frac{1}{4}c^2\frac{V\gamma}{g}=\frac{1}{2}\frac{c^2}{2g}V\gamma$ oder, da $\frac{c^2}{2g}=h$, d. h. die Druckhöhe des Wassers ist, $L=\frac{1}{2}h\,.\,V\gamma$ Meterkilogr. Die Einsetzung der numerischen Werte der Aufgabe ergiebt $L=391{,}44$ mkg.

24. Aus der Formel II. der Auflösung zu Aufgabe 22 und Beachtung der darauf folgenden Bemerkung erhält man, da hier $f=3\,.\,8$ ist,

$$P=\frac{1{,}5-0{,}75}{2}\cdot\frac{1{,}5\,.\,(1\,.\,2{,}5)\,.\,1000}{9{,}81}=143\text{ kg}.$$

$$L=P\,.\,0{,}75=107{,}25\text{ mkg}.$$

25. Wir wollen bei Lösung der Aufgabe sogleich von dem (übrigens nicht schwer zu beweisenden) Satze ausgehen, daß das Gewicht des wasserhaltenden Ringstückes das Rad ebenso zu drehen strebt, als wenn am Ende des mittleren Halbmessers r ein vertikales Wasserprisma angebracht wäre, dessen Querschnitt gleich dem Querschnitt des wasserhaltenden Ringstückes und dessen Höhe der vertikalen Höhe des Ringstückes, oder genauer der Sehne des mittleren Kreisbogens

gleich ist. Da nun während jeder Sekunde das Wasservolumen V in die Zellen fällt und jeder Punkt des mittleren Bogens die Geschwindigkeit c hat, so muß, wenn a den Querschnitt des wasserhaltenden Ringstückes bezeichnet, $ac = V$, also $a = \frac{V}{c}$ sein, folglich ist, nach dem obigen Satze, wenn noch γ das Gewicht der Volumeneinheit Wasser bezeichnet, das an dem horizontalen mittleren Halbmesser r wirkende Gewicht $Q = ha\gamma = h \cdot \frac{V}{c} \cdot \gamma$, demnach die Leistungsfähigkeit des Rades in der Sekunde

$$L = c \,.\, h \cdot \frac{V}{c} \cdot \gamma = hV\gamma = h \,.\, Q.$$

26. Wenn m den Ausflußkoeffizienten bezeichnet, so ist bei ruhendem Rade die Ausflußgeschwindigkeit $= m\sqrt{2gh}$ (Aufgabe 10); beginnt aber das Rad seine Bewegung, so entwickelt sich im Wasser der hohlen Radarme eine Zentrifugalkraft, die das Wasser schneller aus den Ausflußöffnungen treibt und zunimmt, bis die Bewegungshindernisse dynamisches Gleichgewicht erzeugt und die Ausflußöffnungen die konstante Geschwindigkeit c erlangt haben. Wir wollen uns indessen hier mit einem nur angenähert richtigen Resultat begnügen und den Einfluß der Zentrifugalkraft, dagegen aber auch den die Ausflußgeschwindigkeit vermindernden Koeffizienten m außer acht lassen*). Hiernach geht während einer Sekunde durch das Rad und strömt aus den Ausflußöffnungen das Wasservolumen $a\sqrt{2gh} = V$.

Die Ausflußöffnungen haben aber der Aufgabe zufolge eine der Ausflußgeschwindigkeit $\sqrt{2gh}$ entgegengesetzt gerichtete Geschwindigkeit c, folglich ist die absolute Ausflußgeschwindigkeit $= \sqrt{2gh} - c$; das während einer Sekunde ausfließende Wasservolumen V oder, wenn γ das Gewicht der Volumeneinheit bezeichnet, die Masse $\frac{V\gamma}{g}$, besitzt also eine lebendige Kraft oder ein Arbeitsvermögen

$$= \frac{1}{2}\frac{V\gamma}{g}(\sqrt{2gh} - c)^2.$$

Diese Arbeit ist aber offenbar in Beziehung auf die Nutzwirkung des Rades, das sich ja in einer der Ausflußgeschwindigkeit des Wassers entgegengesetzten Richtung bewegen soll, als Arbeitsverlust zu betrachten und muß daher von dem theoretischen Arbeitsvermögen $V\gamma h$ abgezogen werden, wodurch man die Nutzleistung

$$L = V\gamma h = \frac{1}{2}\frac{V\gamma}{g}(\sqrt{2gh} - c)^2$$

$$= \frac{V\gamma}{g}c(\sqrt{2gh} - c)$$

erhält, wobei aber die Reibungswiderstände noch nicht berücksichtigt sind.

*) Die Beachtung der Zentrifugalkraft würde eine Integration oder doch eine durch Substituierungen weitläufige Rechnung erfordern.

Auflösungen zu XVII.

1. a) $76 \times 13{,}59 = 1032{,}84\,\text{g} = 1{,}03284\,\text{kg}$.
   b) $28{,}98 \cdot 1{,}07184 \cdot 13{,}59$ Lot $= 14{,}07105$ Pfd.
2. a) $80 \cdot 60 \cdot 1{,}033 = 4958{,}4\,\text{kg}$.
   b) $(30/2)^2 \cdot 3{,}1416 \cdot 1{,}033 = 730{,}2\,\text{kg}$.
   c) $4 \cdot 3^2 \cdot 3{,}1416 \cdot 10330 = 1168298\,\text{kg}$.
3. Im ersten Falle $144 \cdot 14 \cdot 14{,}07 = 28365{,}12$ Pfd. bezw. 14462 kg, im zweiten $27/28 \cdot 28365{,}12 = 27352$ Pfd. bezw. 14350 kg.
4. $h = 28{,}98 \cdot 13{,}6$ Zoll $= 32{,}84$ Fuß oder 10,33 m.
5. $\frac{28{,}98 \cdot 13{,}6}{0{,}8}$ Zoll $= 41{,}05$ Fuß oder 12,890 m; $\frac{28{,}98 \cdot 13{,}6}{1{,}8}$ Zoll $= 18{,}24$ Fuß oder 5,727 m.
6. Mit einer Kraft von $50 \cdot 1{,}033 = 51{,}65\,\text{kg}$ wird die Platte durch die Luft ausgedrückt. Zieht man davon den Druck des Wassers, der $= 50 \cdot 13 = 650\,\text{g}$ ist, ab, so erhält man den wirksamen Druck, mit welchem die Platte, abgesehen von ihrem Gewicht, gegen den Rand des Glases gedrückt wird, $= 51\,\text{kg}$.
7. $\frac{45}{10{,}33} = 4{,}35$ Atmosphären.
8. 9,7 Atmosphärendrücke.
9. $776 \cdot 13{,}59 \cdot 773 = 7985\,\text{m}$ oder etwas mehr als eine geogr. Meile. Die so berechnete Höhe ist aber zu klein, weil die Dichte der Luft dem Mariotteschen Gesetz gemäß in demselben Verhältnis abnimmt, in welchem die Höhe zunimmt.
10. Es sei, der Erdhalbmesser als Einheit angenommen, x die Entfernung eines Punktes vom Mittelpunkte der Erde, in welchem die für ein Luftteilchen erforderliche Zentripetalkraft seiner Schwerkraft gleich ist, so hat man, da die Zentripetalbeschleunigung am Äquator an der Oberfläche der Erde nach Aufg. 10 in VII. $= 0{,}0339$ m, im vorliegenden Falle also $x \cdot 0{,}0339$ m beträgt, die Beschleunigung der Schwere in jenem Punkte aber $\frac{9{,}81}{x^2}$ m ist, $x \cdot 0{,}0339 = \frac{9{,}81}{x^2}$ und daraus $x = 6{,}6$, folglich ist die gesuchte Höhe $= 5{,}6$ Erdhalbmesser.
11. Quecksilber ist $773 \cdot 13{,}59 = 10505$mal so dicht wie die Luft von der Temperatur 0^0 und bei dem Barometerstande von 760 mm, eine Quecksilbersäule von einem Millimeter Höhe wird also einer 10505mal so hohen Luftsäule, d. h. einer Luftsäule von 10,5 m das Gleichgewicht halten.

12. Denkt man sich die Atmosphäre in parallele Schichten von solcher Höhe geteilt, daß jede für sich einer Quecksilbersäule von einem Millimeter das Gleichgewicht hält, so ruhen auf der untersten Luftschicht, die also 10,5 m hoch ist, 759 solcher Schichten von gleichem Druck, auf der folgenden 758 ꝛc. Aus dem Mariotteschen Gesetz folgt aber, wenn x_2, x_3 u. s. w. die Höhen der zweiten, dritten u. s. w. Luftschicht bezeichnen,

$$x_2 : 10{,}5 = 760 : 759, \text{ also } x_2 = \frac{760 \cdot 10{,}5}{759} = 10{,}514 \text{ m}.$$

$$\text{Ebenso erhält man } x_3 = \frac{760 \cdot 10{,}5}{758} = 10{,}528 \text{ m},$$

$$x_4 = \frac{760 \cdot 10{,}5}{757} = 10{,}541 \text{ m}$$

u. s. w. Wäre also die Temperatur in allen Höhen dieselbe, so müßte man steigen:

10,5 + 10,514 = 21,014 m, damit das Barometer um 2 mm falle,
21,041 + 10,528 = 31,542 „ „ „ „ „ 3 „ „
31,542 + 10,541 = 42,083 „ „ „ „ „ 4 „ „

13. Aus $(x + 76 - 12) : 76 = 24 : 12$ folgt $76 + 12 = 88$ cm.

14. Bezeichnet x die Quecksilberhöhe im kurzen Schenkel, so ist der Druck auf die in diesem Schenkel befindliche Luft $= 76 + 60 - x$ cm, man hat also nach dem Mariotteschen Gesetz die Proportion $76 : (76 + 60 - x) = (24 - x) : 24$ oder $x^2 - 160\,x + 1440 = 0$, folglich $x = 9{,}6$ cm. Das Volumen der Luft im verschlossenen Schenkel beträgt also im vorliegenden Falle $\frac{24 - 9{,}6}{24} = 0{,}66$ des ursprünglichen Volumens.

15. Aus der Gleichung $l : (L - x) = (B - x) : B$ folgt nach Einsetzung der gegebenen Werte $x^2 - 174\,x + 5160 = 0$, und daraus $x = 38$ cm; es nimmt also die Luft einen Raum von $98 - 38 = 60$ cm, d. h. den doppelten Raum wie vorher ein.

16. Aus den beiden Gleichungen $l : y = (B - x) : B$ und $x + y = l_1$ folgt:

$$x = \tfrac{1}{2}(l_1 + B) - \sqrt{lB + \tfrac{1}{4}(B - l_1)^2} = 27{,}7 \text{ cm},$$
$$y = \tfrac{1}{2}(l_1 - B) + \sqrt{lB + \tfrac{1}{4}(B - l_1)^2} = 47{,}3 \text{ cm}.$$

In den besonderen Fällen:

a) wenn $l_1 = l$, wird $x = 0$, $y = l = l_1$;

b) wenn $l_1 = L$, so fällt die Aufgabe mit der vorigen zusammen und man erhält $x = 38$, $y = 60$ cm;

c) wenn $l_1 = B$, so wird $x = B - \sqrt{Bl}$, $y = \sqrt{Bl}$, d. h. die Länge der Luftsäule im Glasrohre ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen Barometerhöhe und der anfänglichen Länge der Luftsäule.

17. Aus $l : nl = (B - x) : B$ folgt $x = \frac{B(n-1)}{n} = 506\frac{2}{3}$ mm, also $l_1 = x + nl = 506\frac{2}{3} + 240 = 746\frac{2}{3}$ mm.

18. Aus $V : V_1 = B_1 : B$ folgt $V_1 = \frac{V \cdot B}{B_1} = \frac{2 \cdot 72}{76} = 1{,}89$ Liter.

19. Aus $V : 1{,}9 = (725 - 5) : 760$ folgt $V = 1{,}8$ Liter.

20. Nach dem Mariotteschen Gesetze verhalten sich die Druckkräfte, welche auf gleiche Gasmengen wirken, umgekehrt, wie die Volumina, die diese einnehmen, also direkt, wie die Dichten derselben, woraus folgt, daß sich die Barometerhöhen in den verschiedenen Luftschichten wie die Dichten dieser Schichten verhalten. Denkt man sich nun eine Luftsäule in parallele Schichten von gleichen, aber so geringen Höhen geteilt, daß innerhalb jeder derselben die Dichte als gleichförmig betrachtet werden kann, und bezeichnet man die Dichten der aufeinander folgenden Schichten mit d_1, d_2, d_3 . . ., die der Expansivkraft derselben entsprechenden Barometerstände mit b_1, b_2, b_3 . . ., sowie ihre absoluten Gewichte mit q_1, q_2, q_3 . . ., so hat man

$$b_1 : b_2 = d_1 : d_2;\ b_2 : b_3 = d_2 : d_3 \text{ u. s. w.,}$$

also auch, weil wegen der Gleichheit der Luftvolumina sich verhält

$$d_1 : d_2 = q_1 : q_2;\ d_2 : d_3 = q_2 : q_3 \text{ u. s. w.,}$$
$$b_1 : b_2 = q_1 : q_2;\ b_2 : b_3 = q_2 : q_3 \text{ u. s. w.}$$

Denken wir uns nun die Luftsäule von demselben Durchmesser, wie die Quecksilbersäule im Barometer, so ist

q_1 = dem Gewichte der Quecksilbersäule $b_1 - b_2$,

q_2 = „ „ „ „ $b_2 - b_3$ u. s. w.,

also $b_1 : b_2 = (b_1 - b_2) : (b_2 - b_3)$; $b_2 : b_3 = (b_2 - b_3) : (b_3 - b_4)$ u. s. w., folglich nach arithmetischen Gesetzen

$$b_1 : b_2 = b_2 : b_3;\ b_2 : b_3 = b_3 : b_4 \text{ u. s. w.,}$$

d. h. die Glieder b_1, b_2, b_3, b_4 . . . bilden eine geometrische Reihe, während die Höhen immer um 1 fortschreiten, also eine arithmetische Reihe bilden.

Da nun in einer geometrischen Reihe alle gleichweit voneinander abstehenden Glieder selbst wieder eine geometrische Reihe bilden, so gilt das Gesetz auch für beliebig große, aber gleiche Höhenzunahmen.

21. Der vorhergehenden Aufgabe gemäß bilden diese Barometerstände die Glieder einer geometrischen Reihe, deren erstes Glied $= 760$ und deren zweites Glied 759, deren Exponent also $\frac{759}{760}$, so daß die Reihe selbst ist:

$$760,\quad 760 \cdot \frac{759}{760},\quad 760 \left(\frac{759}{760}\right)^2 \cdots 760 \left(\frac{759}{760}\right)^n.$$

22. Aus $760 \left(\frac{759}{760}\right)^n = 720$ folgt:

$$n = \frac{log\ 760 - log\ 720}{log\ 760 - log\ 759},$$

also $H = n \cdot 10{,}5 = \frac{10{,}5}{log\ 760 - log\ 759} (log\ 760 - log\ 720).$

Nun ist $\frac{10{,}5}{log\ 760 - log\ 759} = 18400$ m, also

$$H = 18400\ .\ (log\ 760 - log\ 720) = 432{,}4\ \text{m}.$$

23. Aus der vorigen Aufgabe folgt:

$$H = 18400\ (log\ 760 - log\ {}^1/_{50}) = 84320\ \text{m} = 11{,}4\ \text{Meilen}.$$

24. Aus $760\left(\frac{759}{760}\right)^m = B$ und $760\left(\frac{735}{760}\right)^n = b$ folgt

$$n - m = \frac{log\ B - log\ b}{log\ 760 - log\ 759},$$

also $H = (n - m)\ .\ 10{,}5 = 18400\ .\ (log\ B - log\ b)$.

Diese Gleichung, in Pariser Fuß und unter Zugrundelegung eines normalen Barometerstandes von 28 Par. Zoll, ist zuerst von Tobias Mayer in der Form $H = 60000\ (log\ B - log\ b)$ Par. Fuß aufgestellt worden (statt 60000 ist richtiger 56154 zu nehmen). Deluc, nach welchem diese Formel gewöhnlich benannt wird, hat durch Erfahrung gefunden, daß sie nur bei 17° R. ein ziemlich genaues Resultat giebt, und hat überhaupt zuerst auf die Notwendigkeit aufmerksam gemacht, bei Höhenmessungen auch die Verschiedenheit der Temperatur zu berücksichtigen.

25. Aus der Formel ergiebt sich folgende Rechnung mit Hilfe einer fünfstelligen Logarithmentafel:

Man hat im vorliegenden Falle $C = 56588$

$$399 + T + t = 417{,}5$$

$log\ B = 1{,}43409 - 0{,}00153$
$log\ b = 1{,}29765 - 0{,}00032$

wodurch nach Auflösung b, der Aufgabe 23 in XX. (darin B und b statt x gesetzt) die beobachteten Barometerstände auf 0° R. reduziert sind.

$log\ B - log\ b = 0{,}13644 - 0{,}00121 = 0{,}13523.$

Nun ist $log\ C = 4{,}75272$
$log\ (339 + T + t) = 2{,}62066$
$compl\ log\ 399 = 7{,}39903 - 10$
$log\ (log\ B - log\ b) = 9{,}13108 - 10$
$3{,}90349$

Korrektion wegen der geographischen Breite $\varphi \cdots + 8$*)

folglich $log\ H = 3{,}90357$

$H = 8009$ Par. Fuß.

*) Der Faktor $1 + 0{,}0026\ cos\ 2\varphi$ der Formel ist hinreichend berücksichtigt, wenn man für jeden Breitengrad über oder unter 45° von der Summe der Log. der übrigen Faktoren 0,00004 abzieht oder dazu addiert.

26. $H = 721{,}65$ Par. Fuß.

27. Der Wasserdampf der Atmosphäre übt in seiner Gasform gleichfalls einen Druck auf das Barometer aus, der sich also zu dem Druck der reinen atmosphärischen Luft addiert. Wird nun der Wasserdampf durch irgend eine Ursache verdichtet und geht in Regen über, so wird der Druck geringer und das Barometer muß fallen.

28. In der Regel sinkt das Barometer in einer Gegend, wenn diese Gegend wärmer wird, als die Umgebung, also die Luft über dieser Gegend ausgedehnt wird, aufsteigt und zum Teil oben nach den Seiten hin abfließt. Umgekehrt rührt das Steigen des Barometers in der Regel von dem Kälterwerden dieser Gegend her.

29. Nimmt man den Druck einer Quecksilbersäule von 760 mm Höhe auf das Quadratzentimeter $= 1{,}033$ kg an, so folgt aus $760 : (730 + 570) = 1{,}033 : x$ der Wert von $x = 1{,}767$ kg.

30. Mit ungefähr 3 Atmosphären.

31. Die Höhe der Quecksilbersäule, welche der Expansivkraft der Luft im Manometer entspricht, wenn das Quecksilber in demselben h Zoll hoch steht, findet sich dem Mariotteschen Gesetze gemäß

$$= \frac{l}{l - h} \cdot b,$$

also die Höhe der Quecksilbersäule, welche der Expansivkraft des Dampfes entspricht, $H = h + \frac{l}{l-h} \cdot b = 352 + \frac{677}{325} \cdot 760 = 1935$ mm,

folglich $D = \frac{1935}{760} \cdot 1{,}033 = 2{,}63$ kg.

32. In diesem Falle findet man (aus der vorigen Auflösung und aus Aufgabe 41 in XX.) die Höhe der Quecksilbersäule, welche der Expansivkraft der Luft im Manometer entspricht,

$$= \frac{l}{l - h} \cdot \frac{1 + 0{,}00367 \,.\, t_1}{1 + 0{,}00367 \,.\, t} \cdot b,$$

also, wenn man die Quecksilberhöhe, welche der Expansivkraft des Gases, womit das Manometer in Verbindung gebracht ist, mit H bezeichnet,

$$H = h + \frac{l}{l-h} \cdot \frac{1 + 0{,}00367\, t_1}{1 + 0{,}00367\, t} \cdot b$$

$$= 352 + \frac{677}{325} \cdot \frac{1 + 0{,}00367 \,.\, 21}{1 + 0{,}00367 \,.\, 10} \cdot 760 = 1997 \text{ mm}.$$

33. Bezeichnen $x_1, x_2 \ldots x_n$ die Luftdichten nach 1, 2, ... n Kolbenzügen, so hat man, da sich die Dichtigkeiten der Körper bei gleicher Masse umgekehrt wie ihre Volumina verhalten, nach dem ersten Kolbenzug

$$x_1 : d = b : (a + b), \text{ also } x_1 = \frac{b}{a+b} \cdot d.$$

Ebenso nach dem zweiten Kolbenzug

$$x_2 : x_1 = b : (a + b), \text{ also } x_2 = \frac{b}{a+b} \cdot x_1 = \left(\frac{b}{a+b}\right)^2 \cdot d,$$

und nach dem $n$ten Kolbenzuge $x_n = \left(\frac{b}{a+b}\right)^n \cdot d$. Für $d = 1$ wird $x_n = \left(\frac{b}{a+b}\right)^n$.

34. $x = \left(\frac{2{,}8}{0{,}7 + 2{,}8}\right)^8 = 0{,}8^8 = 0{,}1678.$

35. Bezeichnet x die Anzahl der Kolbenzüge, so folgt aus $^1/_{10} = \left(\frac{4}{5}\right)^n$ der Wert $x = \frac{log\ 10}{log\ 5 - log\ 4} = 10{,}3.$

36. Die Dichte der Luft unter dem Rezipienten verhält sich in diesem Falle zur Dichte der äußeren Luft, wie 5 : 755 oder wie 1 : 151, es hat also eine 151fache Luftverdünnung stattgefunden.

37. Wie (750 — 740) : 750, d. h. wie 1 : 75.

38. Es seien E und E_1 die (z. B. durch die Quecksilberhöhen eines mit dem Rezipienten in Verbindung stehenden Barometers gemessenen) Expansivkräfte der Luft im Rezipienten vor und nach dem ersten Kolbenzuge, so hat man $E : E_1 = (a + x) : x$, also $x = \frac{E_1}{E - E_1}\, a$. Zur Kontrolle kann man das Verfahren wiederholen.

39. Bezeichnen wieder E und E_1 die Expansivkraft der Luft im Rezipienten vor und nach dem ersten Kolbenzuge, so hat man

$$E : E_1 = (a + b + x) : (b + x),$$

$$\text{also } x = \frac{E_1 (a + b) - Eb}{E - E_1}.$$

40. Der Druck der Atmosphäre auf den Kolben beträgt $16 \cdot 1{,}033 = 16{,}528$ kg. Auf der andern Seite des Kolbens beträgt aber der Druck nur $\frac{4}{76} \cdot 16{,}528 = 0{,}87$ kg, der beim Aufziehen des Kolbens zu überwindende Druck ist also, die Reibung ungerechnet*), $16{,}528 - 0{,}87 = 15{,}658$ kg.

41. Der Kolben hat eine Durchschnittsfläche von 176 engl. Quadratzoll, also ist der auf ihn wirkende mittlere atmosphärische Druck $= 176 \cdot 14$ engl. Pfund, folglich der nach Abzug des Gegendruckes u. s. w. noch wirksame Druck $= {}^3/_5 \cdot 176 \cdot 14 = 1478$ Pfd., woraus

$$x = \frac{1478}{8} = 185 \text{ Tonnen folgt.}$$

42. Jede der beiden Halbkugeln wurde mit einer Kraft gegen die andere gedrückt, die sich ergiebt, wenn man 15 Pfd. mit dem Flächeninhalt des größten Kreises der Kugel, in Quadratzollen ausgedrückt, multipliziert, also mit $11^2 \cdot 3{,}1416 \cdot 15 = 5702$ Pfd.

43. Daß ein Körper in der Luft ebensoviel an Gewicht verliert, als die Luft wiegt, die er verdrängt.

---

*) Reibung des Kolbens siehe Aufgabe 6 in XI.

44. $\frac{q_1 - q_2}{4/3\, r^3 \pi} = \frac{3\,.\,(349{,}321 - 333{,}975)}{4\,.\,14{,}1^3\,.\,3{,}14159} = 0{,}001307$ g wiegt ein Kubikzentimeter, also 1,307 g ein Liter Luft (den genaueren Wert s. in Tabelle 5).

45. Bis zur Dichte $\frac{v}{V}\,d$.

46. Aus $d_1 : d = (B + nA)\,.\,B$ folgt

$$d_1 = \frac{B + nA}{B} \cdot d.$$

47. Es müssen noch $9\,.\,360 = 3240$ ccm von der anfänglichen Dichte in den Rezipienten gepumpt werden, und dies geschieht durch $\frac{3240}{120} = 27$ Kolbenstöße. $\left(n = \frac{B\,(d_1 - d)}{A\,d}.\right)$

48. Die ursprünglich in dem Kolben enthaltene Luft würde, wenn sie sich bis zur Dichte der Atmosphäre beim Barometerdruck $= 76$ cm ausdehnen könnte, ein Volumen von $8\,.\,400$ ccm einnehmen. Die aus dem Kolben ausgetretene Luft würde unter dem Drucke von 76 cm ein Volumen von $\frac{755}{760} \cdot 800$ ccm einnehmen, also würde die noch in dem Kolben gebliebene Luft unter dem Drucke von 76 cm einen Raum von $8 \cdot 400 - \frac{75}{76} \cdot 800$ $= 2495{,}3$ ccm einnehmen, folglich ist die Expansivkraft $\frac{2495{,}3}{400}$, d. h. 6,26mal so groß wie die Expansivkraft der Atmosphäre bei einem Barometerdruck von 76 cm.

49. Bis zu 32,84 Fuß oder 10,33 m Höhe (siehe Aufgabe 4); gewöhnlich wird aber das Saugrohr nur 3 bis 4 m oder 10 bis 14 Fuß lang gemacht, weil die Kolben nicht luftdicht schließen.

50. Bezeichnet H die Höhe einer Wassersäule, welche dem atmosphärischen Drucke das Gleichgewicht hält, und ist x die Entfernung des Kolbens von der Ausgußöffnung bei irgend einer Stellung desselben, y die Entfernung des Kolbens vom Wasserspiegel, also $x + y = h$ die Entfernung der Ausgußöffnung vom Wasserspiegel, so drückt auf den Kolben nach unten eine Wassersäule von der Höhe $H + x$, nach oben eine Wassersäule von der Höhe $H - y$, folglich ist der resultierende Druck auf den Kolben nach unten der einer Wassersäule vom Volumen $= a\,(H + x - H + y) = a(x + y)$ $= a\,.\,h$, also vom Gewicht $ah\gamma$, wenn γ das Gewicht einer Volumeinheit Wasser bezeichnet. Folglich ist $P = ah\gamma$ und $L = Pb = ah\gamma b$ für die Zeit eines Kolbenhubes. Diese nützliche Arbeit findet nur beim Aufsteigen des Kolbens, keine aber beim Niedersteigen statt.

51. Behalten wir die Bezeichnungen der vorhergehenden Auflösung bei, so drückt beim Aufziehen des Kolbens auf diesen nach unten eine Wassersäule von der Höhe H, nach oben von $H - y$, also nach unten ein Überschuß von y, folglich ist beim Aufziehen des Kolbens die bewegende Kraft $= ay\gamma$ und die Arbeit $= ay\gamma b$.

Beim Niedergehen des Kolbens ist die bewegende Kraft $= a x y$; also die Arbeit $a x y b$, folglich während eines vollständigen Wechsels der Pumpe die Arbeit $= a y b\,(x + y) = a h y b$.

52. Daß, abgesehen von Reibung und sonstigen Widerständen, die Arbeit der Pumpen dem Produkte gleich ist, das man erhält, wenn man das Gewicht ($a b y$) des während eines Kolbenhubes gehobenen Wassers mit der Höhe (h) der Ausflußmündung über dem Wasserspiegel multipliziert.

53. $60 \cdot 300 = 18\,000\,g = 18\,kg$ ist die Kraft, welche nötig sein würde, wenn keine Reibungs- und sonstige Widerstände zu überwinden wären. Gewöhnlich nimmt man an, daß bei gut konstruierten Pumpen $^1/_5$ der theoretischen Kraft zur Überwindung jener Widerstände hinreiche, also ist im vorliegenden Falle die wirklich anzuwendende Kraft $= 18 + 3{,}6 = 21{,}6\,kg$.

54. Die theoretische Arbeit ist $= 18 \cdot 0{,}5 \cdot 15 = 135\,mkg$, also die wirklich notwendige (vergl. vorhergehende Auflösung) $= 135 + \frac{1}{5} \cdot 135 = 162\,mkg$.

55. Die Wassermenge beträgt $\frac{60 \cdot 300}{1\,000\,000} \cdot 15 = 0{,}27\,cbm$. Dies mit 0,9 multipliziert, giebt 0,243 cbm.

Weil die Arbeit 162 mkg in der Minute beträgt, so ist der Effekt $\frac{162}{60} = 2{,}7$ Sekundenmeterkilogramm.

56. $P = Va - (V\alpha + Q) = V(a - \alpha) - Q$.

57. Aus $Va = V\alpha + Q$ folgt $V = \frac{Q}{a - \alpha}$; $V_1 = \frac{B}{B_1} \cdot \frac{Q}{a - \alpha}$.

58. Das Gewicht eines Kubikmeters atmosphärische Luft bei 0^0 C. und 0,76 m Barometerstand ist $= 1{,}293$ (Tabelle 5) oder annähernd 1,3 kg, also das Gewicht eines Kubikmeters Wasserstoff $= 1{,}3 \cdot 0{,}07$ (Tabelle 9, c) $= 0{,}09\,kg$, folglich nach Aufgabe 56:

$$P = 600\,(1{,}3 - 0{,}09) - 520 = 206\,kg.$$

59. Nimmt man das Gewicht eines Kubikmeters Luft $= 1{,}3\,kg$ und also das eines Kubikmeters Wasserstoff $= 1{,}3 \cdot 0{,}07 - 0{,}091\,kg$, so hat man (nach Aufg. 57) $\frac{d^3\pi}{6} = \frac{363}{1{,}3 - 0{,}091}$, also $d^3 = \frac{363 \cdot 6}{1{,}209 \cdot {}^{22}/_7} =$ nahe 573, folglich $d = 8{,}3\,m$, oder es muß vielmehr d größer als dieser Wert sein, da bei diesem der Ballon gerade nur schweben bleiben würde.

60. 1) Nehmen wir das Gewicht eines Kubikfußes Luft $= 0{,}08$ Pfd. an, so wog die durch den Ballon verdrängte atmosphärische Luft $^{27}/_{28} \cdot 10\,000 \cdot 0{,}08 = 771{,}4$ Pfd.

Der in dem Ballon enthaltene Wasserstoff wog hiernach $\frac{771{,}4}{5^1/_4} = 146{,}9$ Pfd., also war das Gewicht des mit Wasserstoff gefüllten Ballons nebst Zubehör $= 146{,}9 + 604{,}5 = 751{,}4$ Pfd., folglich die Steigkraft des Ballons $= 771{,}4 - 751{,}4 = 20$ Pfd.

2) Zur Auffindung der Höhe h, in welcher sich der Ballon ganz aufblähte, braucht man nur das Verhältnis der unteren und oberen Barometerstände B und b auszumitteln und dann die Mayersche Formel (aus Auflösung zu 24) anzuwenden. Nun verhält sich der untere Barometerstand B zum oberen b, wie die entsprechenden Dichtigkeiten der atmosphärischen Luft, also auch wie die Dichten des Wasserstoffes im Ballon an der Erdoberfläche zu der in der Höhe h, oder umgekehrt wie das Volumen des Ballons an der Erdoberfläche zu dem in der Höhe h, d. h. es verhält sich

$$B : b = 1 : {}^{27}/_{28} \text{ oder } \frac{B}{b} = {}^{28}/_{27},$$

man hat demnach

$h = 60\,000\,(log\,28 - log\,27) = 60\,000\,.\,0{,}01551 = 930{,}6$ Par. Fuß.

Sollte der Ballon höher steigen, so mußte ein Teil des Wasserstoffes aus dem Ballon herausgelassen werden.

Auflösungen zu XVIII.

1. Bezeichnet h_1 die Höhe einer Luftsäule von der Dichte der eingeschlossenen Luft, welche denselben Druck ausübt, wie die Quecksilbersäule h des Manometers, sowie m den entsprechenden Kontraktionskoeffizienten (aus Tab. 10), so ist, h und h_1 in den Längeneinheiten von g vorausgesetzt,

$$v = m\sqrt{2gh_1}, \text{ oder, da } h_1 = h \cdot \frac{D}{h},$$

$$v = m\sqrt{2gh\frac{D}{d}}, \text{ und } M = av = am\sqrt{2gh\frac{D}{d}}.$$

2. Aus $x : 4 = \sqrt{900} \cdot \sqrt{400}$ folgt $x = 6$ cbm.

3. Die Dichte des Quecksilbers ist $D = 13{,}6$, die der Luft unter dem Drucke von $b + h$ Zentimeter (nach Aufgabe 67 in XX):

$$d = \frac{0{,}00129}{1 + 0{,}004\,t} \cdot \frac{b + h}{0{,}76}, \text{ beide auf die Dichte des Wassers bezogen,}$$

also nach Substitution der gegebenen Werte in die Formeln der Aufgabe 1 und nach angemessener Reduktion

$$\text{I. } v = 396{,}5\,.\,m\sqrt{h \cdot \frac{1 + 0{,}004\,.\,t}{b + h}} \text{ Meter.}$$

$$\text{II. } M = 396{,}5\,.\,am\sqrt{h\,.\,\frac{1 + 0{,}004\,.\,t}{b + h}} \text{ Kubikmeter.}$$

4. Setzt man in I. der vorhergegangenen Auflösung $b = 0$, $t = 10$, $m = 1$, so erhält man

$$v = 396{,}5\sqrt{1 + 0{,}04} = 404{,}4 \text{ m}.$$

5. Der vorhergehenden Auflösung gemäß muß die Geschwindigkeit nur größer als 404,4 m sein.

6. Die Ausflußgeschwindigkeiten der Gase verhalten sich direkt wie die Quadratwurzeln aus den Drücken, aber umgekehrt wie die Quadratwurzeln aus den Dichten. Da nun im vorliegenden Falle die Dichte ganz in demselben Verhältnisse sich ändert, wie der Druck (dem Mariotteschen Gesetze gemäß), so muß die Ausflußgeschwindigkeit dieselbe bleiben.

7. Die Wassersäule des Manometers von 0,05 m ist gleich geltend mit einer Quecksilbersäule von $\frac{0{,}05}{13{,}6} = 0{,}00368$ m. Man hat also in Formel II. der Auflösung zu 3 zu setzen: $h = 0{,}00368$, $b = 0{,}75$, $t = 15$, $a = \frac{(0{,}02)^2 \cdot \pi}{4} = 0{,}000314$, $m = 0{,}93$ (Tabelle 10 im Anhange), sowie den von d herrührenden Faktor unter dem Wurzelzeichen noch durch die Dichte des Leuchtgases, also durch 0,56 zu dividieren, und erhält dann $M = 0{,}011137$ cbm in der Sekunde, also fließen in der Stunde 40,092 cbm aus.

8. Die allgemeine Formel für die Ausflußmenge der atmosphärischen Luft durch Röhren ist nach d'Aubuissons Versuchen

$$M = 6189\sqrt{\frac{1 + 0{,}004 \cdot t}{b + h}} \cdot \sqrt{\frac{H\Delta^5}{L + 42\frac{\Delta^5}{\delta^4}}} \text{ Par. Kubikfuß},$$

wenn t die Temperatur, b den Barometerstand, h die Quecksilbersäule im Manometer nahe der Ausflußöffnung, H diejenige im Manometer am Gasometer, L die Röhrenlänge, Δ den Röhrendurchmesser und δ den Durchmesser der Ausflußöffnung bezeichnet.

Wenn $\delta = \Delta$, so muß man, Versuchen gemäß, in dieser Formel den Koeffizienten 6189 noch mit 0,989 multiplizieren, wodurch

$$M = 6121\sqrt{\frac{1 + 0{,}004 \cdot t}{b + h}} \cdot \sqrt{\frac{H\Delta^5}{L + 42\Delta}} \text{ wird.}$$

Setzt man für $\sqrt{\frac{1 + 0{,}004 \cdot t}{b + h}}$, welcher Ausdruck in den gewöhnlich vorkommenden Fällen nur wenig von dem Mittelwert 0,652 sich unterscheidet, diesen letzteren Wert, so erhält man

$$M = 3991\sqrt{\frac{H \cdot \Delta^5}{L + 42\Delta}},$$

also die Ausflußmenge eines Gases von der Dichte d:

$$M_1 = \frac{M}{\sqrt{d}} = 3991\sqrt{\frac{H \cdot \Delta^5}{(L + 42\Delta) \cdot d}}.$$

Setzen wir nun in dieser letzteren Formel $H = \frac{0{,}15}{13{,}6} = 0{,}01103$, $\Delta = 0{,}05$, $L = 400$ und $d = 0{,}56$, so erhalten wir $M_1 = 0{,}015615$ Kubikfuß in der Sekunde, also in der Stunde strömen 46,2 Kubikfuß aus.

9. Man kann den Schornstein als den einen Schenkel einer kommunizierenden Röhre betrachten, deren anderer Schenkel, der umgebende Luftraum, jenen einschließt. Die äußere Luftsäule von der Höhe H und der Temperatur t würde, wenn sie die Temperatur T der Luft im Schornstein hätte, eine Höhe $= \frac{H.(1 + aT)}{1 + at}$ haben, worin a den Ausdehnungskoeffizienten der Luft bezeichnet, folglich ist

$$\frac{H(1 + aT)}{1 + at} - H = \frac{Ha\,(T - t)}{1 + at}$$

die Höhe der Luftsäule, von welcher das Ausströmen der Luft aus dem Schornstein abhängt, also

$$v = \sqrt{2g\frac{Ha\,(T - t)}{1 + at}},$$

also im vorliegenden Falle

$$v = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot \frac{20\,.\,0{,}004\,.\,135}{1{,}06}} = 14{,}1\,\text{m}.$$

10. Die theoretische Ausflußmenge der warmen Luft ist $= f\,.\,v$, wenn f den Querschnittsinhalt des Schornsteins bezeichnet, die theoretische Einflußmenge der kalten Luft ist also $= fv\,\frac{1 + at}{1 + aT}$, oder, wenn man für v seinen Wert aus voriger Auflösung, sowie $a = {}^1/_{273}$ setzt,

$$M = f\sqrt{2g\frac{H(T - t)\,(273 + t)}{(273 + T)^2}}.$$

11. Die Geschwindigkeit des Zuges ist, wenn man den Reibungswiderstand unberücksichtigt läßt, der Quadratwurzel aus der senkrechten Höhe des Schornsteines proportional, sie nimmt aber, wie aus der Formel der vorhergehenden Auflösung hervorgeht, durch Temperaturerhöhung nur in einem abnehmenden Verhältnisse zu, so daß durch Erwärmung der inneren Luftsäule über eine gewisse Temperatur (ungefähr 273°) hinaus sogar eine Abnahme des Zuges entsteht.

Übrigens weiß man, daß die Luft im Schornsteine an den Wänden einen Widerstand erleidet, der dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist. Eine möglichst große Einflußgeschwindigkeit knüpft sich also an die Bedingung einer möglichst langsamen Bewegung im Schornsteine, welcher Bedingung hinreichend entsprochen wird, wenn der Querschnitt des Schornsteines an keiner Stelle weniger beträgt, als der Flächeninhalt der Roströffnungen zusammengenommen.

12. Da hier $H = L = 14$, $D = 0{,}5$, $T - t = 136{,}5$, $k = 8{,}85$, $k_1 = 4$, so ist $v = 5{,}85$ m. Dagegen würde man nach der Formel in Auflösung zu 9 finden $v = 11{,}7$ m.

13. Durch ähnliche Schlüsse wie in Auflösung zu 20 in XVI. ergiebt sich $P = \frac{c^2}{g} F \gamma_1$, wo γ_1 das Gewicht eines Kubikmeters Luft, nämlich 1,293 kg (Tabelle 5), bezeichnet, also $P = \frac{10^2}{9{,}81} \cdot 18 \cdot 1{,}293 = 237$ kg.

14. Da der Widerstand der Luft gegen eine in ihr bewegte Fläche mit dem Quadrate der Geschwindigkeit dieser Fläche wächst, so würde der Widerstand gegen einen einzigen Waggon $= 8^2 . 1\frac{1}{2}$ Pfd. $= 96$ Pfd. sein, wozu, um den Luftwiderstand gegen alle 10 Waggons zu finden, noch $10 . \frac{1}{8} . 96 = 120$ Pfd. kommen, so daß also der gesamte Luftwiderstand $96 + 120 = 216$ Pfd. beträgt.

15. Der Widerstand der Luft gegen die beiden gleich schnellen Kugeln verhält sich (annäherungsweise) wie ihre Oberflächen, also wie die Quadrate ihrer Radien. Dagegen verhalten sich die Bewegungsgrößen, welche die beiden Kugeln bei ihrem Austritt aus den Gewehrläufen besitzen, weil ihre Geschwindigkeiten gleich sind, wie ihre Massen, also bei gleicher Materie wie die Kuben ihrer Radien. Daraus wird klar, daß die Geschwindigkeit der schwereren Kugel weniger durch den Widerstand der Luft leidet, daß also diese Kugel in der Zeit, in welcher sie nach dem Gesetze des Falles die Erde berühren muß, weiter geflogen ist, als die leichtere von gleicher Anfangsgeschwindigkeit.

Auflösungen zu XIX.

1. $40 . 332 = 13\,280$ m.

2. Von dem Augenblicke an, in welchem der erste Laut des Donners ins Ohr gelangt, wird nach jeder Sekunde ein anderer hörbar, der von einer um je 332 m weiter entfernten Stelle der Wolke herrührt. Demnach kann die Wolke höchstens eine Länge von $20 . 332$ m oder von beinahe einer Meile haben.

3. Die Entfernung AC des Anfangspunktes des Blitzes vom Beobachter ist $= 13 . 332 = 4316$ m, die Entfernung des Endpunktes oder $BC = (13 + 17) . 332 = 9960$ m. Daraus und aus dem Winkel $\omega = 36^0$ findet sich AB, d. h. die gesuchte Strecke $= 6970$ m beiläufig.

4. Es sei die Zeit, welche der Stein zum Durchfallen der Grube braucht, $= t$, so ist $^1/_2 g t^2 = 15 \,.\, t^2 = 150$ ($g = 9{,}81$ m), also

$$t = \sqrt{\frac{150}{4{,}905}} = 5{,}53 \text{ Sekunden.}$$

Die zur Zurücklegung des Schalles nötige Zeit ist $^{150}/_{332} = 0{,}45$ Sekunden; also ist die gesuchte Zeit $= 5{,}53 + 0{,}45 = 5{,}98$ Sekunden.

5. Ist x die Zeit, welche der Stein zum Hinunterfallen braucht, so ist $10 - x$ die Zeit, welche der Schall zum Heraufkommen nötig hat, und man erhält aus der Gleichung $\frac{9{,}81}{2} x^2 = 332\ (10 - x)$ den Wert von $x = 8{,}7$ Sekunden, also die Tiefe der Grube $= ^1/_2 g t^2 = 4{,}905 \,.\, (8{,}7)^2 = 372$ m.

6. $n = ^{332}/_{10} = 33$ (ungefähr).

7. $r = ^{1{,}3}/_{332} = ^1/_{256}$ (ungefähr).

8. Bezüglich $^{332}/_{16} = 20{,}75$ m, $^{332}/_{32768} = 1$ cm und $^{332}/_{36500} = 9$ mm (ugf.).

9. Da man der Erfahrung gemäß höchstens neun verschiedene Laute (Silben) in einer Sekunde voneinander unterscheiden kann, der Schall aber in der Sekunde einen Raum von 332 m zurücklegt, so müssen die beiden Schalle wenigstens $^{332}/_9 = 37$ m voneinander entfernt sein.

10. 18,5 m, wenn er nur eine, 2 . 18,5, wenn er zwei, 3 . 18,5 m, wenn er drei Silben wahrnehmen soll u. s. w.

11. $\frac{3 \,.\, 332}{2} = 996$ m.

12. Diejenige, daß die Harmonie der Töne eines Musikstückes durch die Entfernung nicht gestört wird.

13. Obgleich sich hohe und tiefe Töne gleich schnell fortpflanzen, so dringen doch die Schallwellen hoher Töne weiter in der Luft vor, weil die öfteren Oszillationen ihrer Teilchen kräftiger wirken. Tiefe Töne müssen stärker, d. h. die Oszillationen, durch welche sie erzeugt werden, weiter sein, wenn sie eben so weit dringen sollen wie hohe.

14. Weil nach dem Mariotteschen Gesetz die Expansivkraft der Luft in demselben Grade wie ihre Dichtigkeit wächst, also bei doppelter Dichtigkeit der Luft zwar doppelt soviel Masse zu bewegen, aber auch eine doppelt so große Kraft zu ihrer Bewegung wirksam ist. Durch Erhöhung der Temperatur wird aber die Expansivkraft der Luft größer und dies hat eine größere Geschwindigkeit des Schalles zur Folge (s. Tab. 11 im Anhange).

15. Geht der Schall aus dichterer Luft in dünnere von gleicher Temperatur über, so verursacht der Stoß jeder dichteren Luftschicht auf die folgende dünnere eine größere Vibrationsweite der letzteren, als die erstere besitzt, und durch diese wird die Verringerung der Luftmasse in der Einwirkung auf das Ohr ersetzt. Geht umgekehrt der Schall aus dünnerer Luft in dichtere über, so wird die geringere Vibrationsweite der das Ohr treffenden Luftmenge durch ihre größere Dichte ersetzt. Daraus geht hervor, daß die Stärke des Schalles bei gleicher Temperatur abhängig ist von der Dichtigkeit der Luft, in welcher er erregt, nicht aber von der Dichtigkeit der Luft, in welcher er vernommen wird.

16. Der Schall wird (ähnlich wie das Licht) beim Übergange aus einem Mittel in ein anderes von verschiedener Dichte durch Reflexion stets geschwächt. So lange nun Champagnerschaum, also eine Mischung von Wein und Kohlensäure, im Glase sich befindet, werden die Schallschwingungen durch vielfache Reflexionen in dem Schaum geschwächt, was nicht mehr der Fall ist, wenn die Flüssigkeit gleichartig geworden.

17. Gesetzt, der Ton entstehe durch n Schwingungen in der Sekunde. Nähert sich ein Beobachter der Tonquelle mit einer Geschwindigkeit von v Meter (in der Sekunde), so nimmt sein Ohr in der Sekunde $n + x$ Wellenstöße auf, wenn x die Anzahl der Wellenlängen bedeutet, welche in einer Strecke von v Meter enthalten sind, und die sich aus der Proportion $332 : v = n : x$ findet; das Ohr empfängt also $n + \frac{n \cdot v}{332}$ Schwingungen in der Sekunde. Beim Entfernen von der Tonquelle mit derselben Geschwindigkeit wirken auf das Ohr nur $n - \frac{v \cdot n}{332}$ Schwingungen in der Sekunde.

18. Die Tonhöhe der Saite ist bei beliebiger Weite der Schwingungen die nämliche und bleibt dieselbe, wenn auch der Ton beim allmählichen Abnehmen der Ablenkung nach und nach schwächer wird.

19. Wie 3 : 2.

20. Wie $\sqrt{4} : \sqrt{9} = 2 : 3$, wie sich aus Aufgabe 23 ergiebt.

21. Wie $(2 \cdot 1{,}5) : (1{,}6 \cdot 1{,}25) = 3 : 2$.

22. $\frac{\sqrt{16}}{1} : \frac{\sqrt{9}}{0{,}75} = 1 : 1$, d. h. die Tonhöhen sind einander gleich.

23. Bezeichnet γ das Gewicht eines Kubikmeters Wasser, so ist

$$n = \frac{1}{l\,d}\sqrt{\frac{g\,P}{\pi s \gamma}} = \frac{1 \cdot 10^6}{1{,}2 \cdot 0{,}002}\sqrt{\frac{9{,}81 \cdot 6}{3{,}1416 \cdot 0{,}5 \cdot 1000}} = 81{,}2.$$

24. $n = {}^1/_2\sqrt{\frac{g\,P}{l\,p}}$ (welche Formel man aus der vorhergehenden erhält, wenn man p statt ${}^1/_4 d^2 \pi l s \gamma$ setzt)

$$= {}^1/_2\sqrt{\frac{31{,}25 \cdot 4}{9 \cdot \frac{0{,}5}{30}}} = 14{,}43$$

also $t = \frac{1}{n} = \frac{1}{14{,}43} = 0{,}069$ Sekunden.

25. Da die Saite $1\,g = 0{,}001\,kg$ wiegt, so hat man

$$n = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{9{,}81 \cdot 13{,}2}{0{,}75 \cdot 0{,}001}} = 209.$$

26. Aus der Formel zur Aufgabe 24 folgt

$$P = \frac{n^2 d^2 l^2 \pi s \gamma}{g} = \frac{400^2 \cdot 1{,}6^2 \cdot 0{,}0016^2 \cdot 3{,}1416 \cdot 8{,}4 \cdot 61{,}75}{31{,}25}$$

$= 54{,}69$ Pfd.

27. Da sich die Schwingungen zweier Stäbe allgemein verhalten wie $\frac{d_1}{l_1^2} : \frac{d_2}{l_2^2}$, im gegenwärtigen Falle die Schwingungen aber gleich sind, so hat man hier $\frac{9}{(1{,}5)^2} = \frac{4}{l_2^2}$, also $l_2 = 1$.

28. Der Ton *C* entspricht 2 . 32 = 64 Schwingungen,
„ „ *c* „ 2 . 64 = 128 „
„ „ *d* „ $^9/_8$. 128 = 144 „
„ „ *e* „ $^5/_4$. 128 = 160 „
„ „ *f* „ $^4/_3$. 128 = 170,66... „
„ „ *g* „ $^3/_2$ 128 = 192 „
„ „ *a* „ $^5/_3$. 128 = 213,33... „
„ „ *h* „ $^{15}/_8$. 128 = 240 „
„ „ $\overline{c}$ „ 2 . 128 = 256 „

29. In der *c-dur*-Tonleiter folgen auf den Grundton zwei ganze, dann ein halber, dann wieder drei ganze und zuletzt wieder ein halber, und um dieselbe Reihenfolge auch für den Grundton *g* zu erhalten, braucht man in der *c-dur*-Tonleiter nur den Ton *f* um einen halben Ton zu erhöhen, d. h. statt *f* den Ton *fis* zu setzen.

30. Für die *d-dur*-Tonleiter müssen *fis* und *cis*, für die *a-dur*-Tonleiter *fis*, *cis* und *gis* eingeschaltet werden.

31. *h-dur* mit den eingeschalteten Tönen *cis, dis, fis, gis* und *ais*.

32. Wenn man von *c* aus von der Linken nach der Rechten um je eine Quinte weiter schreitet, so ist die erste Quinte der Grundton derjenigen Tonart, welche ein Kreuz, die zweite Quinte der Grundton der Tonart, welche zwei Kreuze erhält u. s. w.

33. Um den Grundton der Tonart zu finden, in welcher 1, 2, 3 u. s. w. *b* vorgezeichnet sind, braucht man nur von *c* aus um je 1, 2, 3 u. s. w. Quarten von der Linken nach der Rechten, oder um soviel Quinten von der Rechten nach der Linken fortzuschreiten.

34. Die eingeschalteten Töne sind die kleiner geschriebenen der nachstehenden enharmonischen Tonleiter:

$$\mathrm{C}\ {}^{\mathrm{Cis}}_{\mathrm{Des}}\ \mathrm{D}\ {}^{\mathrm{Dis}}_{\mathrm{Es}}\ \mathrm{E}\ {}^{\mathrm{Eis}}_{\mathrm{Fes}}\ \mathrm{F}\ {}^{\mathrm{Fis}}_{\mathrm{Ges}}\ \mathrm{G}\ {}^{\mathrm{Gis}}_{\mathrm{As}}\ \mathrm{A}\ {}^{\mathrm{Ais}}_{\mathrm{B}}\ \mathrm{H}\ {}^{\mathrm{His}}_{\mathrm{Ces}}\ \mathrm{c},$$

von welchen die untereinander geschriebenen Töne so wenig differieren, daß sie als zusammenfallend betrachtet werden können. Die Oktave der diatonischen Tonleiter enthält also 8, die der enharmonischen 22, die der chromatischen 13 Töne.

35. Bei der gleichschwebenden Temperatur werden die Oktaven rein erhalten, die Intervalle je zweier aufeinander folgenden Töne der chromatischen Tonleiter aber als gleich angenommen, also, wenn *c, cis, d dis, e* u. s. w. die Schwingungszahlen der entsprechenden Töne bezeichnen,

$$\frac{cis}{c} = \frac{d}{cis} = \frac{dis}{d} = \frac{e}{dis} = \frac{f}{e} = \ldots = \frac{h}{ais} = \frac{\overline{c}}{h}.$$

Bezeichnet i eins dieser zwölf gleichen Intervalle, also das Intervall eines halben Tones, so ergiebt sich

$$cis = i \,.\, c; \quad d = i \,.\, cis = i^2 \,.\, c; \quad dis = i \,.\, d = i^3 \,.\, c \ldots;$$
$$h = i \,.\, ais = i^{11} \,.\, c; \quad \overline{c} = i \,.\, h = i^{12} \,.\, c,$$

also ist, wenn $c = 1$ gesetzt wird, $\overline{c} = 2 = i^{12}$, folglich

$$i = \sqrt[12]{2} = 1{,}059463,$$

woraus sich die nachfolgenden Intervalle ergeben:

Name des Tones	Reines Intervall	Gleichschwebend temperiertes Intervall
. . . .	1	= 1
cis	$^{25}/_{24} = 1{,}04166$	. . . $i^1 = 1{,}05946$
des	$^{27}/_{25} = 1{,}08000$	
d	$^{9}/_{8} = 1{,}12500$	. . . $i^2 = 1{,}12246$
dis	$^{75}/_{64} = 1{,}17187$	. . . $i^3 = 1{,}18921$
es	$^{6}/_{5} = 1{,}20000$	
e	$^{5}/_{4} = 1{,}25000$	. . . $i^4 = 1{,}25992$
fes	$^{32}/_{25} = 1{,}28000$	
eis	$^{125}/_{96} = 1{,}30208$	. . . $i^5 = 1{,}33484$
f	$^{4}/_{3} = 1{,}33333$	
fis	$^{25}/_{18} = 1{,}38889$	. . . $i^6 = 1{,}41421$
ges	$^{36}/_{25} = 1{,}44000$	
g	$^{3}/_{2} = 1{,}50000$	. . . $i^7 = 1{,}49831$
gis	$^{25}/_{16} = 1{,}56250$	. . . $i^8 = 1{,}58740$
as	$^{8}/_{5} = 1{,}60000$	
a	$^{5}/_{3} = 1{,}66666$	. . . $i^9 = 1{,}68179$
ais	$^{125}/_{72} = 1{,}73611$	. . . $i^{10} = 1{,}78180$
b	$^{9}/_{5} = 1{,}80000$	
h	$^{15}/_{8} = 1{,}87500$	. . . $i^{11} = 1{,}88775$
ces	$^{48}/_{25} = 1{,}92000$	
his	$^{125}/_{64} = 1{,}95313$	. . . $i^{12} = 2{,}00000$
$\overline{c}$	$2 = 2{,}00000$	

36. Man nennt Obertöne eines Tones diejenigen, deren Schwingungszahlen 2-, 3-, 4-, 5-, 6-, 7-, 8mal u. s. w. so groß sind wie die Schwingungszahl des Grundtones; von diesen sind aber nur die fünf ersten dem Grundton

harmonisch, die harmonischen Obertöne des Grundtones C sind also c, g, $\overline{c}$, $\overline{e}$ und $\overline{g}$.

37. Wenn man eine Klaviersaite in $^1/_7$ ihrer Länge anschlägt, so kann die Saite eine Schwingung ausführen, welche aus denjenigen zusammengesetzt ist, die sie macht, wenn sie als Ganzes, in zwei, drei, vier, fünf, sechs Teilen schwingt; daher sind in dem erzeugten Klange die sechs ersten Teiltöne vorhanden. Würde dagegen die Saite in ihrer Mitte angeschlagen, so müßten in dem Klange alle geradzahligen Obertöne fehlen, weil sie an der angeschlagenen Stelle einen Knotenpunkt haben, dessen Entstehung aber durch den Anschlag verhindert wird. Beim Anschlagen in $^1/_3$ der Saitenlänge würde der dritte und der sechste Oberton fehlen u. s. w.

38. Berührt man die Saite des Monochords, nachdem sie in $^1/_7$ ihrer Länge gerupft ist, in ihrer Mitte lose mit dem Finger oder einem feinen Pinsel, so werden dadurch die Töne der ganzen Saite sowie ihrer Drittel und Fünftel gedämpft und es bleiben nur noch die Töne der Hälften, Viertel und Sechstel der Saitenlänge bestehen, wovon der der Hälften, also die Oktave des Grundtones, am stärksten ins Ohr tritt. Bei Berührung der Saite in ihrem vierten Teil fällt auch noch die erste Oktave weg und es tritt die zweite Oktave am deutlichsten auf. Bei Berührung in $^1/_3$ der Saitenlänge ist wesentlich nur die Quinte der Oktave deutlich wahrnehmbar u. s. w.

39. Der gesuchte Ton liegt zwischen der vierten und fünften oberen Oktave von C, da die vierte Oktave $2^4 = 16$ mal und die fünfte $2^5 = 32$ mal soviel Schwingungen macht. Bezeichnet nun x das Intervall des gesuchten Tones in Beziehung auf die vierte Oktave von C, so muß $x \,.\, 16 = 24$ sein, woraus $x = {}^3/_2$ folgt; der gesuchte Ton ist also $\overline{\overline{g}}$.

40. Der gesuchte Ton ist höher, als die dritte untere Oktave von $\overline{\overline{c}}$, und niedriger als die zweite. Geht man also von der dritten unteren Oktave aus, die $^1/_8$ der Schwingungen von $\overline{\overline{c}}$ macht, und bezeichnet wieder x das Intervall, so erhält man aus $x \,.\, {}^1/_8 = {}^1/_6$ das Intervall $x = {}^4/_3$; also ist F' der gesuchte Ton.

41. Aus $x : 256 = 5 : 2$ folgt $x = 640$ Schwingungen in der Sekunde, das Intervall des Tones ist also $\dfrac{640}{2 \,.\, 256} = \dfrac{5}{4}$, daher der Ton selbst $\overline{\overline{c}}$.

42. Der Stab muß $^5/_4 \,.\, 512 = 640$ Schwingungen machen, und wenn man die ursprüngliche Länge desselben mit l, die gesuchte mit x bezeichnet, so muß sich verhalten $512 : 640 = x^2 : l^2$, woraus folgt $x = 0{,}895 \,.\, l$.

43. Bezeichnet n die Anzahl der Schwingungen, welche die Saite bei der anfänglichen Spannung macht, so hat man $n : {}^3/_2\, n = \sqrt{16} : \sqrt{x}$ und daraus $x = 36\,\text{kg}$. (Siehe Aufgabe 20.)

44. $494 - 480 = 14$ Stöße.

45 a. α) Der Differenzton ist $\underline{C}$, da die Schwingungszahl von $c = 128$, die von $e = \dfrac{5}{4} \cdot 128 = 160$, deren Differenz aber $= 32$ ist (s. Aufl. zu 28).

β) Die Differenz der den Tönen c und g entsprechenden Schwingungszahlen 128 und 191 ist 64 und dieser Schwingungszahl entspricht der Ton C.

45 b. α) Die Summe der Schwingungszahlen von c und e ist $128 + 160 = 288$ und da diese Zahl $= \frac{9}{8} \cdot 256$, so ist der Summationston $\overline{d}$.

β) Für den Summationston der Töne c und g ergiebt sich die Schwingungszahl $320 = \frac{5}{4} \cdot 256$, also der Ton $\overline{e}$.

46. Bezeichnet man die Schwingungszahlen der beiden Töne mit x und y, so hat man die beiden Gleichungen $y - x = 6$ und $^{16}/_{15}\, x = y$, und daraus $x = 90$, $y = 96$; die beiden Töne sind also *Fis* und *G*.

47. Die Schwingungszeit eines Pendels von 0,28 m Länge ist $^5/_9$ Sekunden (IX), also macht es während 5 Sekunden 9 Schwingungen, folglich während einer Sekunde $\frac{9}{5}$ Schwingungen; während einer Sekunde finden daher durch das Zusammenklingen der beiden um einen großen halben Ton verschiedenen Töne $\frac{9}{5} \cdot 4$ Stöße statt. Bezeichnen nun x und y die Schwingungszahlen der beiden Töne, so hat man die beiden Gleichungen: $\frac{x}{y} = \frac{16}{15}$ und $x - y = \frac{9}{5} \cdot 4$, woraus $x = 115{,}2$, $\quad y = 108$ folgt.

48. Aus $x - 432 = \frac{104{,}6 \,.\, 4}{60} =$ nahe 7 folgt $x = 439$.

49. Da der Ton c aus 128 Schwingungen entsteht, so ist die entsprechende Wellenlänge $= \frac{332}{128} = 2{,}594$ m.

50. Wie 4 : 3.

51. Sie muß halb so lang sein, wie die entsprechende Wellenlänge, also, da diese $^{1024}/_{32} = 32$ Fuß beträgt, 16 Fuß, weshalb man $\underline{C}$ auch das 16füßige C nennt.

52. Die dem Tone $\overline{\overline{c}}$ entsprechende Wellenlänge ist $= {}^{1024}/_{512} = 2$ Fuß, die offene Orgelpfeife, die diesen Ton geben soll, muß also 1 Fuß, die gedeckte $^1/_2$ Fuß lang sein.

53. Dem Tone $\overline{a}$ entspricht eine Wellenlänge von $\frac{1024}{426^2/_3} = 2^2/_5$ Fuß, also muß die Pfeife eine Länge von $2^2/_5 : 4 = {}^3/_5$ Fuß haben.

54. Beim Anblasen des Grundtones hat sie einen Schwingungsknoten in der Mitte und an jedem ihrer Enden einen Bauch; beim nächstfolgenden Tone hat sie zwei Schwingungsknoten und drei Bäuche, nämlich einen Bauch in der Mitte und einen an jedem Ende; bei dem nun folgenden Tone hat sie drei Schwingungsknoten und vier Bäuche u. s. w.

55. Eine gedeckte Pfeife hat beim Anblasen des Grundtones einen Schwingungsknoten am Boden und einen Bauch an der Öffnung, sie kann aber auch zwei

Knoten und zwei Bäuche, drei Knoten und drei Bäuche u. s. w. haben, wobei stets einer der Knoten am Boden, einer der Bäuche an der Öffnung liegt.

56. α) Die Obertöne $c, g, \overline{c}, \overline{e}, \overline{g}$ und so weiter, oder: In einer ungedeckten Pfeife entstehen Töne, deren Schwingungszahlen sich verhalten wie die Reihenfolge der ganzen Zahlen.

β) Der Grundton der Pfeife würde dann um eine Oktave niedriger liegen als vorher, also $\underline{C}$ sein, und bei stärkerem Anblasen würde man die Töne $G, e, b, \overline{d}$ erhalten, d. h. in einer gedeckten Pfeife entstehen Töne, deren Schwingungszahlen sich verhalten wie die Reihenfolge der ungeraden Zahlen.

57. Weil die Töne aus ungedeckten Labialpfeifen mehr Obertöne und zwar mehr harmonische Obertöne in den niedrigeren, stärker ins Ohr fallenden Tonlagen haben, als die Töne aus gedeckten Pfeifen.

58. Poisson hat durch die Analysis gefunden und Savart hat es durch Versuche bestätigt, daß zwischen den Transversalschwingungen n und den Longitudinalschwingungen n_1 einer Saite von der Länge l die Relation $n\sqrt{l} = n_1\sqrt{\alpha}$ stattfindet, worin α die durch das spannende Gewicht bewirkte Verlängerung der Saite bezeichnet.

59. Gleichfalls nach Poisson und Savart die Relation $\frac{n}{n_1} = 3{,}5608\,\frac{r}{l}$, worin n, n_1 die in voriger Auflösung angegebene Bedeutung haben, r den Halbmesser und l die Länge des Stabes bezeichnen.

60. Da nach Aufgabe 68 in XX. in diesem Falle

$$d = \frac{B}{13{,}6 \,.\, 770 \,.\, 0{,}76 \,.\, (1 + at)}$$ ist, so ergiebt sich

$$v = \sqrt{9{,}8088 \,.\, 10\,471 \,.\, 0{,}76 \,.\, 1{,}4 \,.\, (1 + at)}$$

(worin also der Faktor B nicht mehr vorkommt, weshalb auch in der Aufgabe sein Wert nicht angegeben ist), oder $v = 338{,}6\sqrt{1 + \frac{t}{273}}$,

also bei 0^0 C. ist $v = 330{,}6$ m,
bei 16^0 C. ist $v = 340{,}1$ m.

Genaue unmittelbare Beobachtungen haben bei 16^0 C. die Schallgeschwindigkeit $= 340{,}88$ m gegeben, was von dem eben theoretisch gefundenen Werte nur wenig abweicht.

61. Setzt man in der letzten Formel der vorigen Auflösung 340,88 anstatt v, sowie v_0 statt des dort durch Rechnung gefundenen Wertes 330,6, so hat man $340{,}88 = v_0\sqrt{1 + at}$, worin v_0 die Geschwindigkeit bei 0^0 bedeutet, also $= \frac{340{,}88}{\sqrt{1 + at}} = \frac{340{,}88}{\sqrt{1 + {}^{16}/_{273}}} = 331{,}3$ m $= 1055{,}6$ preußische Fuß ist. Die Geschwindigkeit bei 10^0 C. ist dann $v_1 = v_0\sqrt{1 + at}$ $= 331{,}3\sqrt{1 + {}^{10}/_{273}} = 337{,}26$ m $= 1074{,}6$ preuß. Fuß.

62. Die Geschwindigkeit des Schalles ist um so größer, je größer die Elastizität des Körpers, in welchem er fortschreitet, und je geringer die Dichte des-

selben ist. Ein größerer Druck bei gleichbleibender Temperatur macht zwar die Luft elastischer, aber in gleichem Verhältnis auch dichter, die Schallgeschwindigkeit bleibt also dieselbe. Wärmere Luft ist aber elastischer als kältere und zugleich dünner (oder im eingeschlossenen Raume doch gleich dicht), in wärmerer Luft muß also die Schallgeschwindigkeit größer sein als in kälterer.

63. Mit der Temperaturerhöhung im Konzertsaal wächst nach voriger Aufgabe die Geschwindigkeit v des Schalles; da sich aber die Länge l der Schallwelle des Tones nach der Länge des Blasinstrumentes richtet, also dieselbe bleibt, so muß wegen $l = \frac{v}{n}$ die Schwingungszahl n in demselben Verhältnis wie v größer, also der Ton höher werden.

64. Weil die Dichtigkeit der Luft bei warmem Wetter weniger gleichmäßig ist, als bei kaltem.

65. Der Ton C entspricht 64 Schwingungen, die Terze desselben $\frac{5}{4} \cdot 64 =$ 80 Schwingungen, daher hat man, wegen $l = \frac{v}{n}$ oder $n = \frac{v}{l}$, mit Berücksichtigung der Aufgabe 61:

$$64 = v_0 \sqrt{1 + \frac{10}{273}} : l \text{ und } 80 = v_0 \sqrt{1 + \frac{x}{273}} : l,$$

woraus $64 : 80 = \sqrt{1 + \frac{10}{273}} : \sqrt{1 + \frac{x}{273}}$, also $x = 169^0$ C. folgt.

66. Der Ton $\overline{\overline{h}}$ entspricht $^{15}/_8 \cdot 512 = 960$ Schwingungen in der Sekunde. Da nun die Pfeifenlänge gleich einer halben Wellenlänge, also die Wellenlänge $= 4$ Fuß ist, so ist die gesuchte Geschwindigkeit $= 960 \cdot 4 = 3840$ Fuß.

67. Der Druck einer Atmosphäre ist gleich dem Druck einer Wassersäule von $13{,}6 \cdot 0{,}76 = 10{,}336$ m, also wird eine Wassersäule von 1 m Höhe durch das Gewicht einer ihr gleichen Wassersäule um $\frac{0{,}00004785}{10{,}336} = 0{,}00000463$ m verkürzt, also ist

$$v = \sqrt{\frac{9{,}8088}{0{,}00000463}} = 1456 \text{ m}.$$

Die Beobachtung hat 1435 m ergeben.

68. Nach Chladnis Versuchen sind die in dem Stabe stattfindenden stehenden Longitudinalschwingungen den stehenden Luftschwingungen in einer offenen Pfeife vergleichbar. Wie sich in dieser beim tiefsten Ton ein Schwingungsknoten in der Mitte und eine Viertelwelle auf jeder Seite desselben befindet, so auch in jenem Stabe. Nun giebt eine offene Pfeife von 1 Fuß Länge einen Ton, welcher $^{1024}/_2 = 512$ Schwingungen in der Sekunde erfordert; dagegen entspricht der in dem Stabe hervorgerufene Ton der Schwingungszahl $^9/_8 \cdot 4096 = 4608$, folglich finden in dem Stabe $^{4608}/_{512} = 9$ mal

soviel Schwingungen in der Sekunde statt als in der offenen Pfeife, woraus folgt, daß die Geschwindigkeit des Schalles im Silber 9 mal so groß ist wie in der Luft.

69. Der hervorgerufene Ton wird durch 2048 Schwingungen in der Sekunde erzeugt. Eine gleich lange offene Pfeife würde aber einen Grundton geben, der $^{1024}/_{8} = 128$ Schwingungen entspricht. Der Schall pflanzt sich also im Weidenholze $^{2048}/_{128} = 16$ mal so schnell fort wie in der Luft.

70. Daß alle Körper zusammendrückbar und ausdehnbar sind.

Auflösungen zu XX.

1. $n^0\,\mathfrak{R}. = {}^5/_4\, n^0\,\mathfrak{C}. = ({}^9/_4\, n + 32)^0\,\mathfrak{F}.$
$n^0\,\mathfrak{C}. = {}^4/_5\, n^0\,\mathfrak{R}. = ({}^9/_5\, n + 32)^0\,\mathfrak{F}.$
$n^0\,\mathfrak{F}. = {}^4/_9\,(n - 32)^0\,\mathfrak{R}. = {}^5/_9\,(n - 32)^0\,\mathfrak{C}.$

2. $a = \dfrac{L_1 - L}{t \,.\, L}.$

3. $L_1 = L\,(1 + a \,.\, t).$

4. $x = 2{,}5\,(1 + 0{,}000011 \,.\, 30) = 2{,}50083\,\text{m}.$

5. $x = 0{,}3\,(1 + 0{,}00003331 \,.\, 40) = 0{,}3004\,\text{m}.$

6. $x = L\,[1 + a\,(t_1 - t)]$ annäherungsweise genau, wenn die Temperaturen zwischen 0^0 und 100^0 liegen. Richtiger und bei bedeutend höheren oder tieferen Temperaturen immer anzuwenden ist die aus der Proportion $L : x = (1 + at) : (1 + at_1)$ folgende Formel $x = \dfrac{1 + at_1}{1 + at} \cdot L,$ welche man auch erhält, wenn man die Länge L bei t^0 erst auf die Temperatur 0^0 reduziert und dann die Länge bei $t_1{}^0$ bestimmt. Aus der zweiten Formel folgt

$$x = L\left(1 + \frac{a\,(t_1 - t)}{1 + at}\right),$$

woraus bei Vernachlässigung des zwischen 0^0 und 100^0 für feste und flüssige Körper sehr kleinen Wertes at im Nenner die erste Formel hervorgeht.

Diese erste Formel würde nur dann richtig sein, wenn die Längenzunahmen durch die Wärme von 0^0 an in geometrischer Progression stattfänden, während diese Zunahmen doch nur eine arithmetische Progression bilden. Bei Temperaturen zwischen 0^0 und 100^0 fallen aber die aus diesen verschiedenen Betrachtungsweisen sich ergebenden Werte zusammen.

7. Aus $0{,}5 = x\,(1 + 0{,}0000192 \,.\, 40)$ folgt $x = 0{,}499616\,\text{m}.$

8. $x = 2\,(1 + 80 \,.\, 0{,}000011) = 2{,}00176$ m.

9. $x = \dfrac{1 + 0{,}00000861 \,.\, 400}{1 + 0{,}00000861 \,.\, 25} \cdot 2 = 2{,}006456$ m.

9a. Weil Platin und Glas (namentlich gewisse Glasforten) genau denselben Ausdehnungskoeffizienten besitzen.

10. $x = 2\,(1 + 0{,}0000192 \,.\, 15) = 2{,}000576$ m.

11. Bezeichnet l die Länge, b die Breite der Platte bei 0^0, so ist bei t^0 die Länge derselben $= l\,(1 + at)$, ihre Breite $= b\,(1 + at)$, also ihr Flächeninhalt $= l \,.\, b \,.\, (1 + at)^2 = F\,(1 + at)^2 = F\,(1 + 2at + a^2t^2)$, wofür aber gewöhnlich, wegen der Kleinheit von a^2t^2 bei Temperaturen zwischen 0^0 und 100^0 C. nur $F \,.\, (1 + 2at)$ gesetzt wird.

12. $20 \,.\, (1 + 2 \,.\, 0{,}000011 \,.\, 80) = 20{,}0352$ qdm.

13. Um $78{,}6486 - 78{,}54 = 0{,}1086$ qcm.

14. Bei 20^0 ist sie $= 2\,(1 + 2 \,.\, 10 \,.\, 0{,}000011) = 2{,}00044$ qm, bei 0^0 ist sie $= 2\,(1 - 2 \,.\, 10 \,.\, 0{,}000011) = 1{,}99956$ qm.

15. Bezeichnet l die Länge, b die Breite, h die Höhe des Körpers bei 0^0, so ist sein Inhalt bei $t^0 = l\,(1 + at) \,.\, b\,(1 + at) \,.\, h\,(1 + at) = K \,.\, (1 + at)^3 = K\,(1 + 3at + 3a^2t^2 + a^3t^3)$, wofür aber bei Temperaturen von 0^0 bis 100^0 oder doch nahe diesen Grenzen $K\,(1 + 3at)$ gesetzt werden kann.

16. Um $2 \,.\, 50 \,.\, {}^3/_{85200} = 0{,}0035$ cbm.

17. $5 \,.\, (1 + 0{,}0000192 \,.\, 100) = 5{,}0096$ cm.

18. $5\,(1 + {}^1/_{5550} \,.\, 80) = 5{,}072$ ccm.

19. $1 + 3 \,.\, 0{,}000009 \,.\, 80 = 1{,}00216$ Liter.

20. $24\,(1 + {}^{85}/_{5550}) = 24{}^{204}/_{555}$ ccm.

21. $20 \,.\, (1 + {}^1/_{24} = 20{}^5/_6$ Liter.

22. $\dfrac{13{,}6}{1 + \dfrac{t}{5550}}$

23. a) Aus $H = x\left(1 + \dfrac{t}{5550}\right)$ folgt $x = \dfrac{H}{1 + \dfrac{t}{5550}}$ oder $x = H - \dfrac{H \,.\, t}{5550} + \cdots$, woraus sich die behufs der Reduktion an der beobachteten Höhe H anzubringende Korrektion $- \dfrac{H \,.\, t}{5550}$ hinreichend genau ergiebt. Diese Korrektion wird für Grade unter 0, weil dann t negativ ist, $+ \dfrac{H \,.\, t}{5550}$.

b) Für Grade nach Reaumur ist der Ausdehnungskoeffizient ${}^1/_{4440}$ zu nehmen.

Auf einfache Weise und hinreichend genau erhält man mittels einer fünfstelligen Logarithmentafel den reduzierten Barometerstand durch die Formel $\log x = \log H - 0{,}00010 \,.\, t$, wenn t Reaumursche Grade bezeichnet. Denn aus

$$x = H\left(1 - \frac{t}{4440}\right) \text{ folgt}$$

$$\log x = \log H + \log\left(1 - \frac{t}{4440}\right), \text{ oder}$$

$$\log x = \log H - [\log 4440 - \log (4440 - t)].$$

Betrachtet man aber eine fünfstellige Logarithmentafel in der Nähe der Zahl 4440, so sieht man, daß, soweit der für t zu erwartende Zahlwert reicht, sämtliche Differenzen je zweier aufeinander folgender Logarithmen $= 10$ sind, wonach $\log 4440 - \log (4440 - t) = 0{,}00010 \cdot t$, mithin $\log x = \log H - 0{,}00010 \cdot t$ wird.

24. Die Korrektion ist $= -\frac{336{,}45 \cdot 18}{4440} = -1{,}37$, also der reduzierte Stand $= 335{,}08$ Linien.

Mittels der Formel $\log x = \log H - 0{,}00010 \cdot t$ erhält man [siehe vorige Auflösung b)] $x = 335{,}07$ Linien.

25. 761,65 mm.

26. 746,91 mm.

27. $x = L[1 + a_1 (t_1 - t)]$, also die Korrektion $= La_1 (t_1 - t)$, welcher Wert zur Höhe der Quecksilbersäule zu addieren ist.

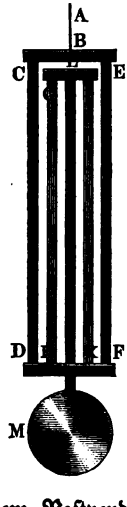
Der bei 24° C. richtige Barometerstand ist 754,26 und der auf 0° berechnete 750,15 mm.

28. Aus Aufgabe 9 in IX. folgt

$$n = \frac{(0{,}994 \cdot 0{,}000011 \cdot 20) \cdot 86\,400}{2 \cdot 0{,}994} = 9{,}504 \text{ Schwingungen.}$$

29. Es sei (Fig. 41) bei einer bestimmten Temperatur die Länge sämtlicher Eisenstangen $AB + CD + LM = e$, so ist $L = e - x$. Ändert sich nun die Temperatur um $t°$, so geht die Länge des Pendels über in $L_1 = e(1 + at) - x(1 + a_1 t)$. Im vorliegenden Falle soll aber $L = L_1$, d. h. $e - x = e(1 + at) - x(1 + a_1 t)$ oder $ae = a_1 x$ sein, und aus dieser Gleichung sowie aus $L = e - x$ bestimmt sich

Fig. 41.



$$x = \frac{a}{a_1 - a} \cdot L, \quad e = \frac{a_1}{a_1 - a} \cdot L.$$

30. $x = \frac{0{,}000012}{0{,}00003 - 0{,}000012} \cdot 0{,}75 = 0{,}5$ m.

31. In diesem Falle würden, wie man leicht findet, die inneren Stangen nahe 3 Fuß lang, also fast um die Hälfte länger sein müssen als das ganze Pendel. Eine solche Anordnung, wie die in den beiden vorigen Aufgaben, ist also mit Eisen und Messing nicht thunlich, man muß deshalb, wenn man diese beiden Metalle zu einem Rostpendel benutzen will, mehrfache Verbindungen von abwechselnd eisernen und messingenen Stäben anwenden.

32. Bezeichnet a den Koeffizienten der linearen Ausdehnung des Glases, a_1 den Koeffizienten der scheinbaren Ausdehnung des Quecksilbers, sowie x die Höhe des Quecksilbers im Gefäße, so stellt $a \,.\, L$ die Größe dar, um welche der Schwerpunkt der Flüssigkeit wegen der Verlängerung der Pendelstange bei einer Temperaturerhöhung von einem Grad sinkt, dagegen $a_1 \cdot \frac{x}{2}$ die Größe, um welche dieser Schwerpunkt wegen der Ausdehnung der Quecksilbersäule zugleich gehoben wird. Soll also eine Kompensation stattfinden, so muß

$$a \,.\, L = a_1 \cdot \frac{x}{2}, \text{ also } x = \frac{2\,a}{a_1} \cdot L \text{ sein.}$$

Setzt man $a = {}^1/_{116100}$, $a_1 = {}^1/_{6480}$, so erhält man $x =$ nahe ${}^1/_9\, L$.

33. $V_1 = V \,.\, 1{,}0003$ bei $11{,}5^0$, $= V$ bei $8{,}9^0$, also gerade so groß, wie bei 0^0, $= V \,.\, 1{,}00733$ bei 50^0 C.

34. Aus $124\,(1 + x) - 124\,(1 + 0{,}000026 \,.\, 100) = 6\,(1 + x)$ folgt x (d. h. die Ausdehnung der Volumeneinheit des Wassers bei seiner Erwärmung von 0^0 bis 100^0 C.) $= 0{,}05358$ oder etwas mehr als ${}^1/_{20}$ des Volumens bei 0^0.

35. $V_0 \left(1 + \frac{t}{273}\right) = V_0 \frac{273 + t}{273} = V_0\,(1 + 0{,}003665\,t)$*).

36. a) Bei gleichbleibendem Druck und nur Änderung der Temperatur würde das Volumen des Gases (nach Aufgabe 35) $= V_0 \cdot \frac{273 + t}{273}$ sein. Geht nun der Druck von 0,76 m in B über, so ist nach dem Mariotteschen Gesetz:

$$V : V_0 \cdot \frac{273 + t}{273} = 0{,}76 : B, \text{ also } V = V_0 \cdot \frac{273 + t}{273} \cdot \frac{0{,}76}{B}.$$

b) Aus voriger Auflösung ergiebt sich $V_0 = V \cdot \frac{273}{273 + t} \cdot \frac{B}{0{,}76}$.

37. Aus $V_0\,(1 + 0{,}003665 \,.\, 20) = 5$ folgt $V_0 = 4{,}659$ cbm.

38. Aus $2 = 1 + \frac{t}{273}$ folgt $t = 273^0$.

39. a) Ist V_0 das gesuchte Volumen bei 0^0 C., so muß $V = V_0 \left(1 + \frac{t}{273}\right)$, also $V_0 = V \cdot \frac{273}{273 + t} = \frac{V}{1 + 0{,}003665\,t}$ sein, und

b) wenn V_1 das Volumen bei $t_1{}^0$ C. bezeichnet, so ist

$$V_1 = V_0 \left(1 + \frac{t_1}{273}\right) = \frac{V\,(273 + t_1)}{273 + t} = \frac{V\,(1 + 0{,}003665\,t_1)}{1 + 0{,}003665\,t}.$$

c) Aus $x : V_1 = B_1 : B$ (nach dem Mariotteschen Gesetz) folgt

$$x = V_1 \cdot \frac{B_1}{B} = \frac{V\,(1 + 0{,}003665\,t_1)}{1 + 0{,}003665\,t} \cdot \frac{B_1}{B}.$$

*) Man halte sich für die folgenden Aufgaben die Gleichheit dieser Ausdrücke gegenwärtig.

41. a) Bei gleichem Drucke verhalten sich die Volumina eines Gases wie dessen absolute Temperaturen.

b) Bei gleichem Volumen verhalten sich die Drücke, unter welchen ein Glas steht, wie dessen absolute Temperaturen.

42. Aus Aufl. zu 36 b) folgt $x = \frac{0{,}72 \,.\, 1{,}5}{0{,}76\ (1 + 0{,}003665\, t)} = 1{,}293$ Liter.

43. Aus Aufg. 40 folgt $x = 0{,}79 \cdot \frac{1 + 0{,}003665 \,.\, 200}{1 + 0{,}003665 \,.\, 10} \cdot 200 = 264$ cbm.

44. a) Ein Luftvolumen $= 1$ von 0^0 C. und 0,76 m Druck erhält, wenn es sich frei ausdehnen kann [nach Aufgabe 36 a)], bei t^0 C. und B Meter Druck das Volumen $(1 + 0{,}003665\, t) \cdot \frac{0{,}76}{B}$, folglich ist, die Dichte der Luft von 0^0 C. und 0,76 m Druck $= d$ gesetzt, die Dichte der Luft von t^0 C. und B Meter Druck $= \frac{d \,.\, B}{(1 + 0{,}003665\, t) \,.\, 0{,}76}$. Bezeichnet nun Q das Gewicht einer Luftmenge von t^0 C. und B Meter Druck, welche dasselbe Volumen hat wie das Gewicht Q_0 der Luftmenge von 0^0 C. und 0,76 m Druck, so hat man

$$Q : Q_0 = \frac{d\, B}{(1 + 0{,}003665\, t) \,.\, 0{,}76} : d,$$

folglich $$Q = \frac{Q_0}{1 + 0{,}003665\, t} \cdot \frac{B}{0{,}76}$$ Gramm.

b) Aus a) folgt das gesuchte Gewicht $Q_0 = Q\,(1 + 0{,}003665\, t) \cdot \frac{0{,}76}{B}$ Gramm.

45. An den Fenstern, dem in der Regel kältesten Teile der Stube, wo sich die über dem Ofen in die Höhe gestiegene erwärmte Luft zuerst senkt.

46. Man wäge den Ballon gefüllt, pumpe alsdann die Luft aus, bis die Barometerprobe nur noch einen sehr geringen Druck $= b$ anzeigt, und wäge abermals. Bezeichnen P und p die beiden erhaltenen Gewichte, so ist $P - p$ das Gewicht der Luft, welche die Glaskugel unter dem Drucke $B - b$ und bei der Temperatur t ausfüllen würde. Wenn nun der Druck $= 0{,}76$ m wäre, die Temperatur t^0 aber dieselbe bliebe, so würde dasselbe Volumen $(P - p)\frac{0{,}76}{B - b}$ wiegen, und wenn bei diesem Drucke die Temperatur nicht $= t^0$, sondern $= 0^0$ wäre, so würde die Dichtigkeit, also auch das Gewicht der Luft im Verhältnis von $1 : \left(1 + \frac{t}{273}\right)$ zunehmen, das gesuchte Gewicht also $= (P - p) \cdot \frac{0{,}76}{B - b} \cdot \left(1 + \frac{t}{273}\right)$ sein.

Wollte man auch die Ausdehnung des Glases am Ballon berücksichtigen, so müßte der vorher gefundene Ausdruck noch durch

$$1 + \frac{t}{38\,700} = 1 + 0{,}00002583\, t \text{ dividiert werden.}$$

47. War das Volumen der Glaskugel bei 0° C. x Kubikdezimeter, so war das Gewicht der Luft von 0° C. und 0,76 m Druck (Tabelle 5 des Anhanges)

$$= x \,.\, 1{,}293\,g \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (I)$$

Durch Erwärmen der Kugel auf 100° wurde ihr Volumen $x \cdot \left(1 + \frac{100}{38\,700}\right)$ Kubikdezimeter, also das Gewicht der in ihr enthaltenen, gleichfalls auf 100° erwärmten Luft

$$= \frac{x \,:\, 1{,}293}{\left(1 + \frac{100}{273}\right)\left(1 + \frac{100}{38\,700}\right)} = x \,.\, 0{,}944\,g \quad . \quad . \quad . \quad (II)$$

Die Gewichte (I) und (II) voneinander abgezogen sind aber der Aufgabe gemäß $= 1$ g, also

$$x = \frac{1}{1{,}293 - 0{,}944} = \text{nahe } 2{,}9 \text{ cdm},$$

folglich das gesuchte Gewicht der Luft nahe $= 2{,}9 \,.\, 1{,}293 = 3{,}749$ g.

48. Es bezeichne V den Rauminhalt des Ballons, sowie v dasjenige Volumen, welches die nach dem Evakuieren im Ballon zurückgebliebene Luft vor dem Evakuieren einnahm.

Da nun der Luftteil, welcher bei einem Drucke von 0,755 m den Raum v einnahm, nach dem Evakuieren bis auf 0,005 Druck den Raum V einnimmt, so hat man nach dem Mariotteschen Gesetz $\frac{V}{v} = \frac{0{,}755}{0{,}005}$, oder

$$\frac{V - v}{V} = \frac{0{,}755 - 0{,}005}{0{,}755} = \frac{0{,}75}{0{,}755}.$$

Das Gewicht der ausgepumpten Luft vom Volumen $V - v$ ergiebt sich aus der ersten und dritten Wägung $= 567{,}949 - 561{,}291 = 6{,}558$ g, und wenn man das Gewicht der überhaupt im Ballon enthaltenen Luft vom Volumen V mit p bezeichnet, so ergiebt sich $\frac{p}{6{,}658} = \frac{0{,}755}{0{,}75}$, oder $p = 6{,}702$ g. Also ist das Gewicht des leeren Gefäßes $= 567{,}949 - 6{,}702 = 561{,}247$ g; folglich das Gewicht des Wassers $= 6133{,}162 - 561{,}247 = 5571{,}915$ g. Nun hat ein Gramm Wasser bei einer Temperatur von 20,5° ein Volumen von 1,001698 ccm, folglich der Inhalt des Glasballons $V = 5571{,}915 \,.\, 1{,}001698 = 5581{,}375$ ccm.

49. Man wäge die Glasröhre erst leer und dann mit Quecksilber gefüllt. Die beiden Gewichte seien, in Grammen ausgedrückt, p_1 und p_2, so ist $p_2 - p_1$ das Gewicht der Quecksilbersäule von der Länge der Röhre. Dividiert man dies durch die Dichte d des Quecksilbers bei $t°$, so erhält man das verlangte Volumen in Kubikzentimetern ausgedrückt. Nun ist aber $d = \frac{13{,}568}{1 + D.t'}$, wo D den absoluten Ausdehnungskoeffizienten des Quecksilbers bezeichnet,

$$\text{also } V = \frac{(p_2 - p_1)\,(1 + D \,.\, t)}{13{,}568}.$$

50. Mittels einer kleinen Queckſilberſäule, die man in die Röhre bringt und ſucceſſiv verſchiedene Lagen einnehmen läßt.

51. Man wäge den Apparat zuerſt leer, fülle dann die Kugel und eine kleine Anzahl n_1 von Abteilungen der Röhre mit Queckſilber und wäge abermals, ſchütte nun nochmals Queckſilber hinzu, bis n_2 Abteilungen der Röhre angefüllt ſind, und wäge zum drittenmal. Sind nun P, P_1, P_2 die durch die drei Wägungen erhaltenen Gewichte und N die geſuchte Zahl, ſo hat man, da $P_1 - P$ das Gewicht des zuerſt in die Röhre gebrachten Queckſilbers, $P_2 - P_1$ das Gewicht des noch zugegoſſenen bedeutet, dieſe Gewichte aber wie die Volumina der Maſſen ſich verhalten, welche bezüglich durch $N + n_1$, $n_2 - n_1$ ausgedrückt werden,

$$(P_1 - P) : (P_2 - P_1) = (N + n_1) : (n_2 - n_1)$$

und daraus

$$N = \frac{(P_1 - P)\,(n_2 - n_1)}{P_2 - P_1} - n_1.$$

52. Es ſei m die Graduierungszahl der Röhre, bis zu welcher das Queckſilber in derſelben reicht, wenn die Röhre in ſchmelzendem Eiſe ſich befindet, m_1 die dem Siedepunkte des Waſſers entſprechende Zahl, ſo hat das Volumen des Queckſilbers von 0 bis 100° C. um $m_1 - m$ Volumeneinheiten oder um $\frac{m_1 - m}{N + m}$ des ganzen Queckſilbervolumens zugenommen, der Koeffizient der ſcheinbaren Ausdehnung iſt alſo $= \frac{m_1 - m}{100\,(N + m)}$ $(= {}^1/_{6480})$.

53. Nimmt man das Volumen eines Röhrengrades als Volumeneinheit an und bezeichnet N die Anzahl der Volumeneinheiten, welche die Kugel enthalten muß, ſo hat man, wenn man (hier näherungsweiſe, vergl. Aufgabe 52) den ſcheinbaren Ausdehnungskoeffizienten des Queckſilbers $= \frac{1}{6480}$ annimmt, zur Beſtimmung von N aus den Bedingungen der Aufgabe die Gleichung $N \cdot \frac{240}{6480} = 240$, alſo $N = 6480$, folglich $x = {}^{6480}/_{240} = 27$, oder der Rauminhalt der Kugel muß 27 mal ſo groß ſein, wie der der Röhre.

Nimmt man gleich das Volumen der Röhre als Einheit an, ſo daß x das Volumen der Kugel bezeichnet, ſo hat man

$$\frac{x \,.\, 240}{6480} = 1, \text{ alſo } x = 27.$$

54. Das Gewicht des Queckſilbers, welches die ganze Röhre ausfüllen würde, iſt $= 260 \,.\, {}^2/_{40} = 13\,\text{g}$, alſo das Gewicht des Queckſilbers, welches 1 Grad anfüllt, $= {}^{13}/_{180}\,\text{g}$. Das Volumen der anzublaſenden Kugel iſt $= {}^4/_3 \pi x^3$, wo x den Halbmeſſer in Zentimetern bezeichnet. Iſt ſie mit Queckſilber gefüllt, ſo nimmt deſſen Volumen für jeden Zenteſimalgrad um ${}^4/_3 \pi x^3 \,.\, {}^1/_{6480}$ ccm zu, das Gewicht des Queckſilbers, welches 1 Grad

ausfüllt, läßt sich also auch darstellen durch $^4/_3 \pi x^3 . {}^1/_{6480} . 13{,}568$ g. Man hat also $^{13}/_{180} = {}^4/_3 \pi x^3 . {}^1/_{6480} . 13{,}568$, woraus $x = 2{,}02$ cm folgt.

55. Dem Luftdrucke von 334‴ (753,8 mm) entspricht (Tabelle 16) die Siedetemperatur von 99,76°, folglich hat man $99{,}76^0 . 100^0 = e : e_1$ und daraus $e_1 = \frac{100 . e}{99{,}76}$.

56. Zufolge der Aufgabe verhält sich das Volumen der in der Röhre befindlichen Luft bei der Temperatur des Schwefeldampfes zu dem Volumen derselben Luft bei 13° wie 610 : (610 — 317), man hat also (vergl. Auflösung zu 39)

$$610 : 293 = (273 + x) : (273 + 13),$$

woraus folgt $x = 322{,}8^0$.

57. Der Zwischenraum wird $= 1{,}5\ ({}^1/_{582} - {}^1/_{1187})$ m $= 1{,}292$ mm groß sein.

58. Bezeichnet x das spezifische Gewicht des Queckſilbers bei 0°, v das Volumen des im zweiten Schenkel befindlichen Queckſilbers bei 0°, bei welcher Temperatur also seine Höhe der beobachteten Höhe h des Queckſilbers im ersten Schenkel gleich sein würde; ferner v_1 das Volumen und s_1 das spezifische Gewicht des Queckſilbers im zweiten Schenkel bei der Temperatur t, so hat man $v : v_1 = s_1 : s$ oder, da die Höhe im erwärmten zweiten Schenkel $= h_1$ ist, nach dem in der Aufgabe erwähnten hydrostatischen Gesetz $h : h_1 = s_1 : s$, also auch $v : v_1 = h : h_1$, woraus

$$\frac{v_1 - v}{v} = \frac{h_1 - h}{h}$$

folgt. Nun drückt in dieser Gleichung der Ausdruck links die Zunahme der Volumeneinheit bei Erhöhung der Temperatur von 0° auf t^0 aus, also auch der Ausdruck rechts dasselbe. Folglich ist die Zunahme der Volumeneinheit für die Temperaturzunahme von 0° bis 1°, d. h. der absolute Ausdehnungskoeffizient des Queckſilbers $D = \frac{h_1 - h}{h . t}$ (nach Regnault bis zu 100° C. zu nehmen $D = 0{,}00018 = \frac{1}{5550}$).

59. Die scheinbare Volumenzunahme der Queckſilbermenge bei ihrer Ausdehnung von 0° bis 100° ist $n_1 - n$ Volumeneinheiten der Röhrenteilung, ihre wirkliche Zunahme aber $nD . 100$, folglich die Zunahme des (inneren) Glasvolumens $nD . 100 - (n_1 - n)$ und daher die Zunahme der Volumeneinheit der Röhrenteilung für 1° Temperaturzunahme, d. h. der kubische Ausdehnungskoeffizient des Glases $K = \frac{nD . 100 - (n_1 - n)}{n . 100}$.

Durch Einsetzung der in der Aufgabe gegebenen Werte erhält man $K = 0{,}000026$, woraus sich der lineare Ausdehnungskoeffizient $= 0{,}0000086$ ergiebt.

60. Bezeichnet man die Dichtigkeit des bis auf t_1^0 erwärmten Queckſilbers, nämlich $\frac{d_1}{1 + \frac{t_1 + t}{5550}}$, kurz mit d_2, ſo iſt die geſuchte Beſtimmungsgleichung

$$\frac{P_2}{d_2} = \left[\frac{P}{d} C + \frac{P_1}{d_1} D - \left(\frac{P}{d} + \frac{P_1}{d_1}\right) K\right] (t_1 - t),$$

nämlich das Volumen des ausgefloſſenen Queckſilbers iſt gleich der Differenz zwiſchen der Ausdehnung des Metallſtabes nebſt der des Queckſilbers im Apparat und der Ausdehnung des Glaſes.

61. Der Bogen, welchen die Spitze des Zeigers l_2 beſchreibt, iſt $= \frac{l_2 \pi w}{180}$, und wenn man die Länge des Metallſtabes bei der Temperatur t_1^0 mit L_1 bezeichnet, alſo die Längenzunahme desſelben mit $L_1 - L$, ſo hat man genau genug $(L_1 - L) : \frac{l_2 \pi w}{180} = l_1 : l_2$, alſo

$$L_1 - L = \frac{l_1 \pi w}{180},$$

folglich den Ausdehnungskoeffizienten

$$= \frac{L_1 - L}{L (t_1 - t)} = \frac{l_1 \pi w}{L (t_1 - t)\ 180}.$$

62. Bezeichnet δ die geſuchte Ausdehnung der Volumeneinheit des Waſſers, wenn es von 0^0 auf 100^0 C. erwärmt wird, ſo hat man

$$186\ (1 + \delta) - 186\ (1 + 0{,}000026\ .\ 100) = 9\ (1 + \delta),$$

alſo $\delta = 0{,}05358$ *).

63. Bezeichnet Δ_1 den Koeffizienten der ſcheinbaren Ausdehnung des Gaſes, ſo erhält man aus den Beobachtungen die Relation

$$(p_1 - p)\ (1 + \Delta_1\ .\ 100) = p_1 \cdot \frac{b}{b_1 - \beta}$$

und daraus

$$\Delta_1 = \frac{p_1 b - (p_1 - p)\ (b_1 - \beta)}{100\ (p_1 - p)\ (b_1 - \beta)},$$

alſo, wenn D_1 den Koeffizienten der abſoluten Ausdehnung des Gaſes, ſowie K den kubiſchen Ausdehnungskoeffizienten des Glaſes bedeutet (vergl. Aufg. 59):

$$D_1 = \Delta_1 + K\ (= 0{,}003665 = {}^1/_{273}).$$

64. Nach der Operation II. iſt, wenn K den kubiſchen Ausdehnungskoeffizienten des Glaſes bedeutet, das Volumen der in der Flüſſigkeit auf die noch unbekannte Temperatur t gebrachten Luft im Cylinder $= V\ (1 + Kt)$ und ſteht unter dem Drucke B, würde alſo auf die Temperatur 0^0 gebracht, bei gleichbleibendem Druck B und wenn α den Ausdehnungskoeffizienten der Luft bezeichnet, den Raum $\frac{V\ (1 + Kt)}{1 + \alpha t}$ einnehmen.

*) Die Ausdehnung des Waſſers iſt übrigens zwiſchen 0^0 und 100^0 ungleich (vergl. Aufgabe 33).

Aus I. und IV. findet sich das Gewicht des (zufolge III.) eingedrungenen Queckſilbers $= Q_1 - Q = q$, und daraus, wenn D den abſoluten Ausdehnungskoeffizienten des Queckſilbers bezeichnet, das Volumen dieſer Queckſilbermenge von $0^0 = \frac{q}{D}$, alſo das Volumen der nach Eintauchen in die Flüſſigkeit noch im Cylinder verbliebenen, dann aber auf 0^0 gebrachten Luft $= V - \frac{q}{D}$, die unter dem Drucke $B - h = B_1$ ſteht.

Daraus ergiebt ſich nach dem Mariotteſchen Geſetz:

$$\frac{V(1 + Kt)}{1 + \alpha t} : \left(V - \frac{q}{D}\right) = B_1 : B,$$

woraus ſich t berechnen läßt.

65. Es ſei δ die Ausdehnung der Volumeneinheit des Waſſers beim Übergange ſeiner Temperatur von 4^0 auf t^0 C. und A der Koeffizient der kubiſchen Ausdehnung des feſten Körpers. Denken wir uns zuerſt, der feſte Körper habe beim Einſenken in das Waſſer ſeine Temperatur t behalten, das Waſſer aber ſeine größte Dichtigkeit, alſo die Temperatur 4^0 C. gehabt, ſo würde der Gewichtsverluſt des feſten Körpers, d. h. das Gewicht des verdrängten Waſſers, nicht $= p$, ſondern $= p(1 + \delta)$*) geweſen ſein. Hätte aber das Waſſer ſeine größte Dichtigkeit und zugleich der feſte Körper die Temperatur 0^0 gehabt, ſo würde dieſer letztere nicht ein Volumen vom Gewicht $p(1 + \delta)$, ſondern ein $(1 + At)$mal kleineres Volumen, alſo ein Volumen vom Gewicht $\frac{p(1 + \delta)}{1 + At}$ verdrängt haben, und das korrigierte ſpezifiſche Gewicht iſt alſo $= \frac{P \cdot (1 + At)}{p \cdot (1 + \delta)}$.

66. Man muß das Gewicht P_1 der Flüſſigkeit auf die Temperatur 0^0, das Gewicht P des Waſſers auf die Temperatur 4^0 reduzieren, den Rauminhalt der Flaſche aber auf die Temperatur 0^0 beziehen.

Es bezeichne δ_1 die Ausdehnung der Volumeneinheit der Flüſſigkeit bei der Temperaturzunahme von 0^0 bis $t_1{}^0$, δ dasſelbe vom Waſſer von 4^0 bis t^0, K den kubiſchen Ausdehnungskoeffizienten des Glaſes.

Das Gewicht P_1 der Flüſſigkeit würde, wenn ihre Temperatur auf 0^0 herabſänke, die Flaſche aber ihre Temperatur t_1 beibehielte, in das Gewicht $P_1(1 + \delta_1)$ übergehen. Dieſes Gewicht würde aber, wenn auch die Temperatur der Flaſche von $t_1{}^0$ auf 0^0 herabginge, $(1 + Kt_1)$mal ſo klein ſein; das reduzierte Gewicht der Flüſſigkeit iſt alſo

$$= P_1 \frac{1 + \delta_1}{1 + Kt_1}.$$

*) Denn die Dichtigkeit des Waſſers bei 4^0 verhält ſich zu ſeiner Dichtigkeit bei t^0 wie $(1 + \delta) : 1$, und da ſich bei gleichem Volumen die Gewichte verhalten wie die Dichtigkeiten, ſo hat man, wenn p das Gewicht des verdrängten Waſſers bei t^0 und x dasſelbe bei 4^0 bedeutet, $x : p = (1 + \delta) : 1$, alſo $x = p(1 + \delta)$.

Das Gewicht des Wassers würde, wenn es bei der Wägung seine größte Dichtigkeit gehabt, die Flasche aber die Temperatur t beibehalten hätte, nicht $= P$, sondern $= P\,(1 + \delta)$ gewesen sein; wenn aber zugleich die Flasche die Temperatur 0° gehabt hätte, würde dies Gewicht $(1 + K\,.\,t)$ mal so wenig, also das reduzierte Gewicht des Wassers $P\,.\,\frac{1+\delta}{1+Kt}$ betragen haben.

Das korrigierte spezifische Gewicht der Flüssigkeit ist demnach

$$= \frac{P_1\,\frac{1+\delta}{1+Kt_1}}{P\,\frac{1+\delta}{1+Kt}} = \frac{P_1}{P}\,.\,\frac{1+\delta_1}{1+\delta}\,.\,\frac{1+Kt}{1+Kt_1}.$$

67. Bezeichnet Q das Gewicht der im Ballon befindlichen Luft von 18° C. und 754 mm Druck, so drückt $\frac{5}{754}\,Q$ das Gewicht der nach dem Auspumpen im Ballon zurückgebliebenen, also $\frac{749}{754}\,Q$ das Gewicht der ausgepumpten Luft aus und man hat der Aufgabe gemäß $\frac{749}{754}\,Q = 12{,}01$ g, folglich $Q = \frac{754}{749}\cdot 12{,}01 = 12{,}09$ g. Aber wenn ein Luftvolumen bei 18° C. und 754 mm Druck 12,09 g wiegt, so hat ein gleiches Volumen, mit Luft von 0° C. und 760 mm Druck ausgefüllt, das Gewicht $Q_0 = 12{,}09\,(1 + 0{,}003665\,.\,18)\cdot\frac{760}{754}\,g = 12{,}995$ g [vergl. Aufgabe 44 b)]. Also wiegt ein Liter oder Kubikdezimeter Luft bei 0° und 760 mm Druck 1,2995 g oder ein Kubikzentimeter 0,0012995 g; da aber 1 ccm Wasser 1 g wiegt, so ergiebt sich daraus die Dichtigkeit der Luft bei 0° C. und 760 mm Barometerdruck = 0,0012995 (nahe $= 1/770$) der Dichtigkeit des Wassers von 4° C.

Genauer ist nach Regnault das normale Gewicht eines Kubikzentimeters Luft = 0,0012932 g, also die normale Dichtigkeit der Luft = 0,0012932 oder nahe $= 1/773$ der Dichtigkeit des Wassers von 4° C.

68. Das Gasvolumen V wird unter dem Drucke von 0,76 m $= V\cdot\frac{b}{0{,}76}$ und bei der Temperatur 0° $= V\,\frac{B}{0{,}76}\cdot\frac{273}{273+t}$. Nun wiegt aber ein Liter Luft von demselben Drucke und derselben Temperatur 1,2932 g, also eine Luftmenge vom Volumen des Gases $V\,.\,1{,}2932\cdot\frac{B}{0{,}76}\cdot\frac{273}{273+t}$ g, folglich ist die gesuchte Dichtigkeit des Gases, wenn P Gramme bedeutet,

$$= \frac{P}{V\,.\,1{,}2932\cdot\frac{B}{0{,}76}\cdot\frac{273}{273+t}} = \frac{P\,.\,0{,}76\,.\,(273+t)}{V\,.\,1{,}2932\,.\,B\,.\,273}.$$

69. Die Dichtigkeit der Luft bei 0° C. und 760 mm Barometerstand ist (nach Aufgabe 67), auf die Dichte des Wassers von 4° C. bezogen, $= 1/773$, bei der Temperatur t also $= 1/773 \cdot \frac{273}{273 + t}$, und beim Barometerstande B $= 1/773 \cdot \frac{273}{273 + t} \cdot \frac{B}{760}$, oder $= \frac{0{,}00129318}{1 + 0{,}003665\,t} \cdot \frac{B}{760}$.

70. a) Ein Kubikdezimeter atmosphärische Luft wiegt nach Regnault (siehe Aufgabe 67) bei 0° C. und 760 mm Druck 1,2932 g, folglich ein Kubikmeter bei derselben Temperatur und demselben Druck 1,2932 kg, also bei t° C. und B Millimeter Druck

$$\frac{1{,}2932}{1 + 0{,}003665\,t} \cdot \frac{B}{760} \text{ kg}.$$

b) Da ein preußischer Kubikfuß $= 0{,}030916$ cbm und 1 kg $= 2$ preußische Pfund ist, also 1 cbm $2 \cdot 1{,}2932$ Pfund wiegt, so wiegt ein Kubikfuß Luft bei der Normaltemperatur und dem Normaldrucke $0{,}030916 \cdot 2 \cdot 1{,}2932 = 0{,}07996$ Pfd. (nahe 2,4 Lot), also bei t° C. und dem Drucke von B Pariser Zoll

$$\frac{0{,}07996}{1 + 0{,}003665\,t} \cdot \frac{B}{28} \text{ Pfd.}$$

Auflösungen zu XXI.

1. $m \cdot i$ Kalorien.

2. $(m_1 + m_2)\,t = m_1 t_1 + m_2 t_2$.

3. Aus $(7 + 3)\,x = 7 \cdot 25 + 3 \cdot 65$ folgt $x = 37°$.

4. $\frac{6 \cdot 20 + 4 \cdot 50}{6 + 4} = 32°$.

5. Das Wasser hat $18 \cdot 15$, das Eisen $x \cdot 10 \cdot 100$ Kalorien, wenn x die spezifische Wärme des Eisens bezeichnet, die Summe der Kalorien ist also $= 18 \cdot 15 + x \cdot 10 \cdot 100$. Nach der Mischung hat aber das Wasser $18 \cdot 20$, das Eisen $x \cdot 10 \cdot 20$ Kalorien und die Summe dieser muß offenbar der vorhergehenden gleich sein. Man hat also $18 \cdot 15 + x \cdot 10 \cdot 100 = 18 \cdot 20 + x \cdot 10 \cdot 20$, woraus folgt $x = 0{,}1125$.

Andere Auflösung: Die 10 kg Eisen geben $10 \cdot (100 - 20) \cdot x$ Kalorien ab, die 18 kg Wasser dagegen erhalten $18 \cdot (20 - 15)$ Kalorien, es muß also $10 \cdot (100 - 20)\,x = 18 \cdot (20 - 15)$ sein oder $x = 0{,}1125$, wie vorher.

6. Aus $7 + 100 . x = 10 + x . 10$, oder aus $10 - 7 = x\,(100 - 10)$ folgt $x = {}^1/_{30}$.

7. Man erhält je nach der Ableitung (vergl. Auflösung zu 5)

$$w_1 m_1 t_1 + w_2 m_2 t_2 = w_1 m_1 t + w_2 m_2 t,$$

oder $$w_1 m_1 (t - t_1) = w_2 m_2 (t_2 - t),$$

woraus sich, wenn sechs der sieben Größen gegeben sind, die siebente finden läßt, z. B. $t = \dfrac{w_1 m_1 t_1 + w_2 m_2 t_2}{w_1 m_1 + w_2 m_2}$.

8. a) $x = \dfrac{8 . 100 + {}^1/_{30} . 10 . 22{,}5}{8 + {}^1/_{30} . 10} = 96{,}9°$.

b) $x = \dfrac{{}^1/_{30} . 15 . 10 + 0{,}1138 . 8 . 60}{{}^1/_{30} . 15 + 0{,}1138 . 8} = 42{,}3°$ C.

9. Nimmt man aus Tabelle 13 die spezifische Wärme des Platins $= 0{,}037$, so ergiebt sich aus $0{,}037 . 0{,}1 . x + 9 = 0{,}037 . 0{,}1 . 13 + 13$

$$x = 1094° \text{ C}.$$

10. Bezeichnen p_1 und p_2 die gesuchten Kilogramme, so erhält man aus den beiden Gleichungen $w_1 p_1 (t - t_1) = w_2 p_2 (t_2 - t)$ und $p_1 + p_2 = p$:

$$p_1 = \frac{w_2 p (t_2 - t)}{w_1 (t - t_1) + w_2 (t_2 - t)},$$

$$p_2 = \frac{w_1 p (t - t_1)}{w_1 (t - t_1) + w_2 (t_2 - t)}.$$

11. Das Wasser nimmt nach dem Eintauchen der Kupfermasse m_2 an Wärme auf $M (t - t_1)$, das Gefäß $w m_1 (t - t_1)$; dagegen verliert die eingetauchte Kupfermasse an Wärme $w m_2 (t_2 - t)$, woraus die Gleichung folgt:

$$M (t - t_1) + w m_1 (t - t_1) = w m_2 (t_2 - t),$$

folglich $$w = \frac{M (t - t_1)}{m_2 (t_2 - t) - m_1 (t - t_1)}.$$

12. Aus $w . 3 . 100 = 0{,}38 . 80$*) folgt $w = 0{,}10133 \ldots$

13. Aus $w . 5 . 80 = 0{,}57 . 80$ folgt $w = 0{,}114$.

14. Wie 7 : 5 oder 1,4 : 1; nach genaueren Bestimmungen wie 1,421 : 1.

15. Bezeichnet s das spezifische Gewicht des Körpers und w seine spezifische Wärme, d. h. die Kalorien, welche 1 kg desselben zur Temperaturerhöhung um 1° C. bedarf, so drückt $s . w$ die Anzahl der Kalorien aus, welche s Kilogramm oder ein Kubikdezimeter des Körpers zur Erhöhung seiner Temperatur um 1° C. bedarf.

16. Daß die relative Wärme für diejenigen Körper am kleinsten ist, welche die weichsten sind, deren Teilchen also sich am leichtesten auseinander treiben lassen, und daß sie mit der Zähigkeit und Kohäsion der Körper wächst.

---

*) Die latente Wärme des Wassers ist nach neueren Untersuchungen $= 80{,}25°$ C. (nach älteren Bestimmungen 75° C.).

17. Nehmen wir diejenige Wärme, welche nötig ist, um 1 kg Wasser um 1° zu erhöhen, als Wärmeeinheit (Kalorie) an, so haben die 7 kg Wasser von 100° C. 7 . 100 Kalorien und die nach der Mischung entstandenen 10 kg Wasser von 46,2° C. 10 . 46,2 Kalorien. Zur Schmelzung der 3 kg Eis sind also 700 — 462 = 238 Kalorien erforderlich oder für jedes Kilogramm $^{238}/_{3}$ = 79,3 Kalorien, d. h. ebensoviel Wärme, als nötig ist, um 1 kg Wasser von 0° bis zu 79,3° C. zu erwärmen. Oder, wenn x die gesuchte Anzahl Wärmegrade bezeichnet, so folgt aus $3x + 10.46{,}2 = 7.100$ der Wert von x = 79,3° C.

18. Die 4 kg siedendes Wasser enthalten 4 . 100 Kalorien, die 3 kg Eis von 0° bedürfen aber, um Wasser von 0° zu werden, 3 . 80 Kalorien. Der Rest von 400 — 240 = 160 Kalorien verteilt sich nun gleichmäßig auf die 7 kg Wasser, welche also die Temperatur von $^{160}/_{7}$ = $22^{6}/_{7}$° erhalten.

Oder, wenn x die gesuchte Temperatur ist, so erhält man aus $3.80 + 7x$ = 400 wieder $x = 22^{6}/_{7}$°.

19. Aus $(6 + x) . 10 + x . 80 = 6 . 95$ folgt $x = 5^{2}/_{3}$ kg.

20. Die latente Wärme des Wassers = 80°, die des Wasserdampfes = 540°.

21. Zur Erhöhung der Temperatur der 120 kg Wasser von 30° auf 40° waren 120 . 10 = 1200 Kalorien erforderlich. Diese wurden durch die Verdichtung der 2 kg Wasserdampf und Abkühlung des gebildeten Wassers von 100° auf 40°, also um 60° geliefert. Bezeichnet x die latente Wärme eines Kilogramms Wasserdampf, so läßt sich also die vom Dampfe abgegebene Wärme durch $2x + 2.60$ Kalorien ausdrücken; folglich ist $2x + 2.60$ = 1200, also x = 540 Kalorien.

22. Von 100°; denn 1 kg Wasserdampf von 100° C. enthält 650 Kalorien, davon 540 gebunden, welche hier beim Übergange des Dampfes in den tropfbaren Zustand an die 5,4 kg Wasser abgegeben werden und gerade hinreichen, um diese bis auf 100° zu erwärmen.

23. Die 4 kg Wasserdampf enthalten 4 . 640 Kalorien und diese verteilen sich gleichmäßig auf 60 + 4 kg Wasser, so daß also jedes Kilogramm $^{2560}/_{64}$ = 40 Wärmeeinheiten enthält, also die ganze Masse eine Temperatur von 40° zeigt.

Oder auch, wenn x die gesuchte Temperatur bezeichnet, so ergiebt sich aus $60 . x = 4 . (640 - x)$ wieder x = 40°.

24. Aus $60 (x - 16) = 4 (640 - x)$ folgt x = 55°.

25. Die Wärme des Wassers soll um 28 — 11 = 17° C. erhöht werden, man braucht also noch 17 . 300 = 5100 Kalorien. 1 kg Dampf von 121° giebt aber, in Wasser von 28° verdichtet, (121 + 519) — 28 = 612 Kalorien ab. Die Anzahl der nötigen Kilogramme Dampf ist also = $^{5100}/_{612}$ = $8^{1}/_{3}$ kg.

Oder, da $300 . (28 - 11) = x (640 - 28)$ sein muß, so ist $x = 8^{1}/_{3}$ kg und man erhält dann $308^{1}/_{3}$ kg Wasser von 28° C.

26. Nehmen wir an, ein Kilogramm Wasser sei bis — 10° C. erkaltet, und es finde dann plötzlich Eisbildung statt. Die gesamte latente Wärme des

Wassers kann natürlich nicht augenblicklich frei werden, wohl aber eine solche Menge, welche zur Erhöhung der Temperatur des Wassers von 10° C. auf 0° erforderlich ist, also 10 Kalorien, und da in der angenommenen Wassermasse 80 Kalorien an latenter Wärme vorhanden sind, so kann $^1/_8$ des Wassers augenblicklich erstarren.

27. Nach Tabelle 15 des Anhanges schmilzt das Zinn bei 235° C. und die dazu erforderliche latente Wärme ist = 14,3, d. h. 14,3 mal soviel, als nötig ist, um eine dem Zinn gleiche Gewichtsmenge Wasser um einen Grad zu erhöhen. Nach Tabelle 13 ist aber die spezifische Wärme des Zinns = 0,0562, die zum Schmelzen desselben erforderliche latente Wärme würde also dieselbe Gewichtsmenge Zinn um $\frac{14{,}3}{0{,}0562} = 255$ Wärmegrade erhöhen (d. h. es würde die Temperatur des Zinns um eine Wärmemenge zunehmen, die 255 mal so groß ist, wie diejenige, welche die Temperatur des Zinns um 1° erhöht). Die Temperatur würde demnach = 235 + 255 = 490° C. sein.

28. Um x Kilogramm Äther von 0° bis 35,6° C. zu erwärmen, bedarf man, da die spezifische Wärme des Äthers (Tabelle 13 des Anhanges) = 0,52 ist, x . 35,6 . 0,52 Kalorien. Nun ist (nach Tabelle 16) die beim Verdampfen von 1 kg Äther gebundene Wärme = 91,1 Kalorien, es muß also x . 35,6 . 0,52 = 91,1, folglich x = 4,92 kg sein.

Auflösungen zu XXII.

1. Da sich aus der Formel der Aufgabe die Dichte der Luft bei 100° C. und 760 mm Druck = $\frac{1}{1056}$ ergiebt, so verhält sich die Dichte des Wasserdampfes zu der der Luft, beide bei 100° C. und 760 mm Druck, wie $\frac{1}{1700} : \frac{1}{1056} = 0{,}622 : 1$, d. h. näherungsweise wie 5 : 8, und man kann sich vielfachen Beobachtungen gemäß erlauben, dieses Verhältnis auch auf andere, der Luft und dem Wasserdampfe gemeinschaftliche Temperaturen und Spannkräfte auszudehnen, so daß allgemein die Dichte des Wasserdampfes von t° C. und B Millimetern Druck 0,622 oder $\frac{5}{8}$ mal so groß angenommen werden kann, wie die Dichte der Luft von gleicher Temperatur und Spannung.

2. Mittels der aus Tabelle 9 c. des Anhanges entnommenen Dichten des Sauerstoffes und Wasserstoffes ergiebt sich die Dichte des Wasserdampfes $= \frac{1{,}1056 + 2 \,.\, 0{,}0688}{2} = 0{,}622.$

3. Die Spannkraft des Wasserdampfes von 0^0 ist (Tabelle 18) nahe $= 5$ mm; Luft von dieser Spannkraft würde aber eine Dichtigkeit von $\frac{5}{760}$ der Dichtigkeit der Luft von mittlerem Atmosphärendruck, also von $\frac{1}{773} \cdot {}^5/_{760}$ der Dichte des Wassers haben, folglich ist (da sich die Dichtigkeit des Wasserdampfes von beliebiger Temperatur zur Dichtigkeit der Luft von derselben Temperatur und demselben Drucke wie 5 : 8 verhält) die Dichtigkeit des Wasserdampfes von 0^0, auf die letztere Einheit bezogen, $= {}^5/_8 \,.\, {}^1/_{773} \,.\, {}^5/_{760} = 0{,}0000053$.

4. Aus Aufgabe 1 folgt die Dichte des Wasserdampfes bei 40^0 C. und 55 mm Druck $= {}^5/_8 \cdot \frac{273}{313 \,.\, 773} \cdot \frac{55}{760} =$ nahe $\frac{1}{20\,000}$ der Dichte des Wassers.

5. Nach der Auflösung zu 70 a. in XX. wiegt ein Kubikmeter Luft bei einer Temperatur von t^0 C. und einem Drucke von B Millimetern $\frac{1{,}2932}{1 + 0{,}003665 \,.\, t} \cdot \frac{B}{760}$ kg. Da nun aus Tabelle 18 des Anhanges für gesättigten Wasserdampf von 50^0 und 100^0 C. der Druck B bezüglich $= 92$ und 760 mm ist, so ergiebt sich das Gewicht eines Kubikmeters Wasserdampf

a) von 50^0 C. $= {}^5/_8 \cdot \frac{1{,}2932}{1 + 0{,}003665 \,.\, 50} \cdot \frac{92}{760} = 0{,}0827$ kg;

b) von 100^0 C. $= 0{,}5914$ kg.

6. Die Dichtigkeit des gesättigten Wasserdampfes von 25^0 C. ist (da die entsprechende Expansivkraft des Dampfes $= 23{,}6$ mm) $= {}^5/_8 \cdot \frac{23{,}6}{760} \cdot \frac{273}{298 \,.\, 773} = 0{,}000023$, der Dichte des Wassers bei 4^0, also das Gewicht eines Kubikzentimeters dieses Dampfes $= 0{,}000023$ g, folglich das Gewicht eines Kubikmeters des Dampfes $= 0{,}023$ kg.

7. Wasserdampf, der nicht mit Wasser in Verbindung ist, verhält sich bei einer Temperaturerhöhung gerade wie die Luft. Wird aber Luft von 100^0 C. bis auf 121^0 C. erwärmt, ohne daß eine Vergrößerung des Volumens erfolgen kann, so nimmt dadurch die Spannkraft der Luft oder ihr Druck gegen die Gefäßwände in dem Verhältnis von $\left(1 + \frac{100}{273}\right) : \left(1 + \frac{121}{273}\right)$ oder 373 : 394 zu. Man hat also, da die Spannkraft des Wasserdampfes von $100^0 = 760$ mm ist und wenn x die gesuchte Spannkraft dieses Wasserdampfes bei 121^0 bezeichnet,

$$760 : x = 373 : 394 \text{ oder } x = \frac{760 \,.\, 394}{373} = 803 \text{ mm}.$$

8. Das Volumen einer Luftmenge nimmt bei der Erwärmung von 100^0 auf 121^0 C., der vorhergehenden Auflösung gemäß, im Verhältnis von 373 : 394

zu, und da sich der Wasserdampf im vorliegenden Falle gerade so verhält, so hat man aus $1700 : x = 373 : 394$ den gesuchten Raum

$$= \frac{394 \cdot 1700}{373} = \text{beinahe } 1800 \text{ cbm.}$$

9. Weil die Dämpfe bei einer Temperaturerhöhung nicht bloß sich mehr auszudehnen streben, sondern auch dichter werden, indem sich eine größere Menge von Dampf aus dem Wasser entwickelt.

10. Die Dichte der Luft bei 121° C. und normalem Druck ist (vergl. Auflösung zu 4) $= \frac{273}{394 \cdot 773}$ der Dichte des Wassers, also bei 121° C. und doppeltem Atmosphärendrucke $= \frac{2 \cdot 273}{394 \cdot 773}$ der Dichte des Wassers, also die Dichte des Wasserdampfes von 121° C. $= {}^5/_8 \cdot \frac{2 \cdot 273}{394 \cdot 773} =$ nahe $\frac{1}{892}$ der Dichte des Wassers, also nicht ganz das Doppelte der Dichte des Wasserdampfes von 100° C.

11. Aus voriger Auflösung folgt 892 cbm.

12. Wasserdampf von einer Spannung von 5 Atmosphären $= 5 \cdot 760 = 3800$ mm hat eine Temperatur von nahe 153° C., also ist seine Dichte

$$= {}^5/_8 \frac{5 \cdot 273}{426 \cdot 773} = \frac{1}{386} = 0{,}0026 \text{ der Dichte des Wassers.}$$

Ein Kubikdezimeter dieses Dampfes wiegt also 0,0026 kg.

13. Man findet nach der Holzmannschen Interpolationsformel $p = 1078$ mm Quecksilberhöhe, was einem Drucke von ${}^{1078}/_{760} = 1{,}392$ Atmosphären entspricht.

14. Der Druck ist gleich dem von 7 Atmosphären, also auf den Quadratzentimeter $= 7 \cdot 1{,}033 = 7{,}231$ kg.

15. Gesetzt, der Dampf habe im Behälter eine Temperatur von 134° C., seine Expansivkraft sei also = 3 Atmosphären. Beim Ausströmen aus dem Ventile dehnt er sich aus, bis seine Expansivkraft = 1 Atmosphäre ist. Durch diese Ausdehnung erhöht sich die latente Wärme, die im Behälter 640 — 134 = 506° C. betrug, auf 540, so daß dem ausströmenden Dampfe nur noch 100° freie Wärme bleiben. Wegen der erlangten Geschwindigkeit der Dampfteilchen geht aber die Ausdehnung über diese Grenze hinaus und deshalb, sowie wegen der Mischung des ausströmenden Dampfes mit der kälteren Luft wird seine Temperatur viel tiefer als 100°.

16. Da die beobachteten Siedepunkte (99,5° und 97° C.) nach Tabelle 16 im Anhange den Luftdrücken von bezüglich 330,85 und 301,48 Par. Linien entsprechen, so findet man mit Anwendung der Mayerschen Formel (Auflösung zu 25 in XVII) den gesuchten Höhenunterschied = 60000 (*log* 330,85 — *log* 301,48) = 2422 Par. Fuß.

17. 10000 ccm Luft wiegen ${}^{10000}/_{773} = 12{,}93$ g, da 1 ccm Wasser 1 g wiegt und die Dichtigkeit der Luft $= {}^1/_{773}$ derjenigen des Wassers beträgt. Der Ballon wiegt also luftleer 1015 — 12,93 = 1002,07 g, folglich der

Dampf 1010 — 1002,07 = 7,93 g. Da sich nun bei gleichem Volumen die Dichtigkeiten wie die absoluten Gewichte verhalten, so erhält man, die Dichtigkeit der Luft von $0^0 = 1$ gesetzt, aus $x : 1 = 7{,}93 : 12{,}93$, $x = 0{,}613$.

18. Die Druckfläche des Kolbens beträgt 1962 qcm, sein Weg in jeder Sekunde $\frac{48 \cdot 1{,}25}{60} = 1$ m; und der wirksame Dampfdruck = 1,6 — 0,1 = 1,5 kg auf den Quadratzentimeter, folglich der theoretische Effekt = 1962 . 1,5 . 1 = 2943 mkg oder $^{2943}/_{75} = 39$ Pferdekräfte.

Nehmen wir, wie gewöhnlich, die Hälfte des theoretischen Effektes als Nutzeffekt, so ist dieser $19^1/_2$ Pferdekräfte.

19. Die bewegende Kraft des Dampfes ist wegen des entgegenwirkenden Druckes der atmosphärischen Luft 5 — 1 = 4 Atmosphären, also, da der Dampfkolben einen Querschnitt von 500 qcm hat, = 4 . 1,033 . 500 = 2066 kg (nach Aufgabe 1 in XVII), folglich der theoretische Effekt der Maschine (bei einer Geschwindigkeit von 1,5 m in der Sekunde) 1,5 . 2066 = 3099 mkg $= \frac{3099}{75}$ = etwas über 41 Pferdekräfte. Als Nutzeffekt kann man die Hälfte, also nahe 21 Pferdekräfte annehmen.

Zur Hervorbringung dieses Effektes sind in jeder Sekunde 1,5 . 0,05 = 0,075 cbm Dampf von 5 Atmosphären Druck nötig. Ein Kubikmeter Dampf von dieser Spannung wiegt aber (nach der Auflösung zu 12) 1000 . 0,0026 = 2,6 kg, folglich wiegen 0,075 cbm . . . 0,195 kg. In jeder Stunde werden also 3600 . 0,195 = 702 kg oder 702 cdm Wasser verbraucht.

20. Annähernd, aber etwas zu groß, findet man den alsdann stattfindenden mittleren Druck durch das folgende gewöhnliche Verfahren:

der Druck während des ersten Viertelhubes ist . . . = 1,6 kg
der Druck während des zweiten Viertelhubes
ist im Mittel $= \frac{1{,}6 + 0{,}8^*)}{2} = 1{,}2$ „
der Druck während des dritten Viertelhubes
ist im Mittel $= \frac{0{,}8 + 0{,}53}{2} = 0{,}66$ „
der Druck während des vierten Viertelhubes
ist im Mittel $= \frac{0{,}53 + 0{,}4}{2} = 0{,}46$ „
3,92 kg

*) Hierbei ist angenommen, daß der Druck des Dampfes zu Ende des zweiten Viertelhubes $\frac{1{,}6}{2} = 0{,}8$ kg, zu Ende des dritten Viertelhubes $\frac{1{,}6}{3} = 0{,}53$ kg u. s. w. betrage, weil er einen zweimal, dreimal u. s. w. so großen Raum einnimmt; dies ist jedoch nicht ganz richtig, weil die Temperatur des Dampfes durch die Expansion abnimmt, der Dampf also z. B. bei der halben Dichte weniger als halb soviel Spannung hat.

Hieraus der mittlere Druck $= \frac{3{,}92}{4} = 0{,}98$ kg und nach Abzug des Gegendrucks von 0,1 kg der mittlere Druck auf das Quadratzentimeter = 0,88 kg. Also der theoretische Effekt = 1962 . 0,88 . 1 = 1726,56 mkg = 23 Pferdekräfte und folglich der Nutzeffekt = 11,5 Pferdekräfte (etwas mehr als die Hälfte des Nutzeffektes, welchen man mittels derselben Maschine ohne Expansion erhält, während doch nur der vierte Teil des zur letzteren erforderlichen Dampfes verbraucht wird, woraus eine bedeutende Ersparnis an Brennmaterial hervorgeht).

21. a) Ein Pfund Wasser giebt 1700 : 61,83 = 27,5 Kubikfuß Wasserdampf von 100° und kann also durch diesen einen Kolben von 1 Quadratfuß, welcher mit 144 . 14,13 = 2034,7 Pfd. belastet ist, 27,5 Fuß hoch heben, folglich ist die Arbeit dieses Dampfes = 27,5 . 2034,7 = 55 954 Fußpfund.

b) Ein Kilogramm Wasser giebt 1700 cdm Wasserdampf von 100° und kann also durch diesen einen Kolben von 1 qdm, welcher mit 100 . 1,033 = 103,3 kg belastet ist, 1700 dm oder 170 m hoch heben, folglich ist die Arbeit dieses Dampfes = 170 . 103,2 = 17 561 mkg, also die Arbeit des Dampfes von 0,5 kg Wasser = 8780,5 mkg.

Nun ist 1 mkg = 3,1862 . 2 = 6,3724 Fußpfunde. Multipliziert man mit dieser Zahl die vorher gefundene, so erhält man gleichfalls die in a) gefundene Anzahl von Fußpfunden.

22. Ein Kubikmeter mit Wasserdampf völlig gesättigter Luft enthält ebensoviel Dampf, als derselbe Raum im luftleeren Zustande, also (vgl. Aufgabe 6)

$$^5/_8 \cdot \frac{1000}{773} \cdot \frac{23{,}6}{760} \cdot \frac{273}{298} = 0{,}023 \text{ kg}.$$

23. $$^5/_8 \cdot \frac{1000}{773} \cdot \frac{105}{760} \cdot \frac{273}{298} = 0{,}0102 \text{ kg}.$$

24. Das Gewicht der in einem bestimmten Raume enthaltenen Dampfmenge bei 13° C. verhält sich zu dem bei 24° C., wenn in beiden Fällen der Raum mit Dämpfen gesättigt ist, wie die diesen Temperaturen entsprechenden Spannkräfte der Dämpfe, d. h. im vorliegenden Falle wie 11,16 zu 22,18. Demnach beträgt in unserer Aufgabe die vorhandene Dampfmenge $\frac{11{,}16}{22{,}18}$ der möglichen Dampfmenge, oder, wie es oft ausgedrückt wird, $\frac{11{,}16}{22{,}18} \cdot 100$ = nahe 50 Proz. der möglichen Dampfmenge.

25. Die 14000 Millionen Kubikmeter enthalten, da die Dichtigkeit des Wasserdampfes von 20° = 0,000017 ist, 17 . 44000 = 238000 cbm Wasser. Wenn aber die Temperatur auf 11° herabsinkt, so können, wie sich auf ähnliche Weise ergiebt, nur noch 10 . 14000 = 140000 cbm Wasser als Dampf in jenem Raume zurückbleiben, es müssen also 238000 — 140000 = 98000 cbm Wasser als Regen niedergeschlagen werden, die sich auf eine Fläche von 14 Millionen Quadratmeter verteilen, so daß ein Kubikmeter

auf je 143 qm oder 7 cdm auf jeden Quadratmeter fällt, also die Regenhöhe 7 mm betragen würde.

26. (13 — 10) . 14000 = 42000 cbm.

27. Sie beruht 1) darauf, daß ein bestimmter Raum bei einer bestimmten Temperatur auch nur eine bestimmte Menge Wasser in Dampfform aufnehmen kann, wovon also stets ein Teil in Nebelgestalt übergehen muß, wenn die Temperatur sinkt, sowie 2) darauf, daß die Wärmekapazität der Luft mit ihrer Verdünnung zunimmt. Aus letzterem Grunde nimmt die Temperatur der Luft unterm Rezipienten nach den ersten Kolbenstößen ab, und folglich muß nach 1) ein Teil des Wasserdampfes in Nebelform sich niederschlagen (wenn nämlich die Luft völlig oder nahezu mit Wasserdampf gesättigt war). Da nun mit der Luft immer auch ein Teil des Wasserdampfes aus dem Rezipienten geschafft wird, so kann sich der Nebel nach weiteren Kolbenstößen wieder in Dampfform auflösen.

28. Durch Erhitzen wird ein Teil der Feuchtigkeit herausgeschafft, nach dem Erkalten schlägt sich aber wieder ein Teil an die Wände des Gefäßes nieder. Wenn man aber ein Rohr in das erhitzte Glas steckt und saugt, so gelingt die Austrocknung viel rascher und besser.

29. Im ersten Falle, wenn es draußen kälter ist als in der Stube, im zweiten, wenn es in der Stube kälter ist als draußen.

30. Weil Öl fast gar nicht verdunstet.

Auflösungen zu XXIII.

1. 5 . 7800 = 39000 Kalorien (nach Tabelle 19) *).

2. Für 1 Thlr. erhält man $^{1500}/_{12}$ = 125 kg Holz, die bei ihrer Verbrennung 125 . 3000 = 375000 Kalorien erzeugen, dagegen für dasselbe Geld $\frac{350}{2^1/_3}$ = 150 kg Torf, welche 150 . 1500 = 225000 Kalorien geben; der Brennwert des Holzes verhält sich also zu dem des Torfes wie 5 : 3.

3. Beim Verbrennen von 1 kg Steinkohle entstehen 6000 Kalorien, zum Verdampfen von 6 kg Wasser sind aber nur 6 . 640 = 3840 erforderlich.

---

*) In diesem Abschnitt sind die älteren Beobachtungen der Tab. 19 beibehalten worden, weil sich aus diesen eine Folgerung ergiebt (siehe Aufgabe 9), welche eine in der Praxis bewährte genäherte Berechnung der Verbrennungswärme vegetabilischer Brennstoffe aus ihrer Zusammensetzung gestattet.

folglich gehen verloren 6000 — 3840 = 2160 Kalorien. (Überhaupt rechnet man die in den besten Öfen benutzbare Wärme nur zu $^3/_5$ der entwickelten.)

4. $\frac{300}{6} = 50$ kg in der Stunde, wenn man, wie gewöhnlich, 1 kg Steinkohle als zum Verdampfen von 6 kg Wasser erforderlich annimmt.

5. 1 kg Kohlenstoff bedarf zu seiner vollständigen Verbrennung 2,65 kg oder etwa 1,85 cbm Sauerstoff, also, da 1 cbm Luft nur 0,21 cbm Sauerstoff enthält, $\frac{1{,}85}{0{,}21} = 8{,}8$ cbm Luft. Hiernach würde also durch 1 kg Steinkohle $^6/_7 \cdot 8{,}8 = 7{,}5$ cbm Luft verbraucht. Weil aber gewöhnlich nur die Hälfte der in den Rost dringenden Luft ihren Sauerstoff abgiebt, so muß man das Doppelte der eben berechneten Zahl nehmen.

6. Da sich der Wärmeeffekt der Verbindung aus den Wärmeeffekten der Bestandteile zusammensetzt, der Wärmeeffekt des Wasserstoffes aber (Tabelle 19) dreimal so groß ist, wie der des Kohlenstoffes, so hat man $a = 3w + k$.

7. Wenn der ganze Sauerstoffgehalt als mit Wasserstoff schon verbunden betrachtet werden muß, so hat man, da 1 Gewichtsteil Sauerstoff mit $^1/_8$ Gewichtsteil Wasserstoff im Wasser verbunden ist, in der Formel der vorigen Aufgabe statt w zu setzen $w - {}^1/_8 s$, so daß man erhält $a = 3(w - {}^1/_8 s) + k$; den nicht im Wasser der Verbindung vorkommenden Teil des Sauerstoffes hat man nicht zu berücksichtigen.

8. Da die Hälfte des im Alkohol vorhandenen Sauerstoffes als bereits mit Wasserstoff verbunden zu betrachten ist, so hat man nach der Formel der vorigen Auflösung den gesuchten Wärmeeffekt, auf den eines gleichen Gewichtes Kohlenstoff als Einheit bezogen, $= 3\,(0{,}129 - {}^1/_8 \cdot {}^1/_2 \cdot 0{,}3444) + 0{,}5266 = 0{,}85$, oder, da ein Gewichtsteil Kohlenstoff 7800 Kalorien erzeugt, $= 0{,}85 \cdot 7800 = 6630$ Kalorien, was von der durch Versuche gefundenen Zahl 6700 (Tabelle 19) nur wenig abweicht.

9. Da 1 Gewichtsteil Kohlenstoff zu seiner Verbrennung $2^2/_3$ Gewichtsteile Sauerstoff und 1 Gewichtsteil Wasserstoff zu seiner Verbrennung 8 Gewichtsteile Sauerstoff verbrauchen, und da ferner 1 Gewichtsteil Kohlenstoff bei seiner Verbrennung 78 Gewichtsteile Wasser und 1 Gewichtsteil Wasserstoff bei seiner Verbrennung 236 Gewichtsteile Wasser vom Gefrierpunkt bis zum Siedepunkte erhitzen, so folgt, daß 1 Gewichtsteil Sauerstoff bei seiner Verbrennung mit Kohlenstoff $\frac{78}{2^2/_3} = 29{,}25$, 1 Gewichtsteil Sauerstoff bei seiner Verbrennung mit Wasserstoff $^{236}/_8 = 29{,}5$ Gewichtsteile Wasser von 0^0 bis 100^0 C. erhitzen; der Wärmeeffekt des Sauerstoffs beträgt also in runder Zahl 3000 Kalorien.

Bei Berechnungen wird gewöhnlich diese runde Zahl 3000 genommen, nicht bloß der Erleichterung wegen, sondern auch, weil es sehr wahrscheinlich ist, daß bei den betreffenden Versuchen ein etwas zu geringer Wärmeeffekt gefunden wurde. Bezeichnet man die von einem Gewichtsteile eines Brenn-

materials erforderliche Sauerstoffmenge mit s, so läßt sich der Wärmeeffekt dieses Brennmaterials in Kalorien ausdrücken durch $a = 3000 \cdot s$.

10. Das Verfahren ist darauf gegründet, daß für jeden Gewichtsteil Sauerstoff, welchen Kohlenstoff und Wasserstoff bei ihrer Verbrennung aufnehmen, 3000 Kalorien entwickelt werden (siehe vorige Aufgabe). — Da nun im Bleioxyd 12,94 Gewichtsteile Blei mit 1 Gewichtsteil Sauerstoff verbunden sind, so waren mit den nach der Aufgabe erhaltenen n Gramm reguliniſchem Blei $\frac{n}{12{,}94}$ g Sauerstoff verbunden, welche zur Verbrennung von 1 g Steinkohle verwendet worden sind, folglich ist der gesuchte Wärmeeffekt

$$= 3000 \cdot \frac{n}{12{,}94} = 231{,}8 \cdot n \text{ Kalorien.}$$

11. Durch die Verbrennung von 1 Gewichtsteil Kohlenstoff werden $3^2/_3$ Gewichtsteile Kohlendioxyd gebildet und dieses Kohlendioxyd muß alle beim Verbrennungsprozesse entwickelte Wärme in sich aufnehmen. Nun ist der Wärmeeffekt des Kohlenstoffes, wenn man ihn nach Auflösung zu 9 berechnet, $= 3000 \cdot 2^2/_3 = 8000$ Kalorien, d. h. 1 Gewichtsteil Kohlenstoff vermag durch die bei seiner Verbrennung entwickelte Wärme 8000 Gewichtsteile Wasser von 0^0 bis auf 1^0 C. zu erwärmen, oder, was dasselbe ist, 1 Gewichtsteil Wasser von 0^0 bis auf 8000^0 C., also $3^2/_3$ Gewichtsteile Wasser von 0^0 bis auf $\frac{8000}{3^2/_3} = 2182^0$ C., und diese Temperatur würde das in jedem Moment entwickelte Kohlendioxyd haben müssen, wenn seine Wärmekapazität dieselbe wäre, wie die des Wassers. Nun ist aber die spezifische Wärme des Kohlendioxyds, auf die des Wassers bezogen, $= 0{,}2164$, folglich die Verbrennungstemperatur des Kohlenstoffes im reinen Sauerstoff $\frac{2182}{0{,}2164}$ $= 10\,083^0$ C. Diese Bestimmungsweise läßt sich verallgemeinern. Bezeichnet nämlich s diejenige Gewichtsmenge Sauerstoff, mit welcher sich 1 Gewichtsteil eines brennbaren Körpers bei seiner Verbrennung verbindet, und σ die spezifische Wärme des Verbrennungsproduktes, so ist die Verbrennungstemperatur

$$T = 3000 \cdot \frac{s}{(1 + s)\,\sigma}.$$

12. Nach der Formel der vorigen Auflösung erhält man

$$T = 3000 \cdot \frac{8}{(1 + 8) \cdot 0{,}475} = 5614^0 \text{ C.}$$

13. In der atmosphärischen Luft sind mit je 1 Gewichtsteil Sauerstoff $\frac{76{,}9}{23{,}1}$ $= 3{,}33$ Gewichtsteile Stickstoff gemengt. Da nun 1 Gewichtsteil Kohlenstoff zu seiner Verbrennung $2^2/_3$ Gewichtsteile Sauerstoff verbraucht, so werden dadurch aus der atmosphärischen Luft $2^2/_3 \cdot 3{,}33 = 8{,}88$ Gewichtsteile Stickstoff abgeschieden. Diese 8,88 Gewichtsteile Stickstoff von einer Temperatur vor der Erhitzung, die man ohne erheblichen Fehler $= 0^0$ annehmen

kann, mischen sich nun mit den durch die Verbrennung entstandenen $3^2/_3$ Gewichtsteilen Kohlendioxyd von 10083° C. (siehe Auflösung zu 11), und da die spezifische Wärme des Stickstoffes = 0,2440, die des Kohlendioxyds = 0,2164 ist, so erhält man (nach Aufgabe 7 in XXI) die Temperatur der Mischung

$$= \frac{3^2/_3 \,.\, 10083 \,.\, 0{,}2164 + 8{,}88 \,.\, 0 \,.\, 0{,}2440}{3^2/_3 \,.\, 0{,}2164 + 8{,}88 \,.\, 0{,}2440} = 2703^0\,\text{C.},$$

welches die gesuchte Verbrennungstemperatur ist.

Verallgemeinert man wieder diese Bestimmungsweise mittels der zu Ende der Aufgabe 11 gebrauchten Bezeichnungen, so erhält man nach den nötigen Reduktionen

$$T = 3000 \cdot \frac{s}{(1+s)\,\sigma + 0{,}917\,s}.$$

14. Nach der Formel der vorigen Auflösung erhält man

$$T = 3000 \cdot \frac{8}{(1+8) \,.\, 0{,}475 + 0{,}917 \,.\, 8} = 2067^0\,\text{C.}$$

15. Der Grund liegt darin, daß

1) die spezifische Wärme des Wasserdampfes fast viermal so groß ist wie die des Kohlendioxyds, d. h. daß die durch Verbrennung des Wasserstoffes erzeugte Wärme an einen Körper, den Wasserdampf, gebunden ist, welcher eine beinahe viermal so große Wärmemenge nötig hat (um auf dieselbe Temperatur erhitzt zu werden), als das Kohlendioxyd, an welches die durch Verbrennung des Kohlenstoffes entwickelte Wärme gebunden ist;

2) daß ein Gewichtsteil Wasserstoff bei der Verbrennung 9 Gewichtsteile Wasserdampf liefert, während 1 Gewichtsteil Kohlenstoff nur $3^2/_3$ Gewichtsteile Kohlendioxyd erzeugt.

Auflösungen zu XXIV.

1. Damit Eis von 0° in flüssiges Wasser von 0° übergehe, bedarf es einer großen Menge Wärme (1 kg 80 Kalorien); der Annahme aber, daß diese Wärme durch den bei der Reibung stattfindenden Druck aus dem Eise herausgepreßt werden könnte, steht die Thatsache entgegen, daß das Eis eine geringere (nur halb so große) Wärmekapazität besitzt als das Wasser.

2. Im *festen* Zustande schwingen die Moleküle um gewisse Gleichgewichtslagen, aus denen sie zwar durch eine Wärmequelle etwas herausgedrängt werden können, ohne aber ihre gegenseitige Lage zu verändern und den Bereich der gegenseitigen Anziehung zu verlassen. Im *flüssigen* Zustande sind zwar die Moleküle der gegenseitigen Anziehung nicht ganz entzogen, haben aber keine bestimmte Gleichgewichtslage mehr; sie können sich um ihren Schwerpunkt drehen und der Schwerpunkt selbst kann sich aus seiner Lage fortbewegen, insofern andere gleichwirkende Moleküle an die Stelle der verlassenen treten; es findet also in der Flüssigkeit eine schwingende, wälzende und fortschreitende Bewegung statt, wobei sich nur an der Grenze der Flüssigkeit einzelne Moleküle der Anziehung durch die übrigen entziehen können, so daß auch ohne äußeren Druck das Volumen nahezu erhalten bleibt. Im *gasförmigen* Zustande sind die Moleküle aus dem Bereich ihrer gegenseitigen Anziehung herausgekommen, sie bewegen sich in gerader Linie mit gleichbleibender Geschwindigkeit, bis sie gegen andere Gasmoleküle oder eine für sie undurchdringliche Wand stoßen, dadurch den Druck auf diese letztere verursachen, wieder zurückfliegen ꝛc.; mit den fortschreitenden Bewegungen sind wahrscheinlich auch drehende und schwingende verbunden.

3. Nach dieser Theorie werden die schwingenden Bewegungen der Atome durch den Einfluß der Wärmequelle allmählich schneller und größer, dadurch die Atome auseinander gedrängt und das Volumen des Körpers vergrößert; ein Teil der lebendigen Kraft der schwingenden Atome wird also in die zur Vergrößerung des Volumens erforderliche Arbeit umgesetzt und geht für die Einwirkung auf unsere Nerven und auf das Thermometer verloren. (Der Vorgang ist dem Heben eines schweren Kärpers vergleichbar, dem die zu Gebote stehende, die Schwere überwindende Kraft zugleich eine pendelartige Bewegung zu erteilen vermag.)

   Hört die Einwirkung der Wärmequelle auf, so verringert sich die Energie der Schwingungen, die vorher zum Teil überwundene Anziehungskraft der Atome wird wieder wirksamer, die Atome fallen aufeinander und dadurch wird derjenige Teil der lebendigen Kraft, der bei der Erwärmung in Hebungsarbeit verwandelt wurde, wieder ersetzt (ähnlich wie ein von einer Höhe fallender Körper eine lebendige Kraft erlangt, vermöge welcher ein Körper von gleichem Gewicht wieder auf die nämliche Höhe gehoben werden könnte).

4. Aus der bedeutenden Größe der Arbeit, die verrichtet werden muß, um die Molekularanziehung beim Übergang in den flüssigen Zustand *zum großen Teil*, bei der Verdampfung *ganz* zu überwinden (siehe Aufgabe 13). Zu dieser *inneren* Arbeit kommt bei der Verdampfung noch die *äußere*, die in der Überwindung des Atmosphärendrucks besteht.

5. Daß diese Atome gleiche spezifische Wärme haben, daß also ein Wasserstoffatom dieselbe lebendige Kraft besitzt, wie ein Sauerstoff- oder Stickstoffatom, folglich, was dem Wasserstoffatom an Masse abgeht, durch größere Geschwindigkeit ersetzt wird.

6. Daraus, daß das Produkt aus dem Atomgewicht und der spezifischen Wärme des Atoms für alle Elemente nahe das nämliche ist und man annehmen kann, alle diese Produkte würden einander vollkommen gleich sein, wenn man die spezifische Wärme für einen bestimmten Zustand der Atome rücksichtlich ihrer Temperatur und Aggregatform in Rechnung bringen könnte.

7. Um ein Kubikmeter atmosphärischer Luft von 0° C. Temperatur und bei einem konstanten Druck von 0,76 m Barometerhöhe um 1° C. zu erwärmen, sind, da das Gewicht dieses Luftquantums = 1,2932 kg und die spezifische Wärme der Luft bei konstantem Druck = 0,2375 ist, 1,2932 . 0,2375 = 0,30714 Kalorien nötig. Dagegen sind zur Erhöhung der Temperatur desselben Quantums Luft um 1° C. bei konstantem Volumen, da sich die Wärmemenge, welche die Luft bei konstantem Volumen aufnimmt, zu derjenigen, welche sie bei konstantem Druck aufnimmt, wie 1 zu 1,421 verhält, nur $\frac{0{,}30739}{1{,}41} = 0{,}21784$ Kalorien erforderlich. Folglich werden 0,30714 — 0,21784 = 0,08930 Kalorien bloß zur Ausdehnung verwendet, wenn ein Kubikmeter Luft von 0° C. bei einem konstanten Druck von 0,76 m auf 1° C. erwärmt wird; die übrige Wärme dagegen dient bloß zur Erhöhung der Temperatur.

Denken wir uns nun jenes Kubikmeter Luft in einer Säule von 1 qm Grundfläche und mit fester Wandung so eingeschlossen, daß sie sich nach einer Richtung hin ausdehnen kann und dabei den Druck der Atmosphäre zu überwinden hat. Für jede Temperaturzunahme von 1° C. dehnt sich aber die Luft um 0,003665 ihres Volumens bei 0° aus, also im vorliegenden Falle jenes Kubikmeter um eine Länge von 0,003665 m, und überwindet dabei einen Atmosphärendruck von 1000 . 0,76 . 13,6 = 10336 kg (die mittlere Höhe der Quecksilbersäule im Barometer = 0,76 m, die Dichte des Quecksilbers = 13,6 gesetzt). Daraus folgt, daß mittels der vorhin berechneten Wärmemenge von 0,08930 Kalorien eine Last von 10336 kg um 0,003665 m, also durch eine Kalorie eine Last von $\frac{10336 \cdot 0{,}003665}{0{,}08930}$ = 424 kg um 1 m gehoben werden kann (welche Berechnung zuerst Dr. Mayer gab). Im Mittel aus vielfachen genauen Versuchen hat Joule das Arbeitsäquivalent der Wärmeeinheit (Kalorie) ebenfalls = 424 mkg gefunden.

8. $\frac{1275 \cdot 20}{424} = 60$ Kalorien (ungefähr), also eine Wärmemenge, welche 60 kg Wasser um 1° C. zu erwärmen vermag.

9. Da (nach Aufgabe 7) 424 mkg einer Kalorie äquivalent sind, so ist 1 mkg äquivalent $\frac{1}{424} = 0{,}00236$ Kalorien, also h Meterkilogramm = 0,00236 . h Kalorien.

10. Betrachtet man v als die Endgeschwindigkeit des Körpers nach einem Falle von der Höhe h, so ist nach voriger Auflösung die erzeugte Wärme = 0,00236 . $\frac{v^2}{2g} = 0{,}00012 \cdot v^2$ Kalorien.

11. Für jedes Kilogramm des Asteroids ist nach voriger Aufgabe die entwickelte Wärme $= 0{,}00012 \cdot (6 \cdot 7500)^2 = 243\,000$ Kalorien.

12. Ist Q das Gewicht der Kugel in Kilogrammen, so entwickelt sie bei ihrem Falle $\frac{Qh}{424} = 0{,}00236\ Qh$ Kalorien, die sich auf die Masse der Kugel verteilen. Ist t die dadurch bewirkte Temperaturerhöhung derselben, so kann die erzeugte Wärmemenge auch ausgedrückt werden durch Qtw Kalorien, und aus der Gleichsetzung dieser beiden Ausdrücke erhält man

$$t = \frac{0{,}00236 \cdot h}{w} = \frac{0{,}00236 \cdot 40}{0{,}0324} = 2{,}9^0\,\text{C}.$$

Warum ist das Gewicht Q der Kugel auf die Temperaturerhöhung ohne Einfluß?

13. a) Beim Verbrennen eines Kilogramms Wasserstoff werden 34 000 Kalorien erzeugt (Tabelle 19), welche einer mechanischen Arbeit von $34000 \cdot 424$ oder über 14 Millionen Meterkilogramm äquivalent sind.

b) Bei der Verdichtung von 9 kg Wasserdampf im Wasser werden $9 \cdot 540 = 4860$ Kalorien frei, deren Arbeitswert $= 4860 \cdot 424$ oder über 2 Millionen Meterkilogramm ist.

c) Beim Übergang von 9 kg Wasser von 0^0 in Eis werden nahe $9 \cdot 80 = 720$ Kalorien frei, die einer Arbeit von 306 000 mkg entsprechen.

14. Während bei der Leitung der Wärme die Vibrationen wesentlich nur von einem materiellen Teilchen zu den benachbarten materiellen sich fortpflanzen, findet bei der Strahlung die Fortpflanzung der Schwingungen mittels des Äthers statt. Jene Fortpflanzung entspricht der des Schalles, diese der des Lichtes.

Auflösungen zu XXV.

1. $tg\ {}^1/_2 x = {}^{15}/_{18} = 0{,}833\ldots$, also ${}^1/_2 x = 39^0\,48'\,20''$ und folglich $x = 79^0\,36'\,40''$.

2. $x = 2 \cdot 51\,830 \cdot tg\ 15'\,31{,}5'' = 468$ Meilen.

3. a) $x = \frac{3}{tg\ 20''} =$ nahe 309,4 m.

b) Nicht in weiterer Entfernung, als den schwarzen Kreis in a), weil sonst die Dicke des Pfahls, also der Pfahl überhaupt nicht zu sehen wäre.

4. Aus $1 : (x\pi) = 1 : (180 \cdot 60 \cdot 60)$ folgt $x = \frac{180 \cdot 60 \cdot 60}{3{,}1416}$ = etwas mehr als 206 000 m oder 27,6 Meilen.

5. $\alpha = \frac{0{,}001 \cdot 180 \cdot 60}{3{,}1416}$ = nahe 3,75 Minuten.

6. Der gesuchte geometrische Ort ist ein Kreisbogen, welchem die gegebene Strecke als Sehne und der Sehwinkel als Peripheriewinkel zugehört.

7. Unser Urteil über die Größe eines Gegenstandes hängt ab von dem Sehwinkel, unter welchem der Körper erscheint, und von unserer Meinung über seine Entfernung. Diese wird aber wesentlich bestimmt einesteils durch das Vorhandensein uns bekannter Gegenstände zwischen unserm Auge und dem betrachteten Gegenstande, andernteils durch die Beleuchtung oder die natürliche Helligkeit desselben. Wir schätzen eine Entfernung um so richtiger, je mehr uns bekannte Gegenstände sich innerhalb derselben befinden, beim Mangel solcher Gegenstände schätzen wir die Entfernung in der Regel zu klein. Ferner erscheint uns ein Gegenstand bei guter Beleuchtung näher zu sein als bei schlechter. Bei einem hoch stehenden Himmelskörper fehlen die zur Vergleichung dienenden zwischenliegenden Gegenstände, auch wird sein Licht weniger durch die Atmosphäre geschwächt, als bei einem tiefer stehenden, der letztere scheint uns daher entfernter zu sein, als der erstere, folglich, da wir ihn unter dem nämlichen Sehwinkel erblicken, einen größeren Durchmesser zu haben.

8. Auf einer weiten Ebene, besonders einer großen Wasserfläche, beurteilt man die Entfernung eines Gegenstandes meist zu kurz (siehe Auflösung zur vorigen Aufgabe); daher fällt die Kugel gewöhnlich vor Erreichung des Zieles nieder.

9. Aus der Ähnlichkeit der beiden Dreiecke (Fig. 42) ABC und abc (wegen $A = a$, $C = c$) folgt $0{,}5 : 10{,}4 = 2 : x$, also $x = 41{,}6$ m.

10. $x = \frac{10}{tg\ 30^0} = 17{,}32$ m.

11. Von jedem Punkte der Sonne fällt ein Lichtbündel, das man wegen der großen Entfernung der Sonne als ein prismatisches betrachten kann, auf die Öffnung O (Fig. 43), die wir zunächst als eine runde und sehr enge

Fig. 42.

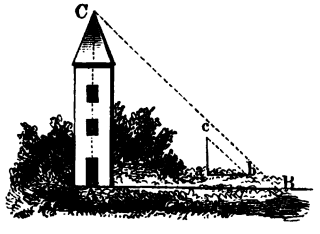
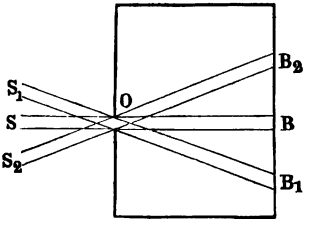


Fig. 43.



annehmen wollen, und durch diese auf den Schirm. Ist $S_1 B_1$ ein solches Lichtbündel vom oberen Rande der Sonne, $S_2 B_2$ ein solches von ihrem

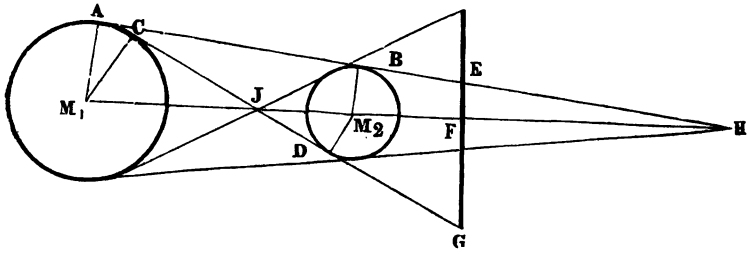
unteren Rande, so ist der Winkel $S_1 O S_2 = B_1 O B_2$ nahe gleich dem Sehwinkel von 32 Minuten, unter welchem der Durchmesser der Sonne erscheint. Hat die Öffnung die Form eines Quadrates, so würde, wenn nur von einem Punkte der Sonne ein Lichtbündel auf die Öffnung fiele, ein helles Quadrat auf dem Schirme erscheinen; denkt man sich aber ein solches Lichtbündel um den Rand der Sonne gedreht, so erhält man auf dem Schirme einen Kreis u. s. w. Bei größerer Öffnung würde, wenn bloß von einem Punkte der Sonne ein Lichtbündel darauf fiele, ein Bild von der Größe der Öffnung auf dem Schirme entstehen; die vom Sonnenrande kommenden Strahlen schließen aber mit den vom Mittelpunkte kommenden am Rande der Öffnung einen Winkel von 16 Minuten ein, woraus sich eine Verbreiterung des Bildes ergiebt.

12. ad I. Aus Fig. 44 folgt wegen der Ähnlichkeit der beiden Dreiecke

$$M_1 AH \text{ und } M_2 BH \cdots \frac{M_1 M_2 + M_2 H}{M_1 A} = \frac{M_2 H}{M_2 B}$$

und daraus $M_2 H = \dfrac{M_1 M_2 \,.\, M_2 B}{M_1 A - M_2 B} = \dfrac{40 \,.\, 4}{12 - 4} = 20$ cm.

Fig. 44.



ad II. Aus den ähnlichen Dreiecken $M_2 BH$ und FEH folgt

$$FE = \frac{FH \,.\, M_2 B}{BH} = \frac{FH \,.\, M_2 B}{\sqrt{(M_2 H)^2 - (M_2 B)^2}} = \frac{(20 - 5) \,.\, 4}{\sqrt{20^2 - 4^2}}$$
$$= 3{,}06 \text{ cm}.$$

ad III. Aus den ähnlichen Dreiecken $M_1 CJ$ und $M_2 DJ$ folgt

$$\frac{M_1 J}{M_1 C} = \frac{M_2 J}{M_2 D} \text{ und daraus } \frac{M_1 J + M_2 J}{M_1 C + M_2 D} = \frac{M_2 J}{M_2 D}, \text{ also}$$

$$M_2 J = \frac{(M_1 J + M_2 J) \,.\, M_2 D}{M_1 C + M_2 D} = \frac{M_1 M_2 \,.\, M_2 D}{M_1 C + M_2 D} = \frac{40 \,.\, 4}{12 + 4}$$
$$= 10 \text{ cm}.$$

Ferner folgt nun aus den beiden ähnlichen Dreiecken $M_2 DJ$ und GFJ:

$$FG = \frac{M_2 D \,.\, FJ}{DJ} = \frac{M_2 D \,.\, (M_2 J + M_2 F)}{\sqrt{(M_2 J)^2 - (M_2 D)^2}} = \frac{4 \,.\, (10 + 5)}{\sqrt{10^2 - 4^2}}$$
$$= 6{,}547 \text{ cm}.$$

13. Aus der vorigen Auflösung folgt, wenn man die entsprechenden Werte der vorliegenden Aufgabe setzt,

$$\text{ad I.}\quad x = \frac{23984 \,.\, 1}{112 - 1} = 216 \text{ Erdhalbmesser,}$$

$$\text{ad II.}\quad x = \frac{(216 - 60) \,.\, 1}{\sqrt{216^2 - 1}} = 0{,}72 \text{ Erdhalbmesser,}$$

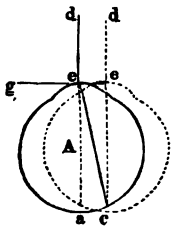
$$\text{ad III.}\quad x = \frac{1 \cdot \left(\frac{23984}{112 + 1} + 60\right)}{\sqrt{\left(\frac{23984}{12 + 1}\right)^2 - 1^2}} = 1{,}28 \text{ Erdhalbmesser.}$$

Da der Mondhalbmesser nur 0,25 Erdhalbmesser beträgt, so folgt aus II., daß eine ringförmige Mondfinsternis nicht stattfinden kann.

14. $x = {}^{590000}/_{14} = 42\,100$ Meilen.

15. Bezeichnet x die gesuchte Geschwindigkeit, in Meilen ausgedrückt, sowie τ den sehr kleinen Zeitteil, welchen das Licht nötig hat, um von der Pupille des Auges zum Sehnerv zu gelangen, so ist $x \,.\, \tau$ der im Inneren des Auges vom Licht durchlaufene und $4{,}12 \,.\, \tau$ der vom Auge senkrecht auf die Richtung des Sternenlichts zurückgelegte Weg während der Zeit τ. Ein auf der Pupille anlangender Lichtstrahl des Sternes wird nun freilich in gerader Richtung fortgehen, aber, da sich das Auge mit der Erde bewegt, nicht an derjenigen Stelle der Netzhaut anlangen, zu welcher er gekommen sein würde, wenn das Auge still gestanden hätte, sondern an einer Stelle der Netzhaut, die nach derjenigen Seite hin liegt, von welcher sich die Erde herbewegt. Dies macht aber auf den Beobachter denselben Eindruck, als ob der Lichtstrahl schief eingetreten wäre. Ein Strahl da also (Fig. 45), der bei ruhendem Auge A auf den Punkt a treffen würde, trifft wegen der Bewegung des Auges nach der Richtung eg den Punkt c und daher scheint es dem Beobachter, der Strahl habe die schiefe Richtung ec.

Fig. 45.



Zur Bestimmung von x hat man nun $tg\ aec = \frac{ac}{ae}$, d. h. $tg\ 20{,}25'' = \frac{4{,}12 \,.\, \tau}{x \,.\, t}$, also $x = \frac{4{,}12}{tg\ 20{,}25''} = 41\,961$ Meilen, welches Resultat nahe genug mit dem der vorigen Aufgabe übereinstimmt.

16. Aus der dauernden Unsichtbarkeit des Bildes in f, während das Rad 12,6 Umdrehungen in der Sekunde macht, muß man schließen, daß die vom Spiegel s durch eine Zahnlücke nach dem Spiegel p gehenden Strahlen erst dann wieder nach f zurückkehrten, als statt der Zahnlücke der nächste Zahn vor den Punkt f getreten und dadurch die Fortpflanzung des Lichtes nach dem Auge gehindert war. Um also die Strecke zwischen den beiden Fernrohren zweimal, nämlich $2 \,.\, 8633 = 17\,266$ m zu durchlaufen, bedurfte das Licht einer Zeit, die sich,

weil das Rad 720 Zähne und ebensoviel Zahnlücken hatte und 12,6 Umdrehungen in der Sekunde machte, $= \frac{1}{2 \cdot 720 \cdot 12{,}6}$ Sekunden ergiebt, woraus die Geschwindigkeit des Lichtes (in der Sekunde, die Meile $= 7500$ m gesetzt) $= \frac{17266}{7500} : \frac{1}{2 \cdot 720 \cdot 12{,}6} = 41742$ Meilen folgt. Die dauernde Sichtbarkeit des Bildes in f, wenn das Rad eine doppelt so große Umdrehungsgeschwindigkeit hatte wie im vorigen Falle, erklärt sich, was kaum der Bemerkung bedarf, nunmehr daraus, daß im Augenblick der Rückkehr des Lichtes nach f die nächste Zahnlücke an die Stelle des Zahns im vorigen Falle getreten und die Fortpflanzung des Lichtes nach dem Auge ermöglicht war u. s. w.

Auflösungen zu XXVI.

1. $L : 1 = FI : fi$.
2. Durch $3 \cdot 2 = 6$.
3. Die scheinbaren Helligkeiten verhalten sich umgekehrt wie die Quadrate ihrer Entfernungen, die scheinbare Lichtstärke dagegen bleibt in allen Entfernungen dieselbe, wenn man in beiden Fällen von dem hemmenden Einflusse der Luft und überhaupt der zwischenliegenden Mittel absieht.

   Denn denken wir uns ein Auge zuerst in eine Entfernung $= 1$ von einem leuchtenden Punkte, sodann aber in die zweifache, dreifache u. s. w. Entfernung gebracht, so wird derselbe Lichtkegel, der in der Entfernung $= 1$ die Pupille zur Basis hatte, in den anderen Fällen eine viermal, neunmal u. s. w. größere Basis haben; es wird also viermal, neunmal u. s. w. weniger Licht in die Pupille gelangen und daraus ergiebt sich die erste der obigen Behauptungen.

   Während aber die von einem leuchtenden Körper ins Auge gelangende Lichtmenge im Verhältnisse der Quadrate der Entfernungen abnimmt, nimmt auch die Größe seines Bildes in unserm Auge in demselben Verhältnis ab, also wird die Energie des Lichtes auf die getroffenen Stellen der Netzhaut, d. h. die scheinbare Lichtstärke, dieselbe bleiben.
4. Ist B die Beleuchtung einer Ebene, welche von der Lichtquelle mit der Lichtmenge L_1 um die Strecke E_2 entfernt ist und auf welche die Strahlen unter dem Winkel α_1 auffallen, dagegen

b die Beleuchtung einer Ebene, welche bei derselben Lichtmenge und Entfernung der Lichtquelle gegen die Strahlen um den Winkel α_2 geneigt ist,

so bestehen zwischen den zusammengehörigen Größen

$$B_1,\ L_1,\ E_1,\ \alpha_1,$$
$$B_2,\ L_2,\ E_2,\ \alpha_2,$$
$$B,\ L_1,\ E_2,\ \alpha_1,$$
$$b,\ L_1,\ F_2,\ \alpha_2$$

die Gleichungen: 1. $B_1 : B = \frac{1}{E_1^2} : \frac{1}{E_2^2}$,

2. $B : b = \sin \alpha_1 : \sin \alpha_2$,

3. $b : B_2 = L_1 : L_2$,

und daraus durch Multiplikation:

$$\text{I.}\quad B_1 : B_2 = \frac{L_1 \sin \alpha_1}{E_1^2} : \frac{L_2 \sin \alpha_2}{E_2^2}.$$

Für $B_1 = B_2$ und $\alpha_1 = \alpha_2$ folgt aus dieser Gleichung

$$\text{II.}\quad L_1 : L_2 = E_1^2 : E_2^2,$$

d. h. bei gleicher Beleuchtung einer Fläche und gleicher Neigung der auffallenden Strahlen verhalten sich die von den Lichtquellen ausgehenden Lichtmengen wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Fläche.

5. Wie 25 : 49 oder fast wie 1 : 2.

6. Aus $x : 1 = 4^2 : 1$ folgt $x = 16$.

7. Da sich bei gleicher Beleuchtung die Lichtmengen der leuchtenden Körper verhalten wie die Quadrate ihrer Entfernungen, im gegenwärtigen Falle aber auch wie die Größe der Oberflächen, so ergiebt sich, wenn E die Entfernung der Sonne, D ihren Durchmesser, d die Größe von 5 m in Meilen ausgedrückt bezeichnet,

$$x^2 : E^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 \pi : \left(\frac{D}{2}\right)^2 \pi, \text{ also } x = E \cdot \frac{d}{D},$$

folglich $x = 20 \,.\, 10^6 \cdot \frac{0{,}000007}{192\,000} = \frac{0{,}14}{192}$ Meilen = nahe 5,4 m.

8. Bezeichnet x die Entfernung des Schirmes von der Lampe, also $5 - x$ seine Entfernung vom Wachslicht, so folgt aus $\frac{x^2}{(5-x)^2} = \frac{6}{1}$, $x_1 = 3{,}55$, $x_2 = 8{,}45$ m, wovon der erste Wert die Stellung des Schirmes innerhalb der Verbindungslinie, der zweite die in der Verlängerung angiebt.

9. Wenn B_1, B_2 die Beleuchtungen der beiden Flächen bezeichnen, so hat man nach Aufgabe 4

$$B_1 : B_2 = \frac{\sin x}{3^2} : \frac{\sin 45^0}{10^2},$$

also, da $B_1 = B_2$ sein soll,

$$\frac{\sin x}{3^2} = \frac{\sin 45^0}{10^2},$$

folglich

$$x = \frac{9 \,.\, \sin 45^0}{100},$$

und daraus

$$x = 3^0\ 38'\ 55''.$$

10. Nach Auflösung 4, II. hat man $L : l = 2{,}5^2 : 0{,}95^2 = 25 : 3{,}61$ oder nahe $= 7 : 1$.

11. $l : L = 30^2 : 70^2 = 1 : 5{,}44 \ldots$

12. $K : k = \frac{100}{42} : \frac{14{,}4}{10} = 2{,}38 : 1{,}44 = 1{,}653 : 1,$

$W : w = \frac{100}{42} : \frac{14{,}4}{10 \,.\, 3} = 2{,}38 : 0{,}48 = 5 : 1$ nahezu.

13. $L_1 : L_2 : L_3 = 100 : 10{,}9 : 13{,}7.$

$$K_1 : K_2 : K_3 = \frac{100}{40} : \frac{10{,}9}{10} : \frac{13{,}7}{9}$$
$$= 100 : 43{,}6 : 60{,}6,$$

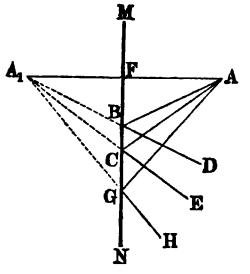
$$W_1 : W_2 : W_3 = \frac{100}{40} : \frac{10{,}9}{10 \,.\, 1{,}4} : \frac{13{,}7}{9 \,.\, 4{,}6}$$
$$= 100 : 31{,}1 : 13{,}2.$$

Auflösungen zu XXVII.

1. Es sei (Fig. 46) AF ein vom leuchtenden Punkte A senkrecht auf den Spiegel fallender Lichtstrahl und AB, AC seien zwei andere in schiefer Richtung auffallende, die nach BD, CE reflektiert werden, so folgt aus einfachen geometrischen Lehren, daß $\angle ABF > \angle ACF$, also (da dem Grundgesetze der Reflexion gemäß $\angle DBN = \angle ABF$ und $\angle ECN = \angle ACF$) auch $\angle DBN > \angle ECN$ ist. Folglich müssen die beiden Linien BD und CE nach der Seite von A_1 zu einander schneiden. Ist nun A_1 ihr Durchschnittspunkt, so ist $\triangle A_1BC \cong \triangle ABC$ (weil $BC = BC$, $\angle A_1BC = \angle ABC$, $\angle A_1CB = \angle ACB$), folglich auch $A_1B = AB$. Verbindet man nun A_1 mit F, so ist das dadurch entstandene $\triangle A_1FB \cong \triangle AFB$ (weil $FB = FB$, $A_1B = AB$

und $\angle A_1BF = \angle ABF$), folglich ist $\angle A_1FB = \angle AFB = R_1$, d. h. A_1F und AF bilden eine gerade Linie, sowie $A_1F = AF$. Der Satz ist also rücksichtlich der beiden Strahlen AB und AC bewiesen. Er ist aber auch für jeden andern von A kommenden und z. B. in G nach der Richtung GH reflektierten Strahl richtig. Denn zieht man A_1G, so ist $\triangle A_1FG \cong AGF$ (weil $A_1F = AF$, $FG = FG$ und $\angle A_1FG = \angle AFG$), folglich $\angle A_1GF = \angle AGF$, also auch $= \angle HGN$, d. h. A_1G liegt in der Verlängerung von GH oder umgekehrt GH ist die Verlängerung von A_1G.

Fig. 46.



2. Man fälle vom leuchtenden Punkte A (Fig. 46) eine Senkrechte AA_1 auf den Spiegeldurchschnitt MN, mache $A_1C = AC$, verbinde das Auge E mit A_1, so geben AD und DE den Weg des Lichtstrahles an, der bei dieser Lage des Auges vom Punkte A in dasselbe gelangt. (Richtiger: sie geben die Lage der Achse des reflektierten Lichtkegels an, der A zur Spitze und die Pupille des Auges zur Basis hat.)

3. Die Auflösung ergiebt sich aus Fig. 47.

Fig. 47.

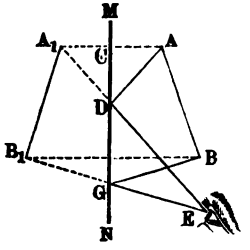
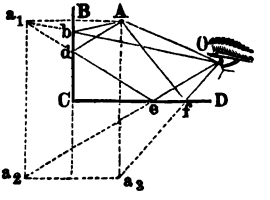


Fig. 48.



4. a) Es seien (Fig. 48) BC und CD zwei unter einem rechten Winkel gegeneinander geneigte Spiegel, A der leuchtende Punkt vor den Spiegeln, O das Auge. Man konstruiere

I. das Bild a_1 des Punktes A vom Spiegel BC. Wäre nur der Spiegel BC vorhanden, so würde nur der in b auffallende Lichtkegel, dessen Achse Ab ist, nach seiner Reflexion in der Richtung bO ins Auge gelangen und dort den Eindruck machen, als käme der Lichtkegel vom Punkte a_1, alle übrigen von A auf den Spiegel BC auffallenden Strahlen würden aber nach ihrer Reflexion am Auge vorbeigehen. Wegen des Vorhandenseins des zweiten Spiegels CD kann nun ein Teil der von BC reflektierten Strahlen auf CD fallen und nach abermaliger Reflexion zum Teil gleichfalls ins Auge gelangen. Um die Achse dieses zweiten ins Auge fallenden Lichtkegels zu finden, betrachte man den Punkt a_1, von welchem ja die auf CD fallenden Strahlen zu kommen scheinen, als leuchtenden Punkt und bestimme

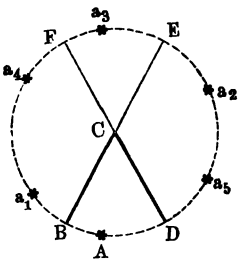
II. das Bild a_2 desselben vom Spiegel CD. Verbindet man dann a_2 mit O, ferner e mit a_1 und d mit A, so stellt $AdeO$ die Achse desjenigen Lichtkegels dar, der, vom Punkte A ausgehend, nach seiner Reflexion in d und e ins Auge gelangt.

III. Konstruiert man noch das Bild a_3 des Punktes A vom Spiegel CD, welches durch Reflexion des Lichtkegels, dessen Achse AfO ist, entsteht und das zusammenfällt mit dem Bilde des Punktes a_2 in Beziehung auf den Spiegel CB, so hat man die drei Bilder, welche die beiden Spiegel geben können, wenn sie einen rechten Winkel bilden. Man überzeugt sich leicht, daß von den auf die Spiegel fallenden Strahlen keine andern als die angegebenen ins Auge gelangen können.

Beschreibt man mit einem Halbmesser $= CA$ um C einen Kreis, so liegen alle Bilder in der Peripherie dieses Kreises; denn denkt man sich CA, Ca_1, Ca_2, Ca_3 gezogen, so erhält man die gleichschenkeligen Dreiecke ACa_1, a_1Ca_2, a_2Ca_3, a_3CA, deren Schenkel sämtlich einander gleich sind. Daraus folgt eine einfachere Konstruktion der Lage der Bilder, die wir auf den Fall anwenden wollen, wenn

b) der Winkel, welchen die beiden Spiegel CB und CD einschließen, 60^0 beträgt (Fig. 49). Ist A der leuchtende Punkt und zieht man aus C mit dem Halbmesser CA einen Kreis, so ist, wenn man Bogen $Ba_1 = BA$ macht, a_1 das Bild von A in Beziehung auf den Spiegel CB, ferner, wenn Bogen $Da_2 = Da_1$, a_2 das Bild von a_1 in Beziehung auf den Spiegel CD, — wenn $Ba_3 = Ba_1$ oder $Ea_3 = Ea_2$, a_3 das Bild von a_2 bezüglich des Spiegels CB u. s. w. Man erhält auf diese Weise fünf Bilder von A. (Die nämlichen fünf Bilder erhält man, wenn man umgekehrt wie vorhin erst das Bild von A in bezug auf den Spiegel CD bestimmt, dann das Bild des gefundenen Punktes in bezug auf den Spiegel CB u. s. w.)

Fig. 49.



5. Es entstehen $n - 1$ Bilder, welche symmetrisch in der Peripherie eines Kreises liegen, dessen Mittelpunkt im Scheitelpunkte des Winkelspiegels und dessen Radius der Entfernung dieses Scheitelpunktes vom leuchtenden Punkte gleich ist.

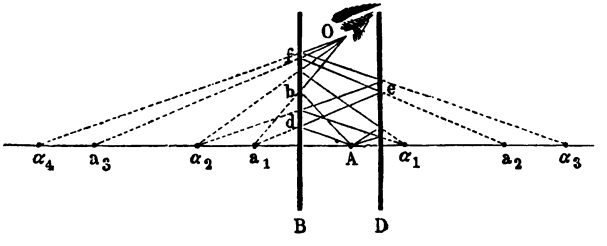
6. Es seien (Fig. 50) B und D die beiden parallelen Spiegel, A ein leuchtender Punkt, O das Auge. Man bestimme

I. das Bild a_1 des Punktes A in Beziehung auf den Spiegel B, ziehe Oa_1 und bA, so ist AbO die Achse eines in das Auge gelangenden Lichtkegels, der von a_1 zu kommen scheint. Betrachtet man nun a_1 als leuchtenden Punkt und bestimmt sein Bild a_2 in Beziehung auf den Spiegel D, sowie ferner wieder das Bild a_3 des Punktes a_2 in Beziehung auf den Spiegel B, zieht die Linien Oa_3, fa_2, ea_1 und dA, so stellt die gebrochene Linie

$AdefO$ die Achse eines zweiten ins Auge gelangenden Lichtkegels dar, der von a_3 zu kommen scheint. (Man könnte nun noch weiter das Bild von a_1 in Beziehung auf den Spiegel D und von diesem wieder das Bild in Beziehung auf den Spiegel B bestimmen u. s. w.) Bestimmt man nun noch

II. das Bild α_1 des Punktes A in Beziehung auf den Spiegel D, von diesem das Bild α_2 in Beziehung auf B, das Bild a_3 in Beziehung auf den

Fig. 50.



Spiegel D und von diesem das Bild α_4 in Beziehung auf B (welches Verfahren man gleichfalls noch fortsetzen könnte),

so sind a_1, α_2, a_3, α_4 ... die vom Auge O im Spiegel B gesehenen Bilder des Punktes A.

7. a) Um das Doppelte des vom Spiegel zurückgelegten Weges, also um 30 cm.

b) Er muß halb so hoch und breit sein, als der Mensch selbst; denn stellt (Fig. 51) AB die Höhe des Menschen von dem Spiegel MN dar, so er-

Fig. 51.

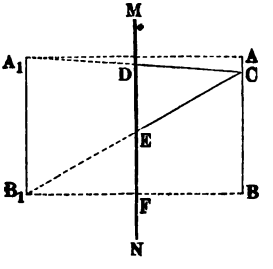
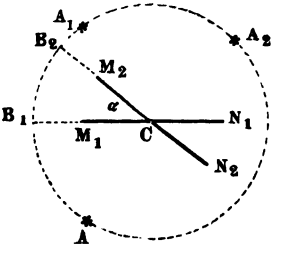


Fig. 52.



blickt das Auge C desselben sein Bild A_1B_1 innerhalb des Spiegelraumes DE. Es ist aber

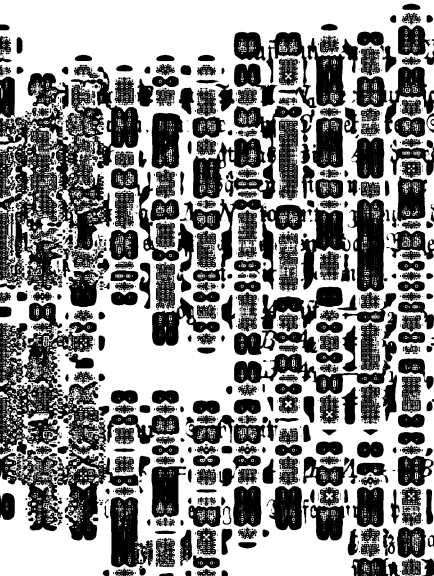
$$\frac{DE}{A_1B_1} = \frac{CE}{CB_1} = \frac{BF}{BB_1} = {}^1/_2.$$

c) Sie erscheinen in lotrechter Stellung.

8. Winkel $\alpha = \beta$, aber auch $\alpha = \gamma = \delta$, folglich $AC \parallel BO$.

9. Winkel $O = 180^0 - OAB - OBA$
$= 180^0 - (180^0 - 2\alpha) - 2\beta$
$= 2(\alpha - \beta) = 2E$.

XVII.



[illegible] chnitt eines auf der Bildfläche senk- [illegible] Spiegels, A ein leuchtender Punkt [illegible] s Punktes so, daß Bogen $B_1 A_1$ [illegible] Spiegel um den Winkel α dreht, [illegible] das Bild des Punktes A von A_1 [illegible] en $A_1 A_2$ doppelt so groß ist, als

[illegible] $- B_2 A_1$;

[illegible] $= B_1 B_2 + B_1 A$

[illegible] $- B_1 B_2$,

[illegible] $- B_1 B_2$

[illegible] $B_1 A - B_1 B_2) = 2 B_1 B_2$.

[illegible] $B S$ (Fig. 53) einen Spiegel C [illegible] al auf die Erde, nehme dann eine [illegible] tellung an, daß die Spitze S in [illegible] piegel und zwar nahe am Rande [illegible] n erscheint, lasse ein Bleilot AD [illegible] uge herabhängen und messe die [illegible] desselben, sowie die Längen von [illegible] nd $B C$, so bestimmt sich wegen der [illegible] keit der Dreiecke SBC und ACD [illegible] e $SB = \frac{BC \cdot AD}{CD}$. Statt des [illegible] s kann man auch ein Gefäß mit [illegible] nehmen, dessen Oberfläche immer [illegible] tal ist.

[illegible] MC seine Hauptachse, M der [illegible] der Lichtstrahl. Man ziehe den [illegible] ist dieser das Einfallslot und [illegible] allswinkel. Macht man den [illegible] MSA, so ist SD die Richtung [illegible] trahles und man findet, daß sie [illegible] ungspunkt B des mit der Haupt- [illegible] enden Spiegelhalbmessers MC geht, [illegible] der Hauptachse nahe liegt. Denn [illegible] ruktion) und $\angle ASM = \angle SMC$ [illegible]) folgt $\angle MSD = \angle SMC$, [illegible] SD und MC mit B bezeichnet, [illegible] SC nur wenige Grade, so kann [illegible] $IB = BC$, d. h. B liegt in der [illegible] Diesen Punkt B, in welchem alle [illegible] Strahlen nach ihrer Reflexion zu- [illegible] ennpunkt des Spiegels.

b) und c). Ist (Fig. 55 und 56) AS der Strahl, so ziehe man eine Parallele MC_1 mit AS durch den Krümmungsmittelpunkt M des Spiegels

Fig. 55.

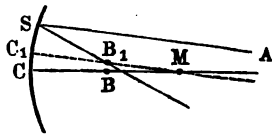
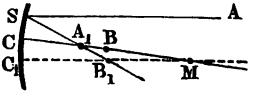


Fig. 56.



und dann von S durch den Halbierungspunkt B_1 der Strecke MC_1 (Brennpunkt des Spiegels in Beziehung auf die Achse MC_1) die Linie SB_1, so ist diese die Richtung des reflektierten Strahles.

13. a) Die Strahlen sind der Hauptachse parallel, gehen also [Aufgabe 12, a)] nach ihrer Reflexion vom Spiegel alle durch den Hauptbrennpunkt B (Fig. 57).

b) Man ziehe (Fig. 58) vom Punkte A außer dem mit der Hauptachse zusammenfallenden Strahle AC noch einen beliebigen Strahl AS und suche

Fig. 57.

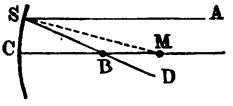
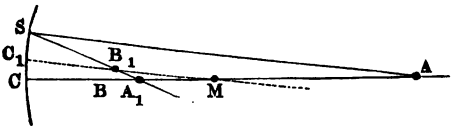


Fig. 58.

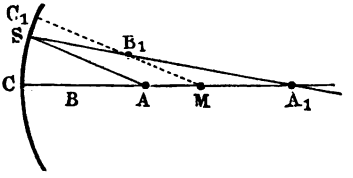


nach 12, b) die Richtung desselben nach seiner Reflexion, so ist der Durchschnittspunkt A_1 dieses Strahles mit der Hauptachse der gesuchte Vereinigungspunkt.

c) Gleichfalls im Mittelpunkte der Spiegelkrümmung.

d) Ähnlich wie in b) (Fig. 59).

Fig. 59.



e) Die reflektierten Strahlen sind der Hauptachse parallel (Fig. 57).

f) Ähnlich wie in b) (Fig. 60).

14. a) Man ziehe (Fig. 61) vom leuchtenden Punkte A einen Strahl AS parallel mit der Hauptachse, so wird dieser [12, a)] nach dem Hauptbrennpunkte B reflektiert. Ferner ziehe man von A einen zweiten

Fig. 60.

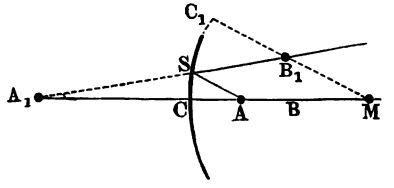
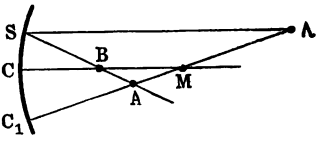


Fig. 61.



Strahl AC_1 durch den Krümmungsmittelpunkt M, so ist der Durchschnittspunkt A_1 der gesuchte Vereinigungspunkt.

b) (Fig. 62.) c) (Fig. 63.)

15. Man bestimme nach den vorhergehenden Aufgaben den Ort des Bildes, ziehe durch diesen vom Mittelpunkte der Pupille eine gerade Linie bis zum

Fig. 62.

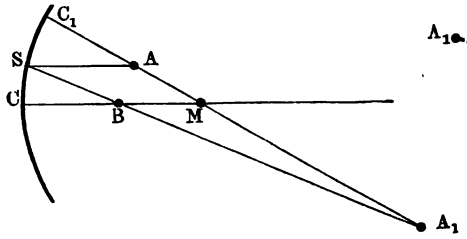
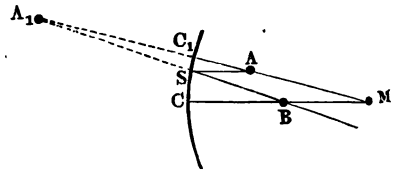


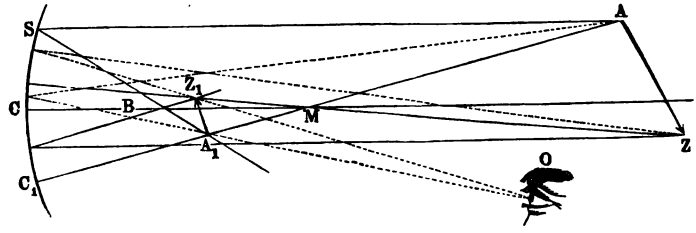
Fig. 63.



Spiegel und dann von dem dadurch bestimmten Punkte des Spiegels eine gerade Linie nach dem senkrechten Punkte.

16. Die Auflösung ist aus Fig. 64 ersichtlich, worin AZ die gegebene Linie, $A_1 Z_1$ ihr Bild darstellt.

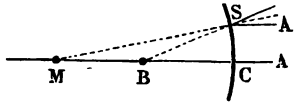
Fig. 64.



17. Sind (Fig. 56 auf S. 135) AS und MC die beiden Strahlen, so ist A_1 der gesuchte Punkt.

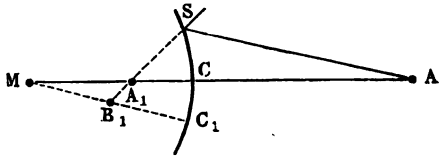
18. 1. a) Durch eine Konstruktion, ähnlich der in 12, a) findet man, daß die Strahlen nach ihrer Reflexion von einem Punkte B herzukommen scheinen, der in der Mitte des mit der Hauptachse zusammenfallenden Halbmessers liegt (Fig. 65).

Fig. 65.



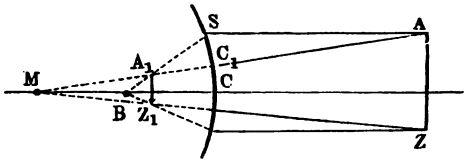
b) Das (imaginäre) Bild des Punktes A liegt in A_1 (Fig. 66).

Fig. 66.



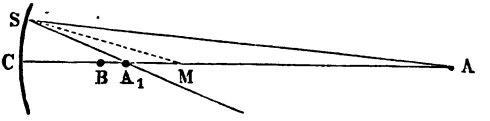
2. Man erhält das Bild $A_1 Z_1$ (Fig. 67) durch ähnliche Konstruktion wie in Fig. 64.

Fig. 67.



19. In dem Dreieck ASA_1 (Fig. 68), dessen Winkel S durch SM halbiert ist, hat man $A_1S : SA = A_1M : MA$, oder, da A_1S nahe $= A_1C$

Fig. 68.



$= \alpha$ und AS nahe $= AC = a$ ist, $\alpha : a = (2p - \alpha) : (a - 2p)$ *) und daraus

$$\text{I.}\quad \alpha = \frac{ap}{a-p} \text{ oder}$$

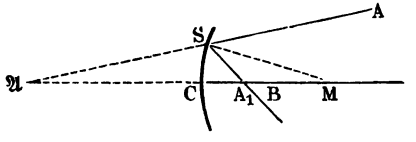
$$\text{II.}\quad \frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{p}.$$

20. 1. $\alpha = p$; 2. $\alpha < 2p$ und zwar $\alpha = {}^{10}/_{9}p$; 3. $\alpha = 2p$; 4. $\alpha > 2p$ und zwar $\alpha = 5p$; 5. $\alpha = \infty$; 6. α ist negativ, d. h. das (imaginäre) Bild liegt hinter dem Spiegel, oder: die Lichtstrahlen divergieren nach ihrer Reflexion und scheinen also von einem Punkte herzukommen, der hinter dem Spiegel liegt, und zwar ist $\alpha = -{}^{1}/_{9}p$.

21. Ein negativer Wert von a bedeutet, daß die Lichtstrahlen konvergierend auf den Spiegel fallen, also verlängert in einem Punkte hinter dem Spiegel zusammenlaufen, und giebt die Entfernung dieses Punktes vom Spiegel an.

Aus Fig. 69 ergiebt sich in ähnlicher Weise wie in Aufgabe 19: $A_1S : \mathfrak{A}S = A_1M : \mathfrak{A}M$ oder $\alpha : a = (2p - \alpha) : (a + 2p)$, woraus $\alpha = \frac{ap}{a+p}$ oder $-\frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{p}$ folgt, also Ausdrücke, die aus I.

Fig. 69.



*) Aus dieser Proportion geht hervor, daß die Strecke CM in den Punkten A_1 und A harmonisch geteilt ist, also C, M, A_1 und A harmonische Punkte sind.

und II. der Aufgabe 19 sich ergeben, wenn man dort $-a$ statt a setzt. Die gesuchten Werte von α sind beziehungsweise

$$\frac{2pp}{2p+p} = {}^2/_3 p; \quad \frac{pp}{p+p} = \frac{p}{2}; \quad \frac{0{,}5\,pp}{0{,}5p+p} = {}^1/_3 p;$$
$$\frac{0{,}1\,pp}{0{,}1\,p+p} = {}^1/_{11} p.$$

22. Man braucht statt p nur $-p$ zu setzen, so daß man statt jener Formeln erhält

$$\text{I. } \alpha = -\frac{ap}{a+p}, \quad \text{oder II. } \frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha} = -\frac{1}{p}.$$

23. 1. $\alpha = -p$; 2. α negativ und kleiner als p und zwar $\alpha = -{}^{10}/_{11} p$; 3. $\alpha = -{}^1/_2 p$; 4. α negativ und kleiner als ${}^1/_2 p$ und zwar $= -{}^1/_{11} p$.

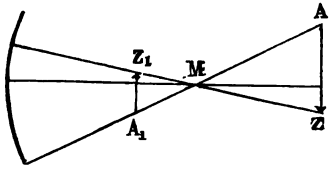
24. 1. α negativ und $> p$ und zwar $\alpha = -{}^{10}/_9 p$; 2. $\alpha = -\infty$; 3. α positiv und zwar $= {}^1/_9 p$.

25. a) 46 cm; b) 37,4 cm; c) 35,2 cm.

26. $p = \frac{a\alpha}{a+\alpha} = \frac{50 \cdot 2}{50+2} = 1{,}923$ dm.

27. a) Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke AMZ und A_1MZ_1 (Fig. 70) hat man, wenn die auf der Hauptachse gemessenen Entfernungen des Gegenstandes AZ und seines Bildes A_1Z_1 vom Punkte M mit D und D_1 bezeichnet werden, $\frac{A_1Z_1}{AZ} = \frac{D_1}{D} = \frac{2p-\alpha}{a-2p}$, und wenn man darin für α aus Aufgabe 19 seinen Wert $\frac{ap}{a-p}$ setzt, $\frac{A_1Z_1}{AZ} = \frac{p}{a-p}$ oder $A_1Z_1 = \frac{p}{a-p} AZ$.

Fig. 70.



b) Aus Fig. 67 findet sich in ähnlicher Weise $\frac{A_1Z_1}{AZ} = \frac{2p-\alpha}{a+2p}$ und wenn man für α aus Aufgabe 22 seinen Wert $\frac{ap}{a+p}$ (ohne Berücksichtigung des Vorzeichens) setzt, $A_1Z_1 = \frac{p}{a+p} \cdot AZ$.

28. a) Entfernung des Bildes vom Spiegel $= \frac{12 \cdot 3}{12-3} = 4$ cm;

Größe desselben $= \frac{3}{12-3} = {}^1/_3$ der Größe des Gegenstandes.

b) Bild und Gegenstand fallen im Mittelpunkte des Spiegels zusammen.

c) Entfernung des Bildes vom Spiegel $= \frac{4 \cdot 3}{4-3} = 12$ cm;

Größe desselben $= \frac{3}{4-3} =$ dreimal so groß wie der Gegenstand.

d) Entfernung $= \frac{3 \cdot 3}{3-3} = \infty$, d. h. es giebt kein Bild.

e) Entfernung $= \frac{2 \cdot 3}{2-3} = -6$ cm, d. h. das Bild liegt 6 cm hinter dem Spiegel;

Größe des Bildes $= \frac{3}{2-3} = -3$, d. h. das hinter dem Spiegel liegende Bild ist dreimal so groß wie der Gegenstand.

29. a) Entfernung $= -\frac{12 \cdot 3}{12+3} = -2{,}4$ cm, d. h. das Bild liegt 2,4 cm weit hinter dem Spiegel.

Größe des Bildes $= \frac{3}{12+3} = {}^1/_5$ der Größe des Gegenstandes.

b) Entfernung $= 2$ cm, Größe $= {}^1/_3$.

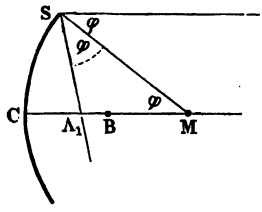
c) Entfernung $= 1{}^5/_7$ cm, Größe $= {}^3/_7$.

d) Entfernung $= 1{}^1/_2$ cm, Größe $= {}^1/_2$.

e) Entfernung $= 1{}^1/_5$ cm, Größe $= {}^2/_5$. Das imaginäre Bild bleibt immer hinter dem Spiegel, nähert sich dem Spiegel, je mehr sich der Gegenstand diesem nähert, und nimmt dabei an Größe zu.

30. Betrachten wir den Randstrahl AS (Fig. 71). Ist A_1 sein Durchschnittspunkt mit der Spiegelachse, so folgt aus dem Dreieck MSA_1, wenn $MS = r$ ist, $\frac{MA_1}{r} = \frac{\sin\varphi}{\sin 2\varphi} = \frac{1}{2 \cdot \cos\varphi}$, also $MA_1 = \frac{0{,}5}{\cos\varphi} \cdot r$. Der Punkt A_1 kann daher nur dann genau mit dem Halbierungspunkte der Strecke MC, d. h. mit dem Brennpunkte B zusammenfallen, wenn $\cos\varphi = 1$, also $\varphi = 0$ ist; da aber der Quotient $\frac{0{,}5}{\cos\varphi}$ nur wenig von 0,5 verschieden ist, wenn φ bis zu 4^0 wächst, so darf in der Regel der Mittelpunktswinkel des Spiegels 8^0 betragen.

Fig. 71.



31. Es seien (Fig. 72, a. f. S.) $S_1 C S_2$ der Hohlspiegel, mn der ebene Spiegel und A der leuchtende Punkt. Wäre der Spiegel mn nicht vorhanden, so würde ein Bild des Punktes A in A_2 entstehen, dessen Entfernung vom Hohlspiegel nach Aufgabe 19 sich bestimmt zu $\frac{8 \cdot 3}{8-3} = 4{}^4/_5$ dm. Nun werden aber die vom Hohlspiegel reflektierten Strahlen $S_1 m$ und $S_2 n$ vom Planspiegel mn so zurückgeworfen, daß die Strahlen mA_1 und nA_1 mit mn ein Dreieck mnA_1 bilden, welches dem Dreiecke mnA_2 kongruent ist, wonach sich darthun läßt, daß Dreieck $DnA_1 \cong$ Dreieck DnA_2, also $DA_1 = DA_2$ und $\angle A_1 DA_2 = R$ ist. Das Bild A_1 des Punktes A

liegt also $4^4/_5 - 4 = {}^4/_5$ dm von der Mitte des Planspiegels in einer auf der Achse des Hohlspiegels senkrechten Richtung.

32. Es sei (Fig. 73) CD der Hohlspiegel, M sein Krümmungsmittelpunkt, DE der Halbmesser seiner Öffnung, sowie BB_1 der Halbmesser des Sonnenbildes, so ist

a) $BB_1 = BM \,.\, tang\ BMB_1 = 4 \,.\, tang\ 16' = 0{,}01862$ dm.

b) Der Halbmesser DE der Spiegelöffnung ist $= DM \,.\, sin\ DME = 8 \,.\, sin\ 10^0 = 1{,}3892$ dm. Da nun alle den Hohlspiegel treffenden

Fig. 72.

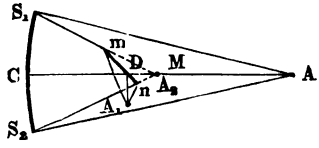
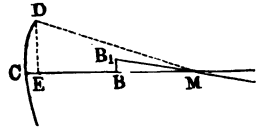


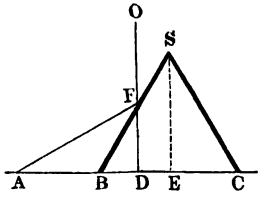
Fig. 73.



Sonnenstrahlen durch die Reflexion im Brennraume vereinigt werden, so verhält sich die natürliche Dichte der Strahlen am Spiegel zu der Dichte derselben im Brennraume umgekehrt, wie die Fläche der Spiegelöffnung zur Fläche des Sonnenbildes, oder umgekehrt, wie die Quadrate ihrer Halbmesser, also im vorliegenden Falle, wie $(0{,}01862)^2 : (1{,}3892)^2 = 1 : 5566{,}4$.

33. Da (Fig. 74) $\angle\, BFD = \angle\, OFS = \angle\, BSE = {}^1/_3\, R$, aber auch $\angle\, AFB = \angle\, OFS = {}^1/_3\, R$, also $\angle\, AFD = {}^2/_3\, R$, also, wie sich aus dem bei D rechtwinkeligen Dreieck AFD darthun läßt (Ebene Geometrie, §. 108, 1), $FA = 2\,FD$, folglich, da $\angle\, AFD$ durch FB halbiert wird und also $\frac{BA}{BD} = \frac{FA}{FD}$ ist,

Fig. 74.



$$BA = \frac{2\,FD}{FD} \cdot BD = 2\,BD,$$

d. h. man findet den Punkt A, welcher dem Auge in D zu liegen scheint, wenn man $BA = 2\,BD$ macht. (Zieht man von E aus einen Kreis mit dem Halbmesser EA, so liegen in der Peripherie desselben alle Punkte, welche den in der Peripherie des Kreises vom Halbmesser ED liegenden Punkten entsprechen.)

Auflösungen zu XXVIII.

1. a) $x = \frac{\sin 30^0}{\sin 22^0} = \frac{0{,}5}{0{,}375} = {}^4/_3$.

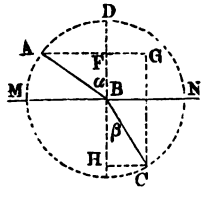
b) $x = \frac{\sin 24^0}{\sin 15^0 45'} = \frac{0{,}4067}{0{,}2714} = {}^3/_2$.

2. a) Aus $\frac{\sin 60^0}{\sin \beta} = {}^4/_3$ folgt $\sin \beta = \frac{\sin 60^0}{{}^4/_3} = \frac{0{,}866 \cdot 3}{4} = 0{,}649$, also $\beta = 40^0 30'$.

b) Aus $\frac{\sin 11^0 15'}{\sin \beta} = {}^3/_4$ folgt $\sin \beta = {}^4/_3 \sin 11^0 15' = {}^4/_3 \cdot 0{,}194 = 0{,}259$, also $\beta = 15^0$.

3. Erste Konstruktion. Es sei MN (Fig. 75) die Durchschnittslinie der Einfallsebene mit der Trennungsfläche der beiden Medien, AB der einfallende Strahl, und das Brechungsverhältnis sei $= {}^3/_2$. Man errichte im Punkte B auf MN das Einfallslot BD, ziehe mit einem beliebigen Halbmesser BA einen Kreis um B, fälle von A eine Senkrechte AF zum Einfallslot, teile AF in drei gleiche Teile, trage zwei derselben auf die Verlängerung und ziehe dann die Parallele GC mit dem Einfallslot, so ist, wenn man die Linie BC zieht, diese die Richtung des gebrochenen Strahles. Denn es ist alsdann

Fig. 75.



$$AB \cdot \sin \alpha = AF$$
$$BC \cdot \sin \beta = CH\ (= FG),$$

folglich, da $AB = BC$ ist,

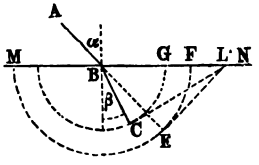
$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{AF}{CH} = {}^3/_2.$$

Wäre das Brechungsverhältnis $= {}^2/_3$, so müßte man AF in zwei gleiche Teile teilen, FG gleich drei solcher Teile machen, außerdem aber ganz wie vorher verfahren.

Zweite Konstruktion. Ist wieder MN (Fig. 76, a. f. S.) die Durchschnittslinie der Einfallsebene mit der Trennungsfläche beider Medien, AB der einfallende Strahl, und das Brechungsverhältnis $= {}^3/_2$, so beschreibe man um B mit einem beliebigen Halbmesser BF einen Halbkreis, teile BF in

drei gleiche Teile und beschreibe mit der Länge von zwei solchen Teilen, nämlich BG, gleichfalls einen Halbkreis. Alsdann verlängere man AB bis E, ziehe in E eine Tangente an den Halbkreis und von dem Punkte L aus, in welchem diese Tangente die Linie MN schneidet, eine Tangente an den mit BG beschriebenen Halbkreis. Ist LC diese Tangente, so ist BC die gesuchte Richtung des gebrochenen Strahles. Denn es ist

Fig. 76.



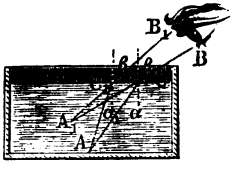
$$BL \,.\, \sin BLE = BE,$$
$$BL \,.\, \sin BLC = BC,$$

folglich, da $\angle BLE = \angle \alpha$ und $\angle BLC = \angle \beta$,

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{BE}{BC} = \frac{BF}{BG} = {}^3/_2.$$

4. Ein von dem Punkte A (Fig. 77) im Wasser ausgehender Strahl gelangt nicht in gerader Linie nach dem in der Luft befindlichen Auge (falls sich dieses nicht gerade in der von A auf die Oberfläche des Wassers senkrecht gezogenen Linie befindet), sondern hat vorher an der Grenze beider Mittel eine Brechung zu erleiden, die dem Brechungsverhältnisse $^3/_4$ entspricht. Es sei nun CAC_1 ein solcher von A ausgehender Lichtkegel, der nach seiner Brechung bei CC_1 gerade in das bei BB_1 befindliche Auge gelangt, so ist klar, daß das Auge den Punkt A in der Verlängerung der Linien BC und B_1C_1, nämlich in A_1 erblicken wird. Daß aber der Punkt A nicht bloß von seiner Stelle gerückt, sondern auch gehoben und dem Auge genähert erscheinen muß, läßt sich aus den Brechungsgesetzen in folgender Weise darthun. Die Einfallswinkel der Strahlen $AB \ldots AC_1$, nämlich $\alpha \ldots \alpha_1$, nehmen kontinuierlich ab, also auch die Brechungswinkel $\beta \ldots \beta_1$, und zwar die letzteren stärker; denn da die Winkel $\alpha \ldots \alpha_1$ kleiner sind als die Winkel $\beta \ldots \beta_1$, und da die Sinus kleiner Winkel schneller abnehmen als die größerer, also $\sin \alpha \ldots \sin \alpha_1$ schneller als $\sin \beta \ldots \sin \beta_1$, so müssen, damit die Gleichung $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \cdots = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \beta_1} = {}^3/_4$ bestehen kann, notwendig die Brechungswinkel $\beta \ldots \beta_1$ selbst noch stärker abnehmen, als die Einfallswinkel $\alpha \ldots \alpha_1$. Daraus folgt aber, daß CB und C_1B_1 oder A_1C und A_1C_1 mehr divergieren als AC und AC_1, d. h. daß der Winkel $CA_1C_1 > CAC_1$, es liegt also, wie sich leicht daraus darthun läßt, A_1 näher an der Oberfläche des Wassers als A.

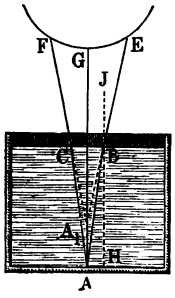
Fig. 77.



5. Denken wir uns, ein Auge EF (Fig. 78) sehe nach dem Punkte A eines Wasserbodens in einer Richtung GA, welche auf dem Wasserspiegel BC senkrecht steht. BAC sei der dünne, in der Figur viel vergrößert dargestellte Strahlenkegel, welcher, von A ausgehend, nach seiner Brechung ins Auge

gelangt, und A_1 sei der Ort, in welchem sich der Punkt A wegen seiner Hebung durch die Brechung zu befinden scheint.

Fig. 78.



Im Dreieck AA_1B ist $\frac{AA_1}{A_1B} = \frac{\sin A_1BA}{\sin A_1AB}$ . . . (I)

Nach dem Brechungsgesetz und weil $\angle A_1BH = EBJ$, ist aber $\frac{\sin A_1BH}{\sin ABH} = 4/3$ oder, da es sich hier nur um sehr kleine Winkel handelt, bei welchen die Sinus der Winkel den Winkeln selbst proportional sind,

$$\frac{A_1BH}{ABH} = 4/3 \text{ oder } A_1BH = 4/3\ ABH, \text{ also}$$

$$A_1BA = A_1BH - ABH = 1/3\ ABH \ldots \text{(II)}$$

Setzt man diesen Wert von A_1BA in die obige Gleichung (I) und berücksichtigt, daß Winkel $A_1AB = ABH$ ist, so erhält man $\frac{AA_1}{A_1B} = \frac{\sin(1/3\ ABH)}{\sin ABH}$ oder statt der Sinus die ihnen proportionalen sehr kleinen Winkel selbst setzend,

$$\frac{AA_1}{A_1B} = 1/3, \text{ also } AA_1 = 1/3\ A_1B, \text{ also auch nahezu} = 1/3\ A_1D.$$

6. a) Weil nach dem vorigen jeder im Wasser befindliche Punkt desselben von seiner Stelle gerückt und um $1/4$ seiner Tiefe unter dem Wasserspiegel gehoben erscheint.

Fig. 79.

b) Erklärt sich leicht durch Fig. 79 und Aufgabe 4.

7. Aus der in jedem Augenblicke veränderten Brechung der Lichtstrahlen von jenen Gegenständen, — verursacht durch die unaufhörliche Luftströmung, die rasch abwechselnd Luft von verschiedener Dichtigkeit zwischen jene Gegenstände und das Auge bringt.

8. Zwei von einem fernen Lichtpunkte kommende Strahlen können möglicherweise, weil durch Luftschichten von verschiedener Dichte gehend, mit einem Gangunterschiede auf den nämlichen Punkt unserer Netzhaut gelangen, so daß die Oszillationen des einen Strahles die des anderen zum Teil oder ganz aufheben, also einen Wechsel in der Beleuchtung der Netzhaut verursachen. Dadurch läßt sich das Funkeln der Fixsterne, die uns nur als Lichtpunkte von noch nicht einer Sekunde Durchmesser erscheinen, erklären. Daß uns die Planeten, die einen viel größeren scheinbaren Durchmesser (z. B. Jupiter 40 Sekunden) haben, in ruhigerem Lichte erscheinen, erklärt sich daraus, daß sie als aus vielen Lichtpunkten bestehend zu betrachten sind, deren Strahlen in ihrer Wirkung auf unsere Netzhaut sich gegenseitig unterstützen können.

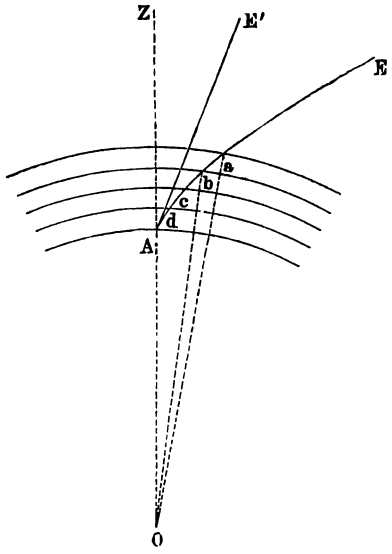
9. Da Erfahrung und Theorie lehren, daß ein durch verschiedene aufeinander folgende Mittel gehender Lichtstrahl um so weniger durch teilweise Reflexionen geschwächt wird, je gleichartiger in optischer Hinsicht diese Mittel sind, d. h. je mehr ihre Brechungsverhältnisse übereinstimmen, so erklärt sich die

Erscheinung schon aus der Annahme, daß Öl mit der Materie des Papiers optisch gleichartiger ist als Luft.

10. Weil 1) die in der Luft schwimmenden Staubteilchen schon vor dem Regen aus der mit Wasserdampf gesättigten Luft diesen anziehen und, dadurch schwerer geworden, niedersinken können, durch den Regen aber gänzlich niedergeschlagen werden, und weil 2) Wasserdampf mit atmosphärischer Luft optisch gleichartig ist (siehe vorige Auflösung).

11. Unter astronomischer Strahlenbrechung versteht man die Brechung der von einem Gestirn E (Fig. 80) kommenden Lichtstrahlen bei ihrem Durchgange durch die nach unten immer dichter werdende Atmosphäre der Erde, infolge deren das Gestirn in größerer Höhe über dem Horizont, also geringerer Zenithdistanz ZAE' erscheint, als es wirklich steht. Diese Strahlenbrechung ist in der Nähe des Zeniths Z nur gering, nimmt mit der Zenithdistanz in immer stärkerem Verhältnis zu und beträgt in der Nähe des Horizonts, also bei einer Zenithdistanz von 90°, über einen halben Grad (siehe Tabelle 21, B).

Fig. 80.

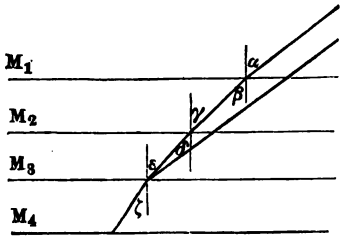


Ein ähnliches Heben durch die atmosphärische Strahlenbrechung wird auch zuweilen von Objekten beobachtet, die sich in der Erdatmosphäre befanden, in welchem Falle man von terrestrischer Strahlenbrechung spricht (Fata Morgana).

12. a) und b) erklären sich aus Aufgabe 11.

13. Bezeichnen c_1, c_2, c_3, c_4 die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des Lichtes in den bezüglichen Mitteln M_1, M_2, M_3, M_4 (Fig. 81), sowie n_1, n_2, n_3 die Brechungsverhältnisse, welche dem Übergang eines Lichtstrahles bezüglich aus M_1 in M_2, aus M_2 in M_3, aus M_3 in M_4 entsprechen, so ist nach der Wellentheorie $n_1 = \frac{c_1}{c_2}$, $n_2 = \frac{c_2}{c_3}$, $n_3 = \frac{c_3}{c_4}$, folglich $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 = \frac{c_1}{c_4}$. Bezeichnet aber n den Brechungsexponenten bezüglich des Überganges eines Strahles aus dem Mittel M_1 unmittelbar in das Mittel M_4, so ist $n = \frac{c_1}{c_4}$, folglich $n = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$.

Fig. 81.



Wenn die Grenzflächen der Mittel einander parallel sind, so ist nach dem Brechungsgesetz und weil $\measuredangle \beta = \gamma$, $\measuredangle \delta = \varepsilon$

$$n_1 = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}, \quad n_2 = \frac{\sin \beta}{\sin \delta}, \quad n_3 = \frac{\sin \delta}{\sin \zeta},$$

folglich

$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \zeta}.$$

Die Richtung des gebrochenen Strahles ist also im letzten Mittel M_4 die nämliche, als ob der Strahl aus dem ersten Mittel M_1 unmittelbar auf die Grenzfläche des letzten gefallen wäre.

14. Bezeichnet n_1 den (absoluten) Brechungsexponenten beim Übergange eines Lichtstrahles aus dem leeren Raume in atmosphärische Luft, so ergiebt sich aus Aufgabe 13) $\sin \varepsilon = n_1 \sin \varepsilon_1$. Für 0° Temperatur und 760 mm Barometerstand ist $n_1 = 1{,}000294$, bei 10° C. dagegen 1,00028 (siehe Tabelle 21, B, in welcher indessen nur die Refraktion bis zu 85° scheinbarer Zenithdistanz nach dieser einfachen Gleichung berechnet ist).

15. a) Um diesen zu finden, braucht man nur in der Gleichung $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = 4/3$, wo α den Einfallswinkel, β den Brechungswinkel und $4/3$ das Brechungsverhältnis darstellt, $\alpha = 90^0$ zu setzen, wodurch sich findet:

$$\sin \beta = \frac{\sin 90^0}{4/3} = 3/4 = 0{,}75,$$

also β, d. h. der Grenzwinkel des gebrochenen Strahles beim Übergange aus Luft in Wasser $= 48^0\,35'$.

b) Aus $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = 3/2$ findet sich, wenn man wieder $\alpha = 90^0$ setzt,

$$\sin \beta = \frac{\sin 90^0}{3/2} = 2/3 = 0{,}666\ldots,$$

also der Grenzwinkel $\beta = 41^0\,48'$.

16. Für Strahlen, die aus Glas oder Wasser in Luft übergehen, sind die Brechungsverhältnisse bezüglich $2/3$ und $3/4$, es sind also die Brechungswinkel größer als die Einfallswinkel. Ein Strahl also, der aus Glas oder Wasser in Luft übergeht, muß unter einem Einfallswinkel auffallen, der kleiner ist als 90°, wenn der Brechungswinkel höchstens 90° betragen soll, und die Grenze des Einfallswinkels ergiebt sich

1) für Glas aus $\frac{\sin \alpha}{\sin 90^0} = 2/3$, nämlich aus $\sin \alpha = 2/3 = 0{,}666\ldots$ folgt $\alpha = 41^0\,48'$;

2) für Wasser aus $\frac{\sin \alpha}{\sin 90^0} = 3/4$, woraus $\sin \alpha = 3/4 = 0{,}75$ oder $\alpha = 48^0\,35'$ folgt.

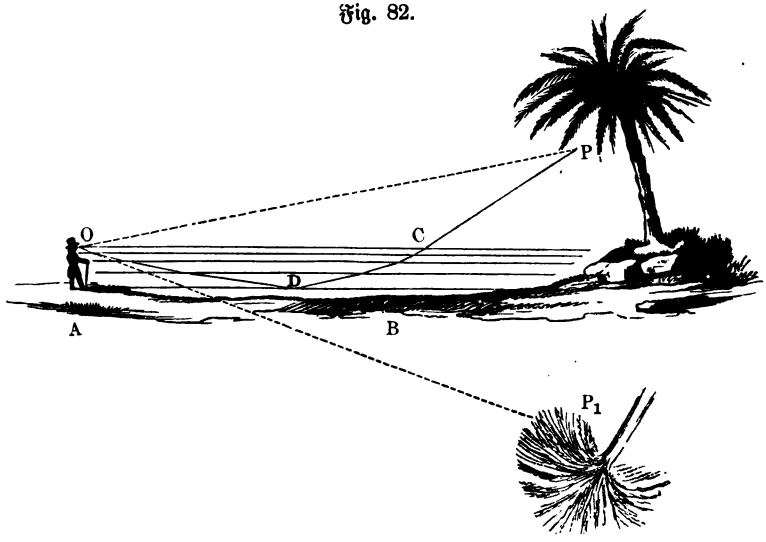
Alle Strahlen also, die aus Glas unter einem größeren Einfallswinkel als $41^0\,48'$ oder aus Wasser unter einem größeren als $48^0\,35'$ auf die Begrenzungs-

fläche fallen, können nicht mehr in die Luft übergehen, sondern erleiden nur eine Reflexion, und zwar eine totale, die einzige, die überhaupt vorkommt.

17. Der erste Teil der Erscheinung erklärt sich daraus, daß der Brechungswinkel eines aus Luft in Wasser übergehenden Lichtstrahles höchstens 48°35′ betragen kann, der zweite daraus, daß, wenn die Einfallswinkel der aus Wasser auf Luft treffenden Strahlen jene Grenze überschreiten, diese Strahlen nicht in die Luft übergehen können, sondern eine totale Reflexion stattfindet (siehe vorige Aufgabe). Um den Winkel zu finden, unter welchem das Auge den Durchmesser des fraglichen Kreises sieht, denke man sich in der Peripherie jenes Kreises eine Normale auf die Oberfläche des Wassers gezogen, so bildet diese mit einem der äußersten das Auge treffenden Strahlen den Grenzwinkel von 48°35′, und diesem muß der Winkel, den die erwähnten Strahlen mit der Normalen durch den Mittelpunkt des Kreises machen, gleich sein. Es erscheint also der Durchmesser jenes Kreises unter einem Winkel von 79°10′.

18. Bei starker Sonnenhitze und ruhiger Luft ist es möglich (Fig. 82), daß die unteren Luftschichten, vom Erdboden erhitzt, eine geringere Dichtigkeit haben,

Fig. 82.



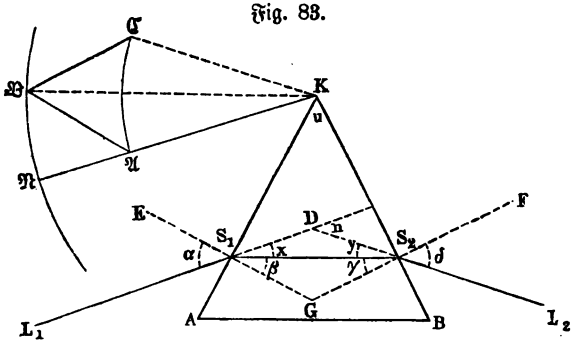
als die über ihnen liegenden, weshalb ein vom Punkte P kommender Lichtstrahl PC in krummer Linie nach D gebrochen, hier aber, weil der Einfallswinkel den Grenzwinkel überschreitet, nach dem Auge O reflektiert werden kann, so daß das Auge O außer dem Punkte P über dem Boden AB auch ein Spiegelbild P_1 desselben unter dem Boden sieht.

19. a) Ist (Fig. 83) AKB ein auf der Kante senkrechter Durchschnitt des Prismas und L_1S_1 der einfallende Strahl, so kann die Konstruktion nach Aufgabe 3 geschehen, kürzer aber auf folgende Weise: Man zieht $K\mathfrak{N} \parallel L_1S_1$, macht $K\mathfrak{A} = 1$ (von beliebiger Länge anzunehmen, aber dieser entsprechend) $K\mathfrak{N} = n$ (= 1,5 für Glas), zieht aus K Kreisbogen durch die Punkte

$\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{N}$, sodann durch $\mathfrak{A}$ die Linie $\mathfrak{AB}$ senkrecht auf KA und durch $\mathfrak{B}$ die Linie $\mathfrak{BC}$ senkrecht auf KB, endlich aber $S_1S_2 \parallel K\mathfrak{B}$ und $S_2L_2 \parallel K\mathfrak{C}$, so ist die Aufgabe gelöst. Aus dem $\triangle K\mathfrak{AB}$ hat man nämlich $\frac{\sin K\mathfrak{AB}}{\sin K\mathfrak{BA}}$ oder $\frac{\sin \mathfrak{NAB}}{\sin K\mathfrak{BA}} = \frac{n}{1}$, oder da $\measuredangle \mathfrak{NAB} = \alpha$ und $\measuredangle K\mathfrak{BA} = \beta$ ist, $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n$, folglich ist S_1S_2 der im Prisma gebrochene Strahl u. s. w.

Rücksichtlich des Einflusses, den die Größe des brechenden Winkels auf den Gang der Lichtstrahlen hat, ist zu bemerken: 1) Wenn $u = 41^\circ 48'$, so treten nur die innerhalb des $\llcorner AS_1E$ im Punkte S_1 auffallenden Strahlen auf der andern Seite des Prismas aus. 2) Wenn $u > 41^\circ 48'$, so kann nur noch ein Teil der im $\llcorner AS_1E$ auffallenden Strahlen, und wenn

Fig. 83.



$u < 41^\circ 48'$, außer den im $\llcorner AS_1E$ auffallenden, auch noch ein Teil der im $\llcorner KS_1E$ liegenden auf der andern Seite des Prismas austreten.

b) Ist der brechende Winkel des Prismas $=$ oder $> 83^\circ 36'$, so tritt kein einziger der auf der Seite AK auffallenden Strahlen auf der Seite BK aus, sondern jeder, der die Seite BK trifft, wird dort reflektiert.

20. Ist (Fig. 83) AKB der Durchschnitt des Prismas, $u = 60^\circ$, L_1S_1 der auffallende Lichtstrahl und $\alpha = 50^\circ$, so ist $\sin \beta = {}^2/_3 \sin 50^\circ$, also $\beta = 30^\circ 42' 37''$, folglich ist (da $u = \beta + \gamma$, weil sowohl u als $\beta + \gamma$ den $\llcorner G$ zu 180° ergänzen) $\gamma = 60^\circ - 30^\circ 42' 37'' = 29^\circ 17' 23''$, also $\sin \delta = {}^3/_2 \sin \gamma = {}^3/_2 \sin 29^\circ 17' 23''$, folglich δ, d. h. der Winkel, welchen der austretende Strahl mit seinem Einfallslot einschließt, $= 47^\circ 12' 33''$.

21. Wenn (Fig. 83) L_1S_1 der auffallende, S_1S_2 der im Prisma parallel der Basis AB laufende Lichtstrahl, so ist $\llcorner KS_1S_2 = \llcorner KS_2S_1 = 60^\circ$, folglich $\beta = 30^\circ$, also $\sin \alpha = {}^3/_2 \sin \beta = {}^3/_2 \sin 30^\circ$, woraus $\alpha = 48^\circ 35' 25''$ folgt, und ebenso groß ist auch $\llcorner \delta$.

22. Er geht ungebrochen in das Glas, fällt unter einem Winkel von 45° auf die Basis des Prismas, wird dort unter gleichem Winkel reflektiert (nach 16) und fährt unter einem Winkel von 90° auf die zweite Seitenfläche und ungebrochen in die Luft.

[illegible], oder, da $\beta + \gamma = u$ (weil so- [illegible] 180^0 ergänzen), also $\gamma = u - \beta$

[illegible] $m\,u\,.\,cos\,\beta - n\,.\,cos\,u\,.\,sin\,\beta$,

[illegible] $= \sqrt{1 - \frac{sin^2\,\alpha}{n^2}}$ ist,

[illegible] $\sqrt{\frac{n^2\,\alpha}{n^2}} - cos\,u\,sin\,\alpha.$

[illegible] $\gamma = \delta - \gamma$, so ist der gesuchte [illegible] $+ \delta - (\beta + \gamma) = \alpha + \delta$ [illegible] auflösung zu 20):

[illegible] $= 60^0 = 37^0\,12'\,33''.$

[illegible] Strahl parallel der Basis durch das [illegible] den gleiche Winkel, von denen also [illegible] $\beta = \gamma = 30^0$, also (aus $sin\,\alpha$ [illegible] ist $x = \alpha - \beta = 18^0\,35'\,25''$,

[illegible] β, $y = \delta - \gamma$,
[illegible] $(\alpha + \delta) - (\beta + \gamma)$.

[illegible] als $\beta + \gamma$ den Winkel G zu 180^0 [illegible] dann w den kleinsten Ablenkungswinkel

[illegible] $= \frac{w + u}{2}$,

[illegible] $= {}^1/_2\,u.$

[illegible] $\frac{21^0\,46' + 21^0\,12'}{2}$ [illegible] $= 2{,}123.$

[illegible] $sin\,\frac{21^0\,12'}{2}$

[illegible] de verschiedene Mittel A und B [illegible] deren Trennungsfläche den beiden [illegible] Grenzflächen parallel ist, ein Lichtstrahl [illegible] übergeht, das demjenigen gleich ist, [illegible] der Strahl in das Mittel A ging, [illegible] Aufgabe 13 seine Richtung beim [illegible] aus dem zweiten Mittel B parallel [illegible] in welcher er auf das erste Mittel [illegible] an hat also $\angle\,\xi = \alpha$, aber auch

[illegible] $\delta = \varepsilon$. Aus $\frac{sin\,\alpha}{sin\,\beta} = n_1$ und

[illegible] folgt daher $\frac{sin\,\alpha}{sin\,\gamma} = n_1$ und

hung durch die erste

Mittel B Spiegelglas,

relative Brechungs-

22 $n_3 = 1{,}533$ und

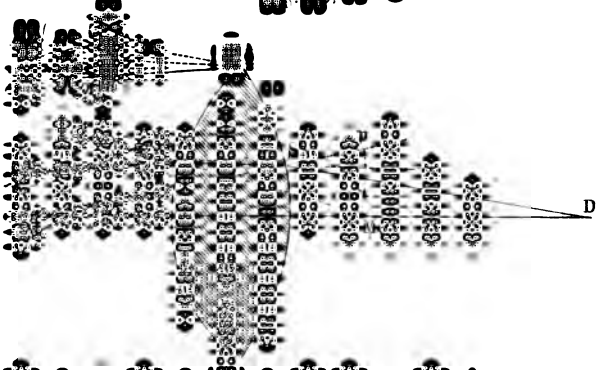
die Linse zu finden,

ken, indem man die

S_2 als die Durch-

Man kann sich aber,

folgenden annähern-



das Einfallslot, d. h.

Kreisbogen om von

winkels vom Einfalls-

Teile und ziehe die

abschneidet, so stellt

m Falle aber genau

$\frac{\sin A S_1 g}{\sin S_2 S_1 m}$

weil dann

läuterte Weise ergiebt

ahles.

S_1, macht $K\mathfrak{A} = 1$

$\mathfrak{M}$, zieht $\mathfrak{AB} \parallel M_1 S_1$,

$\parallel M_2 S_2$ und endlich

aktion ist ähnlich dem

der Hauptbrenn-

ung (Fig. 86 a. f. S.).

30. a) Der Strahl geht ungebrochen durch.

b) Der Strahl ist nach der Brechung seiner ursprünglichen Richtung parallel; bei einer sehr dünnen Linse, wie sie hier vorausgesetzt ist, und wenn der Winkel, den der Strahl mit der Hauptachse bildet, sehr klein ist, kann man annehmen, daß er ungebrochen durchgeht.

c) Man verbinde (Fig. 86) die beiden Durchschnittspunkte der Linsenkrümmungen durch eine gerade Linie, d. h. ziehe die Mittellinie, verlängere den Strahl AS bis zu dieser und ziehe von da eine Linie BS nach dem Mittelpunkte B der Krümmung, der zugleich der Hauptbrennpunkt der Linse ist.

Fig. 86.

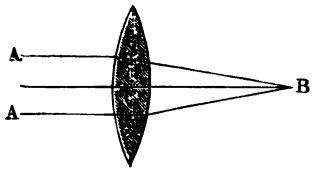
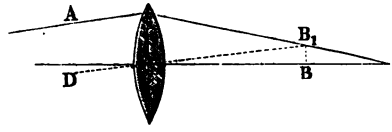
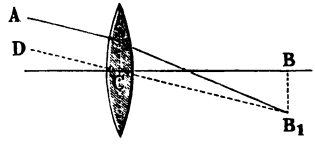


Fig. 87.



d) Ist AS (Fig. 87) der bis zur Mittellinie verlängerte Strahl und B der Hauptbrennpunkt der Linse, so ziehe man die Nebenachse DC parallel AS, errichte in B eine Senkrechte auf die Hauptachse bis zum Durchschnittspunkte B_1 mit der Parallelen, so ist B_1 der Vereinigungspunkt aller mit der Nebenachse DC parallel auffallenden Strahlen, vorausgesetzt, daß diese Nebenachse nur einen kleinen Winkel mit der Hauptachse einschließt und daß die ihr parallelen Strahlen nahe der Achse auffallen, welche Voraussetzung hier immer gemacht wird (Lehrbuch §. 159). Die Richtung des Strahles nach der Brechung ist also SB_1. (Näherungsweise kann man $CB_1 = CB$ machen.)

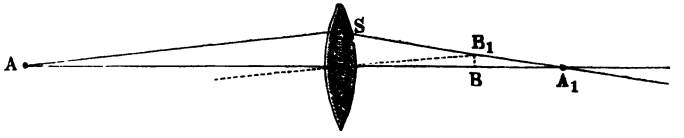
Fig. 88.



e) Dieselbe Konstruktion, wie im vorhergehenden Falle (Fig. 88).

31. a) Man ziehe (Fig. 89) vom leuchtenden Punkte A außer dem mit der Hauptachse AC zusammenfallenden Hauptstrahle noch einen beliebigen Strahl AS

Fig. 89.

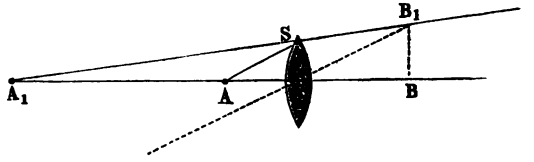


nach der Linse, verfahre rücksichtlich des letzteren nach d) der vorigen Auflösung, so ist der Durchschnittspunkt A_1 des gebrochenen Strahles mit der Hauptachse der Ort des Bildes, das also hier ein Sammelbild ist.

b) Man verfahre zuerst ähnlich, wie eben erwähnt; da aber der vom leuchtenden Punkte A (Fig. 90) ausgehende Strahl AS im gegenwärtigen

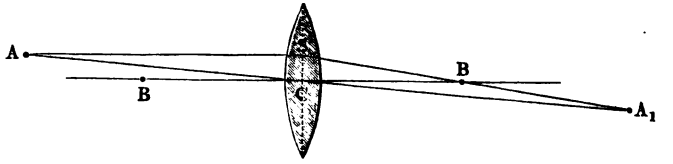
Falle nach seiner Brechung eine Richtung SB_1 hat, die mit der Hauptachse divergiert, so muß man, um das geometrische Bild A_1 zu finden, die Linie SB_1 rückwärts verlängern.

Fig. 90.



32. a) Man ziehe (Fig. 91) vom leuchtenden Punkte A aus den Strahl AC durch den optischen Mittelpunkt, sowie den mit der Hauptachse parallelen AS, der durch die Linse nach dem Hauptbrennpunkte B gebrochen wird. Der

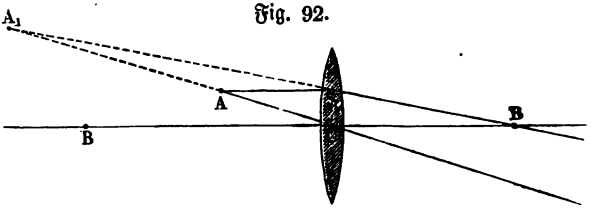
Fig. 91.



Durchschnittspunkt A_1 dieser beiden Strahlen ist der Ort des Bildes (Sammelbildes).

b) Man verfahre (Fig. 92) zuerst auf ähnliche Weise wie in Fig. 91, dann verlängere man den durch den optischen Mittelpnnkt gehenden Strahl.

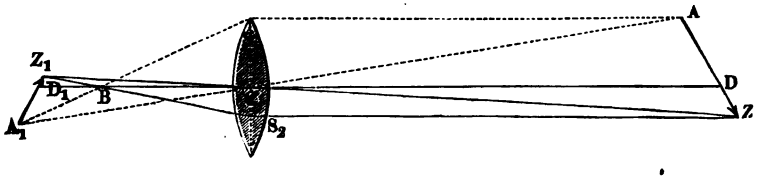
Fig. 92.



sowie den nach dem Hauptbrennpunkte gebrochenen Strahl rückwärts, um das (geometrische) Bild A_1 des Punktes A zu finden.

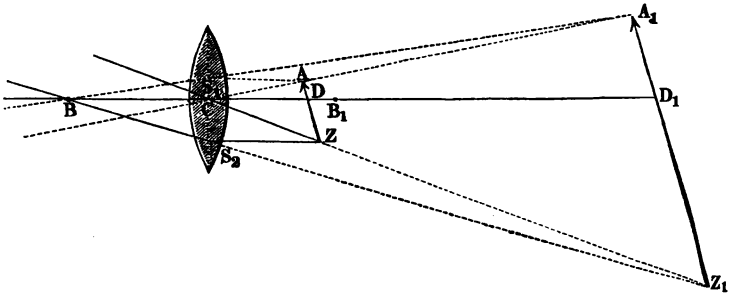
33. Die vorige Aufgabe ist nur auf die Endpunkte der Linie AZ (Fig. 93 und 94, a. f. S.) anzuwenden, um das Bild A_1Z_1 derselben zu finden, das

Fig. 93.



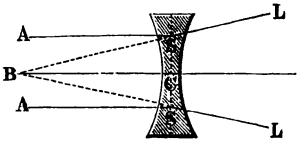
im ersten Falle ein Sammelbild hinter der Linse, im zweiten ein geometrisches vor derselben ist.

Fig. 94.



34. Der Zerstreuungspunkt liegt (Fig. 95) im Mittelpunkte B der Linsenkrümmung auf derselben Seite der Linse, auf welcher der einfallende Strahl liegt.

Fig. 95.



35. Die Konstruktion ist ähnlich der in Aufgabe 30, d) und aus den Figuren 96 und 97 leicht erkennbar.

Fig. 96.

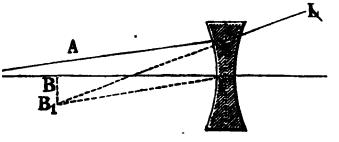
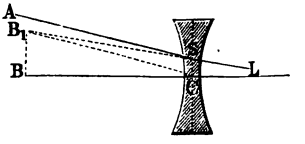
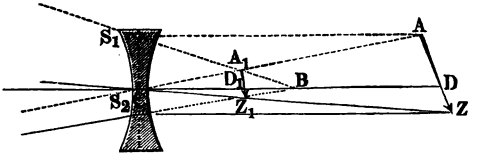


Fig. 97.



36. Die Auflösung ergiebt sich aus Fig. 98. Das geometrische Bild $A_1 Z_1$ liegt immer zwischen der Linse und dem leuchtenden Gegenstande AZ und steht aufrecht.

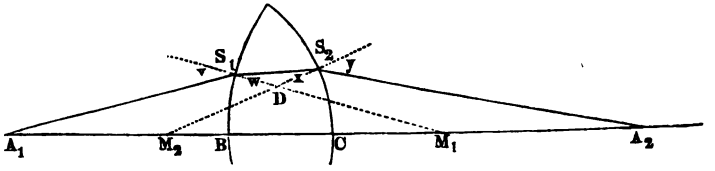
Fig. 98.



37. Aus den Dreiecken $A_1 S_1 M_1$ und $A_2 S_2 M_2$ (Fig. 99) folgt, wenn man die spitzen Winkel bei A_1, M_1, A_2, M_2 mit diesen Buchstaben bezeichnet,

$v = A_1 + M_1$, $y = A_2 + M_2$, folglich $v + My = A_1 + M_1 + A_2 + M_2$, oder, da man wegen der vorausgesetzten Kleinheit der betreffenden Winkel $v = n \cdot w$ und $y = n \cdot x$ setzen kann, $n\,(w + x) = A_1$

Fig. 99.



$+ M_1 + A_2 + M_2$. Aus den beiden Dreiecken $S_1 D S_2$ und $M_1 D M_2$ folgt aber $w + x = M_1 + M_2$, folglich ist $n\,(M_1 + M_2) = A_1 + A_2 + (M_1 + M_2)$, also

$$(n - 1)\,(M_1 + M_2) = A_1 + A_2.$$

Da nun $M_1 = \frac{BS_1}{r} \cdot \varrho$, $M_2 = \frac{CS_2}{\mathfrak{r}} \cdot \varrho$, worin $\varrho = \frac{180}{\pi}$, und wenn wie gewöhnlich die Dicke des Glases vernachlässigt werden kann, $A_1 = \frac{CS_2}{a} \cdot \varrho$, $A_2 = \frac{BS_1}{\alpha} \cdot \varrho$, sowie $BS_1 = CS_2$ zu setzen ist,

so hat man $(n - 1)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\mathfrak{r}}\right) = \frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha}$.

38. Für Bikonvexgläser von ungleichen Radien folgt aus II. der Aufgabe: $p = \frac{r \cdot \mathfrak{r}}{(n - 1)\,(r + \mathfrak{r})} = \frac{2r\mathfrak{r}}{r + \mathfrak{r}}$.

Für Bikonvexgläser von gleichen Radien folgt $p = \frac{r}{2\,(n - 1)} = r$, d. h. der Brennpunkt eines solchen Glases ist um den Radius vom optischen Mittelpunkte entfernt. Für Plankonvexgläser ist, da $r = \infty$, $p = \frac{r}{n - 1} = 2r$, d. h. der Brennpunkt ist um den doppelten Radius vom Glase entfernt. Für Konkavkonvexgläser folgt aus II., da hier $\mathfrak{r}$ negativ und größer als r ist, $p = \frac{r\mathfrak{r}}{(n - 1)\,(\mathfrak{r} - r)} = \frac{2r\mathfrak{r}}{r - \mathfrak{r}}$.

39. 1) $\alpha = p$, d. h. die Bildweite ist gleich der Brennweite der Linse. 2) $\alpha > p$ und zwar $= \frac{\alpha p}{a - p}$. 3) $\alpha = 2p$. 4) $\alpha = \infty$. 5) α muß in diesem Falle negativ sein, d. h. das (geometrische) Bild auf derselben Seite der Linse liegen, auf welcher der leuchtende Punkt liegt (die vom leuchtenden Punkte ausgehenden Strahlen sind nach ihrem Durchgange durch die Linse divergierend, aber weniger als vorher) und der Absolutwert von α ergiebt sich aus der Formel $\frac{1}{a} - \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{p}$, nämlich $\alpha = \frac{ap}{p - a}$. 6) Die Strahlen

werden in diesem Falle noch mehr konvergierend und der Absolutwert von α berechnet sich aus der Formel $-\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{p}$, nämlich $\alpha=\frac{ap}{a+p}$.

40. Aus Aufgabe 38 folgt $p=\frac{2\,.\,6\,.\,8}{6+8}=6^6/_7$ cm.

41. Aus Aufgabe 38 folgt $r=\frac{p\,(n-1)\,r}{r-p\,(n-1)}=18$ cm.

42. Aus Aufgabe 38 folgt $p=2\,.\,24=48$ cm.

43. Aus Aufgabe 39 folgt $p=\frac{a\,.\,\alpha}{a+\alpha}=\frac{450\,.\,24}{450+24}=22{,}78$ cm.

44. $\frac{1}{25}+\frac{1}{200}=0{,}563\cdot\frac{2}{r}$, woraus $r=24$. Die Höhe des Bildes beträgt $\frac{200}{25}\cdot 6=48$ cm.

45. $\frac{1}{10}+\frac{1}{x}=\frac{0{,}563}{12}$, woraus $x=-18{,}84$. Die Bildgröße ist $\frac{6\,.\,18{,}84}{10}=11{,}304$ cm.

46. Aus Aufgabe 39 folgt a) $\alpha=\frac{100\,.\,60}{100-60}=150$ cm; b) $\alpha=100$ cm; c) $\alpha=85{,}7$ cm; d) $\alpha=80{,}4$ cm.

47. Nach Aufgabe 39, 6) ist in diesem Falle die Formel $-\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{p}$ anzuwenden, woraus sich die gesuchte Vereinigungsweite $\alpha=\frac{ap}{a+p}=\frac{20\,.\,60}{20+60}=15$ cm ergiebt.

48. Es sei (Fig. 100 und 101) $AZ=l$ die lineare Größe des Gegenstandes, $A_1Z_1=\lambda$ die entsprechende seines Bildes, so hat man wegen der

Fig. 100.

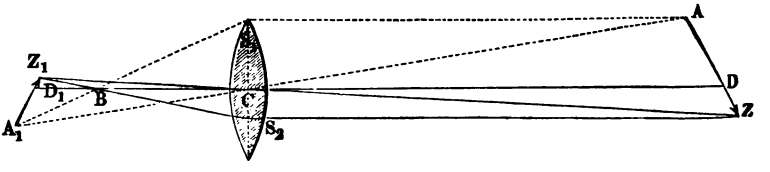
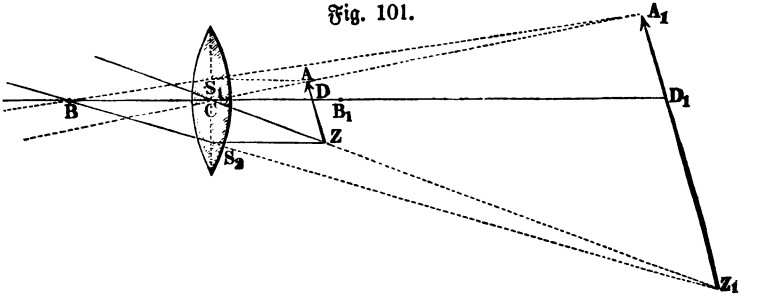


Fig. 101.



Ähnlichkeit der betreffenden Dreiecke $\frac{A_1 Z_1}{AZ} = \frac{CD_1}{CD}$, d. h. $\frac{\lambda}{l} = \frac{\alpha}{a}$. Will man in dieser Gleichung, wie gewöhnlich, α durch a und p ausgedrückt haben, so erhält man:

1) wenn sowohl a als α positiv, d. h. Gegenstand und (Sammel-) Bild auf verschiedenen Seiten der Linse liegen, also (nach Aufgabe 39) $\alpha = \frac{ap}{a-p}$ ist, wie in Fig. 100, $\frac{\lambda}{l} = \frac{p}{a-p}$;

2) wenn a positiv und α negativ, d. h. Gegenstand und (geometrisches) Bild auf derselben Seite liegen, also $\alpha = \frac{ap}{p-a}$ ist, wie in Fig. 101, $\frac{\lambda}{l} = \frac{p}{p-a}$.

49a. Das Bild ist $\frac{36}{144-36} = 1/3$ mal so groß, wie der Gegenstand, also dreimal verkleinert (siehe Auflösung 1 zu Aufgabe 47).

49b. Da die Bildweite $= \frac{40 \cdot 240}{240-40} = 48$ cm ist, so hat man aus

$$240 : 48 = 4 : x \ldots x = 0{,}8 \text{ cm}.$$

49c. Aus der Auflösung 2 zu Aufgabe 48 folgt die Vergrößerung $= \frac{4}{4-2{,}4} = 2{,}5$, also die Größe des Bildes der Lichtflamme $= 2{,}5 \cdot 4 = 10$ cm.

50. Bezeichnet l den Durchmesser der Sonne, λ den des Sonnenbildes, a die Entfernung der Sonne und p die Brennweite der Linse, so ist nach Aufgabe 47: $\frac{\lambda}{l} = \frac{p}{a-p}$, also, da hier p gegen a verschwindend klein ist, $\lambda = \frac{1}{a} p$. Betrachtet man l als Bogen eines Kreises vom Halbmesser a, so hat man $l : a\pi = \frac{32}{60} : 180$, woraus $\frac{l}{a} = \frac{32}{60} \cdot \frac{\pi}{180}$ folgt. Also ist $\lambda = \frac{32}{60} \cdot \frac{3{,}1416}{180} \cdot 30$ cm $=$ nahe 2,8 mm.

51. Aus $\frac{30}{x-30} = 5$ folgt $x = 36$ cm.

52. Aus $\frac{30}{30-x} = 5$ folgt $x = 24$ cm (siehe Auflösung 2 zur Aufgabe 48).

53. Aus $\frac{x}{x-3} = 4$ folgt $x = 4$ dm.

54. $\frac{2}{2-1{,}8} = 10$ mal.

55. Man braucht nur die Krümmungsradien negativ zu setzen, so daß man erhält:

für Bikonkavlinsen überhaupt:

$$p = -\frac{r \cdot r}{(n-1)(r+r)} = -\frac{2rr}{r+r};$$

für Bikonkavlinsen von gleichen Radien:

$$p = -\frac{r}{2(n-1)} = -r;$$

für Plankonkavlinsen:

$$p = -\frac{r}{n-1} = -2r;$$

für Konvexkonkavlinsen:

$$p = -\frac{rr}{(n-1)(r-r)} = -\frac{2rr}{r-r}.$$

Die Zerstreuungsweiten der Konkavlinsen sind also den Brennweiten der Konvexlinsen der Größe nach gleich, der Richtung nach aber entgegengesetzt.

56. Man braucht nur p negativ zu setzen, so daß man hat $\frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha} = -\frac{1}{p}$, oder $\alpha = -\frac{ap}{a+p}$, worin jetzt p eine absolute (positive) Zahl bezeichnet. Aus dieser Gleichung folgt:

1) Für $a = \infty$ wird $\alpha = -p$.

2) Ist a positiv, so muß α negativ und $a > \alpha$ sein, d. h. divergierend auffallende Strahlen werden noch mehr divergierend. Ist dabei $a > p$, so ist der Absolutwert von $\alpha < p$. Ist $a = p$, so ist der Absolutwert von $\alpha = {}^1/_2 p$. Ist $a < p$, so ist α noch kleiner als a.

3) Ist a negativ, aber sein Absolutwert

(1) $> p$, so ist α negativ oder die Strahlen werden divergierend und $a > p$,

(2) $= p$, so ist $\alpha = \infty$,

(3) $< p$, so ist α positiv und größer als a, oder die Strahlen bleiben konvergierend, ihre Konvergenz ist jedoch nach der Brechung geringer als vor derselben.

57. Die Entfernung des Bildes von der Linse ist $= -\frac{30 \cdot 10}{30 + 10}$ $= -7{,}5$ cm, d. h. das Bild des Gegenstandes liegt auf derselben Seite, auf welcher der Gegenstand sich befindet, 7,5 cm weit von der Linse entfernt. Die Größe des Bildes verhält sich zu der des Gegenstandes, wie 7,5 zu 30, oder das Bild ist viermal so klein als der Gegenstand.

58. Um die Brennweite einer Konvexlinse zu finden, kann man, nachdem man sie zur Wegschaffung der Randstrahlen mit einem papiernen Rande bedeckt hat, der nur die Mitte derselben frei läßt, so verfahren:

1) Man fängt das hinter der Linse entstehende Bild der Sonne auf einer weißen Papierfläche auf, mißt die Entfernung der letzteren von der Linse und addiert dazu die Entfernung der Linsenoberfläche vom optischen Mittel-

punkte, also bei einer konvexen Linse mit gleichen Krümmungshalbmessern die halbe Dicke.

2) Oder man stellt ein gutes Fernrohr auf einen sehr fernen Gegenstand, z. B. den Mond, so ein, daß man ihn deutlich und scharf sieht, alsdann legt man dieses Fernrohr horizontal, stellt die zu prüfende Linse in der Achse des Fernrohrs auf und hinter derselben ein Papier mit scharf geschriebener oder gedruckter Schrift, das man so lange hin- und herrückt, bis man die Schrift deutlich lesen kann. Die Entfernung der Schrift von der Linse, vermehrt um die Entfernung der Linsenoberfläche vom optischen Mittelpunkte, ist die gesuchte Brennweite; denn das Fernrohr kann bei der ihm gegebenen Stellung seiner Gläser gegeneinander nur von solchen Gegenständen ein deutliches Bild geben, von welchen die Strahlen jedes einzelnen Punktes parallel auf das Objektiv fallen, also parallel aus der zu prüfenden Linse fahren, d. h. vom Brennpunkte derselben ausgehen.

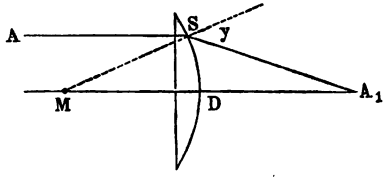
Zur Auffindung der Zerstreuungsweite einer Konkavlinse bedeckt man den Rand derselben gleichfalls mit einem Papierstreifen, zeichnet auf einer weißen Papierfläche einen Kreis von doppeltem Durchmesser, wie derjenige des frei gelassenen Teiles der Linse, und stellt dann die Linse und das Papier mit dem Kreise so auf, daß die auf die erstere fallenden Sonnenstrahlen auf dem letzteren einen Lichtkreis bilden, der genau den gezeichneten Kreis deckt. Die Entfernung der Papierfläche von der Linse, vermehrt um die halbe Dicke der Linse, ist die gesuchte Zerstreuungsweite, was sich mittels Fig. 95 auf Seite 152 leicht erklärt.

59. Der Strahl AS (Fig. 102) geht ungebrochen in die Linse und wird an der krummen Fläche nach einem Punkte A_1 der Linsenachse gebrochen. Wir wollen nun dessen Entfernung DA_1 von der Linse zu bestimmen suchen. Aus dem $\triangle MA_1S$ folgt $MA_1 = \frac{MS \sin y}{\sin A_1}$ oder, wenn $MS = MD = 1$ und $\measuredangle A_1 = y - M$ gesetzt wird, $MA_1 = \frac{\sin y}{\sin (y - M)}$, also

$$DA_1 = MA_1 - MD = \frac{\sin y}{\sin (y - M)} - 1.$$

Der Winkel y, folglich auch $y - M$, läßt sich, wenn $\measuredangle M$ ($= \measuredangle ASM$) und der Brechungsquotient n gegeben sind, mittels der Gleichung $\sin y = n \sin M$ berechnen, also auch DA_1 finden. Führt man diese Rechnung für $M = 1^0, 2^0, 3^0$ u. s. w. und $n = 1{,}5$ aus, so findet man, daß mit wachsendem M die Werte von DA_1 fortwährend abnehmen, und zwar für größere Winkel sehr bedeutend, daß sie aber für Winkel bis zu 5^0 nahe zusammenfallen, nämlich sämtlich nahe $= 2$, d. h. dem doppelten Krümmungshalbmesser gleich sind, so daß für eine Plankonvexlinse der Mittelpunktswinkel ($2M$) 10^0 betragen

Fig. 102.



darf, wenn parallel auffallende Strahlen im Brennpunkte vereinigt werden sollen.

60. Das erste Bild entsteht durch die Brechung, welche die Lichtstrahlen beim Durchgange durch die Linse erfahren, und ist ein reelles. Das zweite Bild entsteht durch Reflexion der Lichtstrahlen von der dem Auge zugewendeten Fläche der Linse, die hier wie ein konvexer Spiegel wirkt, und ist ein bloß geometrisches (imaginäres). Das dritte Bild entsteht durch Reflexion der Lichtstrahlen, die in die Linse eingedrungen sind, aber von der abgewendeten Linsenfläche, die hier als Hohlspiegel wirkt, wieder reflektiert werden; es ist ein reelles Bild.

61. Aus $p = \frac{r}{n-1}$ (siehe Aufg. 38) folgt $n = \frac{r+p}{p} = \frac{16+31}{31}$ $= 1{,}516$.

62. Aus der Formel der Aufgabe erhält man $\frac{r}{\mathfrak{r}} = \frac{1}{6}$ und aus dieser Gleichung in Verbindung mit der aus Aufgabe 38, II. sich ergebenden $(1{,}5-1)\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{\mathfrak{r}}\right) = \frac{1}{36}$ findet sich $r = 21$ und $\mathfrak{r} = 126$ cm.

Auflösungen zu XXIX.

1. a) Als ein tiefer liegender, gefärbter Streifen, dessen Längenrichtung auf der Kantenrichtung des Prismas senkrecht steht und der oben rot, darunter orange, gelb, grün, blau, violett erscheint.

   b) Als ein tiefer liegender, breiter gefärbter Streifen, der von oben nach unten zu rot, orange, gelb, grün, blau und violett erscheint. (Der Streifen erscheint aber auch gekrümmt, weil die von der Linse schief auf die vordere Prismenseite fallenden Strahlen, welche das Auge empfängt, so gebrochen werden, als gingen sie durch ein Prisma von größerem brechenden Winkel.)

   c) Am oberen Ende rot und gelb, am unteren blau und violett, in der Mitte aber weiß.

   d) Sie erscheint oben violett und blau, unten rot und gelb gefärbt, also umgekehrt, wie eine weiße Linie auf schwarzem Grunde. (Die Färbung rührt natürlich von dem Weiß her, worauf die schwarze Linie sich befindet.)

2. Die Antwort ist ähnlich, wie für c) und d) der vorigen Aufgabe.

3. Erklärt sich leicht durch Verfolgung des einfallenden Lichtstrahles AB mittels der Figur bei der Aufgabe. Die innerhalb des Prismas zerstreuten

Farbenstrahlen treten bei C, E und G zerstreut, also gefärbt, dagegen bei D, E und B parallel, also ungefärbt aus dem Prisma.

4. Aus XXVIII., 38 und Tabelle 23 findet sich

ad a) für die Strahlen nach B: $p = \frac{r}{2\,(n-1)} = \frac{r}{2\,.\,0{,}525832}$
$= 0{,}9509\,r$,

„ „ „ „ F: $p = \frac{r}{2\,.\,0{,}533005} = 0{,}9381\,r$,

„ „ „ „ H: $p = \frac{r}{2\,.\,0{,}546566} = 0{,}9148\,r$;

ad b) für die Strahlen nach B: $p = 0{,}7965\,r$,

„ „ „ „ E: $p = 0{,}7788\,r$,

„ „ „ „ H: $p = 0{,}7451\,r$.

5. Unter komplementären oder Ergänzungsfarben versteht man solche, die einander zu Weiß ergänzen. Grün ist die Ergänzungsfarbe zu Rot, Blau von Orange, Violett von Gelb und umgekehrt. S. jedoch Lehrb. §. 163.

6. Wenn ein Lichtstrahl auf ein Mittel trifft, so wird ein Teil des Lichtes an der Grenze entweder regelmäßig oder zerstreut (diffus) zurückgeworfen, ein anderer Teil geht in das Mittel über. Das in das Mittel eindringende Licht wird nun in den verschiedenen Schichten desselben, auf welche es trifft, zum Teil reflektiert, zum Teil absorbiert oder auch zum Teil durchgelassen.

Von einem im durchfallenden Lichte gefärbt erscheinenden Körper muß man daher annehmen, daß die komplementären Farbenstrahlen, d. h. diejenigen, welche die durchgelassenen zu Weiß ergänzen würden, teils von seiner Oberfläche reflektiert, teils in ihm absorbiert werden; — von einem im reflektierten Lichte farbig erscheinenden, daß die in eine, wenn auch nur sehr dünne Oberflächenschicht des Körpers eingedrungenen Lichtstrahlen zum Teil absorbiert oder durchgelassen, zum Teil reflektiert werden, und zwar so, daß die absorbierten und durchgelassenen die Ergänzungsfarben der reflektierten sind.

7. a) Erklärt sich unmittelbar aus voriger Aufgabe.

b) Fällt das (weiße) Licht zuerst auf das rote Glas, so absorbiert dieses die grünen Strahlen und läßt bloß die roten durch; diese aber werden vom grünen Glase nicht durchgelassen. Der umgekehrte Fall findet statt, wenn das Licht zuerst auf das grüne Glas fällt.

8. Die Luft reflektiert am meisten die blauen und violetten Strahlen des weißen Sonnenlichtes, so daß direkt von der Sonne vorzugsweise die roten und gelben, von den übrigen Punkten des Himmelsgewölbes aber die blauen Strahlen zu uns gelangen. Morgens und abends hat aber das Sonnenlicht einen längeren Weg in der Atmosphäre zurückzulegen, als bei höherem Stande der Sonne, weshalb morgens und abends die blauen Strahlen in größerem Maße durch Reflexion verloren gehen und vorherrschend die roten und gelben Strahlen zu uns gelangen.

9. Die Empfindung des Blau wird durch schnellere Schwingungen der Netzhaut erzeugt, als die, wodurch die Empfindung des Rot entsteht. Blau

verhält sich also zum Rot, wie ein höherer Ton zu einem niederen; aber wie die Saiten des Kontrabasses, um vernommen zu werden, weiter schwingen müssen, wie die der Violine, so müssen auch die Schwingungen, welche Rot erzeugen sollen, energischer sein, als die, welche die Empfindung des Blau verursachen. Bei langsamer Beleuchtung werden daher die langsamen Schwingungen der roten Farbe nicht mehr empfunden, während die rascher aufeinander folgenden Schwingungen des blauen Lichtes noch wahrgenommen werden.

10. Das Licht des Mondes ist blau, das der Kerze rot; denn der eine der beiden Schatten ist eine Stelle, welche vom Monde allein, der andere Schatten eine Stelle, welche nur vom Kerzenlicht beschienen wird.

11. Ist u (Fig. 83) gleich 30^0, so ist, wenn der in das Prisma eintretende rote Strahl auf KB senkrecht stehen soll und wir den Einfallswinkel mit α bezeichnen:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin 30} = 1{,}526,$$

woraus $\alpha = 49^0\,43{,}7'$.

Der Brechungswinkel β aber ist $49^0\,43{,}7' - 30^0 = 19^0\,43{,}7'$.

Der Brechungswinkel β' des violetten Strahles findet sich aus der Gleichung:

$$\frac{\sin 49^0\,43{,}7'}{\sin \beta'} = 1{,}547;$$

woraus $\beta' = 29^0\,33{,}1'$.

Der Winkel γ', unter dem der violette Strahl auf die zweite Prismenfläche KB fällt, ist $= 30 - \beta' = 0^0\,26{,}9'$.

Der Brechungswinkel δ' des violetten Strahles findet sich aus der Gleichung:

$$\frac{\sin \delta'}{\sin \gamma'} = 1{,}547;$$

danach ist $\delta' = 0^0\,41{,}6'$.

Der Ablenkungswinkel n des roten Strahles $= 49^0\,43{,}7 - u = 19^0\,43{,}7'$. ($u = 30^0$.)

Der Ablenkungswinkel n' des violetten Strahles ist $= \alpha + \delta - u = 20^0\,25{,}3'$.

12. a) Der Brechungswinkel β des roten Lichtes findet sich aus der Gleichung:

$$\frac{\sin 42^0\,12'}{\sin \beta} = 1{,}6,$$

woraus $\beta = 24^0\,49{,}4'$ und $\gamma = 57^0\,14' - 24^0\,49{,}4' = 32^0\,24{,}6'$.

Ferner findet sich δ aus der Gleichung:

$$\frac{\sin \delta}{\sin 32^0\,24{,}6'} = 1{,}6,$$

wonach $\delta = 59^0\,2{,}6'$.

Alsdann ist der Ablenkungswinkel n für rotes Licht $42^0\,12' + 59^0\,2{,}6' - 57^0\,14' = 44^0\,0{,}6'$.

b) Der Brechungswinkel β' des violetten Lichtes findet sich aus der Gleichung:

$$\frac{\sin 42^0 12'}{\sin \beta'} = 1{,}64,$$

woraus $\beta' = 24^0 10{,}8'$ und $\gamma' = 57^0 14' - 24^0 10{,}8' = 33^0 3{,}2'$.

Ferner findet sich δ' aus der Gleichung:

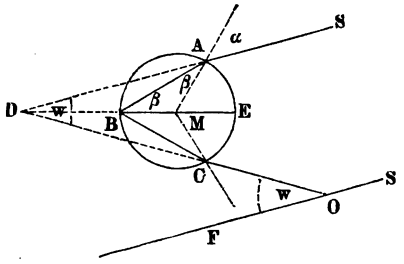
$$\frac{\sin \delta'}{\sin 33^0 3{,}2'} = 1{,}64,$$

wonach $\delta' = 63^0 26{,}5'$.

Ferner ist der Ablenkungswinkel n' für violettes Licht gleich $42^0 12' + 63^0 26{,}5' - 57^0 14' = 48^0 24{,}5'$.

13. Aus Fig. 103 ergiebt sich $^1/_2\, w = AME - DAM = 2\beta - \alpha$,

Fig. 103.



also $w = 4\beta - 2\alpha$, sowie $\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{n}$, worin n das Brechungsverhältnis eines aus Luft in Wasser übergehenden Lichtstrahles bezeichnet.

14.

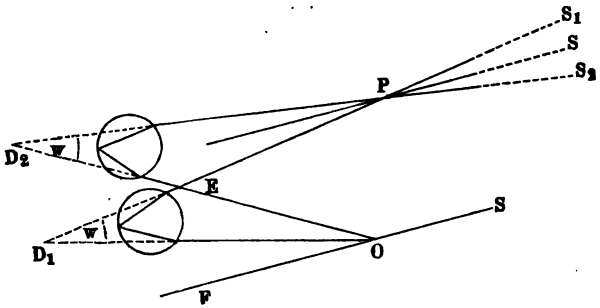
Einfallsw. α.	Brechungsw. β.	Ablenkungsw. w.
0^0	0^0	0^0
10	7 30′	10
20	14 54	19 36′
30	22 5	28 20
40	28 54	35 36
50	35 10	40 40
58	39 37	42 28
$59^0 23'$	40 12	42 2
60	40 37	42 28
70	44 57	39 48
80	47 46	31 4
90	48 45	15

15. Da das Auge nur aus jenen Tropfen ein Bild des Punktes S erhalten kann, auf welche Strahlen unter einem Einfallswinkel von $59^0 23'$ fallen und unter einem Ablenkungswinkel von $42^0 2'$ reflektiert werden, — da ferner wegen der vorausgesetzten großen Entfernung des Punktes S alle diese

Strahlen dem durch das Auge O (Fig. 103) gehenden Strahl SOF parallel betrachtet werden können, also bezüglich jedes Tropfens, der Licht ins Auge zu reflektieren vermag, $\measuredangle DOF = w = 42^0\,2'$ sein muß, so ergiebt sich, daß alle Bilder des Punktes S in einem Kreise liegen müssen, durch dessen Mittelpunkt die Linie SOF geht und dessen Halbmesser im Punkte O unter einem Winkel von $42^0\,2'$ erscheint. Dabei ist jedoch auf die Farbenzerstreuung noch keine Rücksicht genommen.

16. Setzt man an die Stelle des leuchtenden Punktes S die Sonne mit ihrem scheinbaren Durchmesser von beiläufig $32'$, so muß, wieder von der Farbenzerstreuung abgesehen, statt der kreisförmigen Lichtlinie ein ringförmiger Streifen von $32'$ Breite gesehen werden. Denn unter den unzähligen, von zwei gegenüberliegenden Punkten S_1 und S_2 des Sonnenrandes (Fig. 104)

Fig. 104.



ausgehenden Strahlenbündeln muß es zwei geben, welche (nach ihrer Kreuzung im Punkte P) bei D_1 und D_2 Regentropfen so treffen, daß sie unter dem Ablenkungswinkel $w = 42^0\,2'$ ins Auge reflektiert werden. Aus den beiden Dreiecken D_1EO und D_2EP folgt aber, weil $\measuredangle D_1 = D_2$ und $\measuredangle E = E$, auch $\measuredangle D_1OD_2 = D_1PD_2 = 32'$ (in der Figur mußte dieser Winkel vielmal größer dargestellt werden).

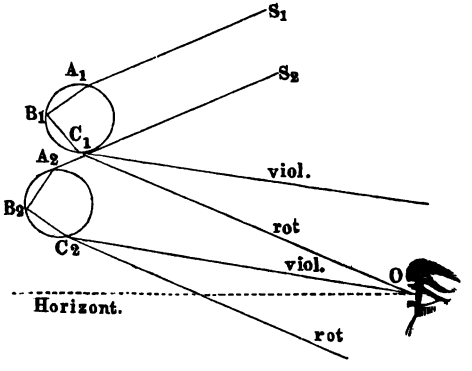
17. Berechnet man wieder, wie in Aufgabe 14, aus der Relation $w = 4\beta - 2\alpha$, mit Hilfe der Gleichung $\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{\left(\frac{109}{81}\right)}$ für alle möglichen Werte des Einfallswinkels α die zugehörigen Ablenkungswinkel w, wovon hier nur die folgenden stehen mögen:

Einfallsw. α_1	Brechungsw. β_1	Ablenkungsw. w_1
58^0	$39^0\,15'\,45''$	$41^0\,3'$
$58^0\,40'$	$39^0\,24'$	$40^0\,16'$
59	$39\;46\;4$	$41\;4$

so ergiebt sich, daß der violette Lichtbogen einen scheinbaren Halbmesser von $40^0\,16'$ hat, daß also durch den leuchtenden Punkt ein verschieden gefärbter ringförmiger Streifen von $42^0\,2' - 40^0\,16' = 1^0\,46'$ Breite entsteht,

dessen äußerer Rand rot, dessen innerer violett erscheint (während der Zwischenraum orange, gelb, grün und blau gefärbt sich darstellt). Übrigens ist einleuchtend, daß die verschieden gefärbten Strahlen ihrer großen Divergenz wegen nicht aus dem nämlichen Tropfen ins Auge gelangen können. Die Figur 105 erläutert, welche Lage zwei Tropfen haben müssen, damit aus dem

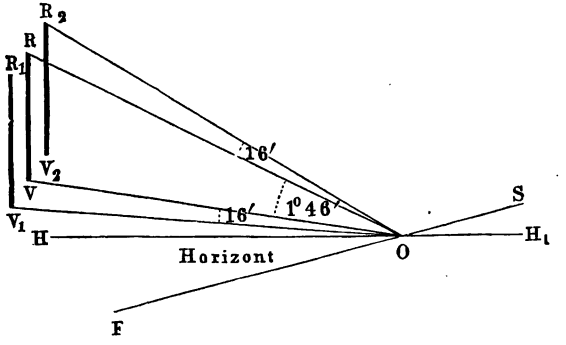
Fig. 105.



einen ein roter, aus dem anoern ein violetter Strahl ins Auge gelangt, wobei zu bemerken ist, daß bei richtiger Darstellung der Winkel $C_1 O C_2 = 1^0\,46'$ sein müßte.

18. Setzt man an die Stelle des leuchtenden Punktes der vorigen Aufgabe die Sonne mit ihrem scheinbaren Durchmesser von 32′, so muß von jedem Punkte der Sonne ein dem vorhin beschriebenen ähnlicher ringförmiger Streifen mit den Spektralfarben entstehen. Stellt (Fig. 106) RV einen nach

Fig. 106.



dem Krümmungsmittelpunkte gerichteten Durchschnitt desjenigen Streifens dar, der dem vom Mittelpunkte der Sonne herkommenden Strahlenbündel seine Entstehung verdankt, sowie $R_1 V_1$ und $R_2 V_2$ dasselbe bezüglich der von zwei entgegengesetzten Punkten des Sonnenrandes kommenden Strahlen-

bündel (welche drei Durchschnitte als in eine Linie zusammenfallend zu denken sind), so ergiebt sich die Breite des Regenbogens, nämlich $\measuredangle V_1 O R_2 = V_1 O V + V O R + R O R_2 = 16' + 1^0\,46' + 16' = 2^0\,18'$.

Das Rot liegt an der äußeren (konvexen), das Violett auf der inneren (konkaven) Seite des Regenbogens.

Denken wir uns die Figur 106 als einen vertikalen Durchschnitt durch den höchsten Punkt des Regenbogens, so stellt HOR_2 seine scheinbare Höhe dar. Nun ist

$$\begin{aligned}\measuredangle HOR_2 &= HOR + ROR_2\\ HOR &= FOR - HOF\\ &= w - h, \text{ wenn } h \text{ die scheinbare Höhe des Sonnenmittelpunktes bezeichnet,}\\ &= 42^0\,2' - h,\\ ROR_2 &= 16',\end{aligned}$$

folglich $\measuredangle HOR_2 = 42^0\,2' - h + 16'$.

Die größte Höhe, nämlich $42^0\,2'$, erreicht daher der Regenbogen, wenn der untere Rand der Sonne im Horizont steht, weil dann $h = 16'$ ist.

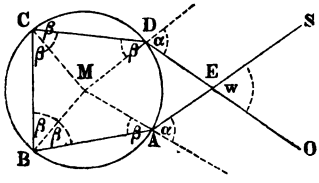
19. In dem Fünfeck $ABCDE$ (Fig. 107) ist die Summe der Polygonwinkel $= 540^0$, $\angle C = \angle B = 2\beta$ und $\angle A = \angle D = 180^0 + \beta - \alpha$, also ist $\gamma = 540^0 - 2 \cdot 2\beta - 2 \cdot (180^0 + \beta - \alpha) = 180^0 + 2\alpha - 6\beta$.

20. Berechnet man ähnlich, wie in den Aufgaben 14 und 16, aus der in voriger Aufgabe gefundenen Relation die Ablenkungswinkel γ für die verschiedenen Einfallswinkel α zwischen 0^0 und 90^0, so findet man, wie früher das Brechungsverhältnis n für rote Strahlen $= \frac{108}{81}$, für violette $= \frac{109}{81}$ annehmend:

Einfallsw. α für		Brechungsw. β für		Ablenkungsw. w für	
Rot.	Violett.	Rot.	Violett.	Rot.	Violett.
71^0	71^0	$45^0\ 9'\ 54''$	$44^0\ 38'\ 19''$	$51^0\ 0'\ 16''$	$54^0\ 10'\ 6''$
$71^0\ 49'\ 55''$	$71^0\ 26'\ 9''$	45 26 51	49 47 7	50 58	54 10
72^0	72^0	45 30 12	44 58 15	50 58 48	54 10 30

woraus mittels ähnlicher Schlüsse, wie in den Aufgaben 15, 16 und 17 folgt, daß im zweiten Regenbogen der Halbmesser des roten Lichtes $= 50^0\,58'$, der des violetten $= 54^0\,10'$, beide bis zur Mitte gerechnet, daß also die Breite des zweiten Regenbogens $= (54^0\,10' - 50^0\,58') + 32' = 3^0\,44'$ ist, wenn der scheinbare Durchmesser der Sonne $= 32'$ gesetzt wird. Die beiden Regenbogen sind um ungefähr $50^0\,58' - 16' - 42^0\,2' = 8^0\,40'$ voneinander entfernt.

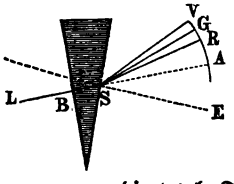
Fig. 107.



Die größere Lichtschwäche des zweiten gegen den Hauptregenbogen erklärt sich aus dem größeren Lichtverlust bei der zweifachen Reflexion der Strahlen in den Tropfen.

21. Bezeichnet β_r den Brechungswinkel ESR (Fig. 108) des roten Strahles,
β „ „ ESG des mittleren (grünen „
β_v „ „ ESV „ violetten „
so ist der totale Zerstreuungswinkel $RSV = \beta_v - \beta_r$, der Ablenkungswinkel ASG des grünen Strahles $= \beta - \alpha$. Nun ist, wenn die Winkel α, β_r, β, β_v sehr klein sind, also ihren Sinus proportional angenommen werden können, der Definition des Brechungsverhältnisses gemäß $\beta_r = n_r \cdot \alpha$, $\beta = n \cdot \alpha$, $\beta_v = n_v \cdot \alpha$, folglich, wenn man diese Werte in den vorhergehenden Ausdrücken substituiert,

Fig. 108.



die totale Farbenzerstreuung $= (n_v - n_r) \cdot \alpha$,
die Ablenkung des mittleren Strahles $= (n - 1) \cdot \alpha$.

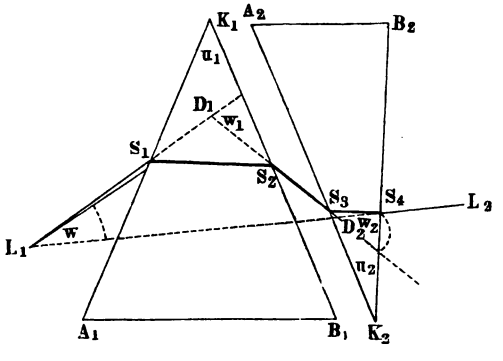
22. Da der Lichtstrahl LB in diesem Falle ungebrochen oder fast ungebrochen in das Prisma geht, also der Einfallswinkel des auf die zweite Seite des Prismas treffenden Strahles dem brechenden Winkel des Prismas gleich oder nahe gleich ist, so hat man nach voriger Aufgabe

die totale Farbenzerstreuung $= (n_v - n_r)\, u$,
die Ablenkung des mittleren Strahles $= (n - 1)\, u$.

23. Aus Fig. 108 ergiebt sich unmittelbar: die Ablenkung des roten Strahles ist gleich dem Ablenkungswinkel des mittleren Strahles weniger dem Zerstreuungswinkel zwischen dem mittleren und roten Strahl, also $= (n - 1)\, u - (n - n_r)\, u = (n_r - 1)\, u$. Die Ablenkung des violetten Strahles ist $= (n - 1)\, u + (n_v - n)\, u = (n_v - 1)\, u$.

24. Bestimmen wir zuerst die Ablenkung w des mittleren Strahles. Aus dem $\triangle D_1 D_2 L_1$ (Fig. 109), wovon w_1 ein Außenwinkel ist, ergiebt sich

Fig. 109.



$w = w_1 - \angle D_1 D_2 L_1$, also, da $D_1 D_2 L_1 = w_2$ ist, wie $w = w_1 - w_2$. Nun ist aber der Aufgabe 22 gemäß $w_1 = (n_1 - 1)\, u_1$ und $w_2 = (n_2 - 1)\, u_2$, folglich

$$w = (n_1 - 1)\, u_1 - (n_2 - 1)\, u_2.$$

Auf ähnliche Weise erhält man mittels Aufgabe 23:

$$w_r = w_{1r} - n_{2r} = (n_{1r} - 1)\, u_1 - (n_{2r} - 1)\, u_2$$
$$w_v = w_{1v} - w_{2v} = (n_{1v} - 1)\, u_1 - (n_{2v} - 1)\, u_2.$$

25. Damit der mittlere Strahl ungebrochen austrete, muß (siehe Auflösung der vorigen Aufgabe)

$w = (n_1 - 1)\, u_1 - (n_2 - 1)\, u_2 = 0$, also $\frac{u_1}{u_2} = \frac{n_2 - 1}{n_2 - 1}$ sein.

Überhaupt gilt und läßt sich in ähnlicher Weise auch für die übrigen Fälle aus der Auflösung der vorigen Aufgabe darthun:

Damit irgend ein Farbenstrahl ungebrochen aus der Prismenverbindung austrete, müssen sich die brechenden Winkel umgekehrt verhalten wie die Überschüsse der Brechungsquotienten des betreffenden Farbenstrahls über Eins. Dabei bleibt aber noch eine Farbenzerstreuung bestehen, die sich aus der Differenz der Farbenzerstreuungen der beiden Bestandprismen (Aufgabe 22) für den Fall eines größeren Zerstreuungsvermögens des zweiten Prismas ergiebt

$$s = (n_{2v} - n_{2r})\, u_2 - (n_{1v} - n_{1r})\, u_1.$$

26. Damit der rote Strahl mit dem violetten zusammenfalle, muß $w_r = w_v$, also (siehe Auflösung 24)

$(n_{1r} - 1)\, u_1 - (n_{2r} - 1)\, u_2 = (n_{1v} - 1)\, u_1 - (n_{2v} - 1)\, u_2$

sein, woraus folgt

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{n_{2v} - n_{2r}}{n_{1v} - n_{1r}}.$$

Überhaupt gilt und folgt auch für die übrigen Fälle aus Auflösung zu 24:

Damit zwei Strahlen von verschiedener Brechbarkeit zusammenfallen, müssen sich die brechenden Winkel der beiden Prismen umgekehrt verhalten wie die Differenzen der Brechungsquotienten der betreffenden Strahlen.

Dabei bleibt aber eine Ablenkung des mittleren Strahles bestehen, die nach Aufgabe 24 ist

$$w = (n_1 - 1)\, u_1 - (n_2 - 1)\, u_2.$$

27. Damit der rote Strahl mit dem violetten zusammenfalle, muß, wie aus Aufgabe 26 folgt,

$$u_2 = \frac{n_{1v} - n_{1r}}{n_{2v} - n_{2r}}\, u_1 = \frac{0{,}0208}{0{,}0434} \cdot 25^0 = 11^0\, 58'\, 54''.$$

Die noch verbleibende Ablenkung des mittleren Strahles ist nach der Auflösung zu 24

$$w = (n_1 - 1)\,u_1 - (n_2 - 1)\,u_2 = 0{,}5330 \,.\, 25^0 - 0{,}6420 \,.\, 11^0\,58'\,54'' = 5^0\,38'.$$

28. Weil die Farbenverteiluug im Crownglasspektrum und im Flintglasspektrum nicht proportional ist, d. h. die durch analoge Fraunhofersche Linien begrenzten Teile der beiden Spektra nicht in gleichem Verhältnisse stehen (vergl. Tab. 24).

29. Aus $Z = \frac{n_v - n_r}{n - 1}$ folgt $n_v - n_r = (n - 1)\,Z$, also (nach 22) der Zerstreuungswinkel $(n_v - n_r)\,u = (n - 1)\,Z\,u = 0{,}642 \,.\, 0{,}052 \,.\, 10^0 = 20{,}04$ Minuten.

30. Die Auflösung der Aufgabe 26 ergiebt die beiden für den vorliegenden Fall geltenden Bedingungsgleichungen

$\frac{u_1}{u_2} = \frac{n_{2v} - n_{2r}}{n_{1v} - n_{1r}}$ und $w = (n_1 - 1)\,u_1 - (n_2 - 1)\,u_2$, woraus

$$u_1 = \frac{w\,(n_{2v} - n_{2r})}{(n_1 - 1)\,(n_{2v} - n_{2r}) - (n_2 - 1)\,(n_{1v} - n_{1r})};$$

$$u_2 = \frac{w\,(n_{1v} - n_{1r})}{(n_1 - 1)\,(n_{2v} - n_{2r}) - (n_2 - 1)\,(n_{1v} - n_{1r})};$$ oder,

wenn man Zähler und Nenner beider Quotienten durch $(n_1 - 1)\,(n_2 - 1)$ dividiert und berücksichtigt, daß der Aufgabe gemäß $\frac{n_{1v} - n_{1r}}{n_1 - 1} = Z_1$, sowie

$$\frac{n_{2v} - n_{2r}}{n_2 - 1} = Z_2 \text{ ist, } u_1 = \frac{w \,.\, Z_2}{(n_1 - 1)\,(Z_2 - Z_1)}$$

und $u_2 = \frac{w \,.\, Z_1}{(n_2 - 1)\,(Z_2 - Z_1)}$, also, wenn man die entsprechenden Werte der Aufgabe substituiert, $u_1 = 18^0\,13'\,4''$; $u_2 = 8^0\,53'\,40''$.

31. a) Nach XXX, 15, b) muß

$$p = \frac{p_1 p_2}{p_2 - p_1} \text{ oder } \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(I)}$$

sein, welche Gleichung sich auf die mittleren Strahlen bezieht, wofür gewöhnlich die der Linie E im Spektrum genommen werden. Ebenso bestehen für die roten und violetten, den Linien B und H entsprechenden Strahlen die Gleichungen

$$\frac{1}{p_r} = \frac{1}{p_{1r}} - \frac{1}{p_{2r}}; \quad \frac{1}{p_v} = \frac{1}{p_{1v}} - \frac{1}{p_{2v}}.$$

Bezeichnen r_1 und r_1 die Krümmungshalbmesser der Konvexlinse, r_2 und r_2 die der Konkavlinse, so gehen diese letzteren Formeln durch entsprechende Substitutionen (nach Aufg. XXVIII, 38, Formel II) über in

$$\frac{1}{p_r} = (n_{1r} - 1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_1}\right) - (n_{2r} - 1)\left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_2}\right)$$

und

$$\frac{1}{p_v} = (n_{1v} - 1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_1}\right) - (n_{2v} - 1)\left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_2}\right).$$

Damit aber die roten und violetten Strahlen zusammenfallen, muß $\frac{1}{p_v} = \frac{1}{p_r}$, folglich $(n_{1v} - n_{1r})\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_1}\right) = (n_{2v} - n_{2r})\left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_2}\right)$ sein, also, wenn man zugleich (wieder XXVIII, 38, Formel II)

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_1} = \frac{1}{(n_1 - 1)\,p_1} \text{ und } \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_2} = \frac{1}{(n_2 - 1)\,p_2} \text{ setzt,}$$

$$\frac{n_{1v} - n_{1r}}{n_1 - 1} \cdot \frac{1}{p_1} = \frac{n_{2v} - n_{2r}}{n_2 - 1} \cdot \frac{1}{p_2} \text{ oder } \frac{p_1}{p_2} = \frac{\frac{n_{1r} - n_{1v}}{n_1 - 1}}{\frac{n_{2v} - n_{2r}}{n_2 - 1}},$$

oder, wenn Z_1 das Zerstreuungsvermögen des Spiegelglases, Z_2 das des Flintglases bezeichnet (Aufgabe 29),

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{Z_1}{Z_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(II)}$$

Bedingung für den Achromatismus ist also, daß sich die Brennweite der konvexen Spiegelglaslinse zur Zerstreuungsweite der konkaven Flintglaslinse wie die Zerstreuungsvermögen der beiden Glassorten verhalten.

Aus den beiden Bedingungsgleichungen (I) und (II) folgt nun

$p_1 = \left(1 - \frac{Z_1}{Z_2}\right) p$, $p_2 = \left(\frac{Z_2}{Z_1} - 1\right) p$; also, wenn man die Werte der Aufgabe substituiert, $p_1 = \left(1 - \frac{0{,}0394}{0{,}0670}\right) \cdot 48 = 19{,}7712$ cm;

$p_2 = \left(\frac{0{,}0670}{0{,}0394} - 1\right) \cdot 48 = 23{,}624$ cm.

b) Für die plankonvexe Spiegelglaslinse folgt aus Formel (II) der Aufgabe 38 in XXVIII $(n_1 - 1)\frac{1}{r_1} = \frac{1}{p_1}$ und daraus $r_1 = (n - 1)\,p_1 + 0{,}533 \cdot 19{,}7712 = 10{,}538$; für die plankonkave Flintglaslinse erhält man aus Aufgabe 53 in XXVIII. ebenso $r_2 = (n_2 - 1)\,p_2 = 0{,}642 \cdot 33{,}624 = 21{,}588$ cm. Für die angenommenen Glassorten müßte also der Krümmungshalbmesser der plankonkaven Flintglaslinse 2,05 mal so groß sein, wie der der plankonvexen Spiegelglaslinse.

32. Damit der mittlere Strahl ungebrochen austrete, muß, wie aus der Auflösung zu 25 folgt,

$$u_2 = \frac{n_1 - 1}{n_2 - 1} \cdot u_1 = \frac{0{,}5330}{0{,}6420} \cdot 25 = 20^0\,45'\,20''$$ sein.

[illegible] vorliegenden Pris-

[illegible] $= 31{,}2$ Minuten,

[illegible] $75^0 = 54$ Minuten.

[illegible] le Farbenzerstreuung

[illegible] hier geltenden Be-

[illegible] $- n_{1r})\, u_1,$

[illegible] $- n_{1r})$

[illegible] $- n_{1r})$;

[illegible] ten durch $(n_1 - 1)$

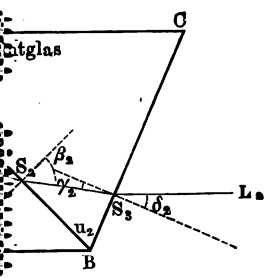
[illegible]

[illegible] 1359,5 Minuten

[illegible] 1129 Minuten

[illegible] wyglasprismas senk-

[illegible] tel von 45^0 die Seite



KA treffende der Fraunhoferschen Linie E entsprechende Lichtstrahl, so ziehe man durch K eine Linie $\| L_1 S_1$, trage auf ihr die Strecken $K\mathfrak{A} = 1$, $K\mathfrak{N}_1 = 1{,}533$, $K\mathfrak{N}_2 = 1{,}642$ ab, und beschreibe aus K Kreisbogen durch die Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$. Sodann fälle man $\mathfrak{AB}$ senkrecht auf die Prismenseite KA, $\mathfrak{BC}$ senkrecht auf die Seite KB, ziehe $S_1 S_2 \| K\mathfrak{B}$ und $S_2 S_3 \| K\mathfrak{C}$, $S_2 S_3$ in unbestimmter Länge, da die Lage der Prismenseite BC noch nicht bestimmt ist. Zieht man jetzt $\mathfrak{AC}$ und BC darauf senkrecht, so ist durch diese die Größe des brechenden Winkels u_2 gefunden und man kann beweisen, daß die mit $L_1 S_1$ parallel gezogene $S_3 L_2$ der ausfahrende Strahl ist.

Beweis. Aus dem $\triangle K\mathfrak{AB}$ folgt $\frac{\sin K\mathfrak{AB}}{\sin K\mathfrak{BA}}$ oder $\frac{\sin \mathfrak{N}_1\mathfrak{AB}}{\sin K\mathfrak{BA}} = \frac{1{,}533}{1}$ oder, da $\measuredangle \mathfrak{N}_1\mathfrak{AB} = \alpha_1$ und $K\mathfrak{BA} = \beta_1$ ist, $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \beta_1} = 1{,}533$, also ist $S_1 S_2$ der im ersten Prisma gebrochene Strahl. Ebenso folgt aus $\triangle K\mathfrak{BC}$, weil $\measuredangle K\mathfrak{BD} = \gamma_1$ (oder α_2) und $\measuredangle K\mathfrak{CB} = \beta_2$, $\frac{\sin \alpha_2}{\sin \beta_2} = \frac{1{,}642}{1{,}533}$, woraus sich ergiebt, daß $S_2 S_3$ die Richtung des aus dem ersten Prisma ins zweite übergehenden Lichtstrahles darstellt. Aus dem $\triangle K\mathfrak{AC}$ folgt nun $\frac{\sin \mathfrak{N}_2\mathfrak{AC}}{\sin K\mathfrak{CA}}$ oder $\frac{\sin \delta_2}{\sin \gamma_2} = 1{,}642$, folglich ist die der $L_1 S_1$ parallele Linie $S_3 L_2$ die Richtung des aus dem Doppelprisma fahrenden mittleren Lichtstrahles.

Berechnung des Winkels u_2. Wir folgen dabei dem Gange der Konstruktion. Mittels des Winkels $\alpha_1 = \mathfrak{N}_1\mathfrak{AB} = 45^0$ findet sich aus $\sin \beta_1 = \frac{\sin 45^0}{1{,}533}$ der Winkel $\beta_1 = K\mathfrak{BA} = 27^0 28'$ und daraus der $\measuredangle \gamma_1$ oder $\alpha_2 = K\mathfrak{BD} = 90^0 - 27^0 28' = 62^0 32'$. Aus dem $\triangle K\mathfrak{BC}$ ergiebt sich $\frac{\sin K\mathfrak{CB}}{\sin K\mathfrak{BD}}$ oder $\frac{\sin \beta_2}{\sin \alpha_2} = \frac{1{,}533}{1{,}642}$, also $\sin \beta_2 = \frac{1{,}533}{1{,}642} . \sin 62^0 32'$, folglich $\beta_2 = K\mathfrak{CB} = 55^0 57'$. Da $u_2 = \beta_2 + \gamma_2$ ist, so muß jetzt noch γ_2 oder $K\mathfrak{CA}$ gesucht werden. Aus dem Vorhergehenden findet sich leicht $\measuredangle \mathfrak{A}K\mathfrak{C} = \mathfrak{A}K\mathfrak{B} - \mathfrak{B}K\mathfrak{C} = (\mathfrak{N}_1\mathfrak{AB} - K\mathfrak{BA}) - (K\mathfrak{BD} - K\mathfrak{CB}) = 17^0 32' - 6^0 35' = 10^0 57'$, sodann aus $\triangle \mathfrak{AC}K$

$$\mathfrak{AC} = \sqrt{1{,}642^2 + 1^2 - 2 . 1{,}642 . \cos 10^0 57'} = 0{,}6826$$

und jetzt ergiebt sich aus $\sin K\mathfrak{CA} = \frac{1}{0{,}6826} \cdot \sin 10^0 57'$ der Winkel $K\mathfrak{CA} = \gamma_2 = 16^0 8'$, folglich $u_2 = 55^0 57' + 16^0 8' = 72^0 5'$.

Auflösungen zu XXX.

1. Nahe Gegenstände erscheinen dem Auge deshalb undeutlich, weil die von einem Punkte des Gegenstandes ins Auge fallenden Strahlen sich nicht auf der Netzhaut, sondern erst hinter derselben vereinigen, auf der Netzhaut also von jedem Punkte des Gegenstandes Zerstreuungskreise entstehen, die nur einen unvollkommenen Lichteindruck machen. Gelangen aber die Lichtstrahlen des Gegenstandes nur durch eine sehr feine Öffnung (z. B. in einem Kartenblatt) ins Auge, so wird jener Zerstreuungskreis sehr klein, so daß von jeder Stelle der Netzhaut ein bestimmter, irgend einem Punkte des Gegenstandes entsprechender Lichteindruck zu unserm Bewußtsein gelangt. Natürlich wird der Gegenstand weniger hell, wohl aber wegen des größeren Sehwinkels größer erscheinen, als in der gewöhnlichen Sehweite.

2. Durch jede der beiden Öffnungen gelangt von jedem Punkte des Gegenstandes ein dünnes Lichtbündel ins Auge. Ist der Gegenstand nahe, so geben die beiden Lichtbündel, welche von irgend einem Punkte desselben ausgehen, zwei Bilder auf der Netzhaut, weil sie eine solche Konvergenz haben, daß sie sich erst hinter der Netzhaut schneiden würden. Befindet sich der Gegenstand in der mittleren Sehweite, so findet die Vereinigung gerade auf der Netzhaut statt. Bei weiterer Entfernung des Gegenstandes schneiden sich die Lichtbündel im Auge vor der Netzhaut und treten dann wieder getrennt auf die Netzhaut.

   Es geht daraus hervor, daß ein Auge beim Sehen durch eine nahe vor ihm befindliche feine Öffnung im normalen Zustande ist.

3. Befindet sich wie gewöhnlich die Sammellinse sehr nahe am Auge, so ist die Entfernung des zu betrachtenden Gegenstandes von der Linse $= 25$ cm und die Entfernung des imaginären Bildes desselben $= D$, man hat also in der allgemeinen Formel $\frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{p}$ (Aufgabe 39 in XXVIII) im gegenwärtigen Falle $a = 25$ cm, $\alpha = -D$ zu setzen, so daß man erhält: $\frac{1}{25} - \frac{1}{D} = \frac{1}{p}$, woraus folgt $p = \frac{25 \cdot D}{D - 25}$.

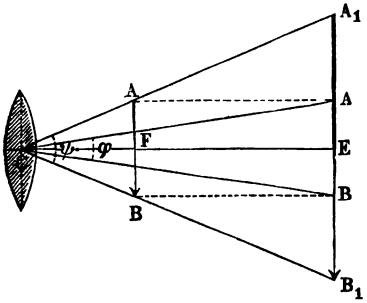
4. Man findet, da auch hier $a = 25$ cm, $\alpha = -D$, aber auch p negativ zu setzen ist, aus $\frac{1}{25} - \frac{1}{D} = -\frac{1}{p}$, $p = \frac{25 \cdot D}{25 - D}$, welche Formel sich aus der vorher gefundenen ergiebt, wenn man in dieser p negativ annimmt.

5. Eine Sammellinse, deren Brennweite $= \frac{25 \cdot 60}{60 - 25} =$ nahe 43 cm ist.

6. Eine Zerstreuungslinse, deren Zerstreuungsweite $= \frac{25 \cdot 12}{25 - 12} =$ nahe 23 cm ist.

7. Bezeichnet φ (Fig. 111) den Sehwinkel, unter welchem ein Gegenstand AB einem in C befindlichen unbewaffneten Auge in der mittleren Sehweite CE erscheint, sowie ψ den Sehwinkel, unter welchem das Bild des Gegenstandes in der deutlichen Sehweite gesehen wird, wenn man denselben durch eine dicht vor das Auge gebrachte Lupe in der Entfernung CF betrachtet, so drückt $\frac{\psi}{\varphi}$ (annähernd) die lineare Vergrößerung durch die Lupe aus. Es ist aber, wenn $CF = a$ und $CE = D$ gesetzt wird, $tg\ ½\psi = \frac{½AB}{a}$, $tg\ ½\varphi = \frac{½AB}{D}$, also $\frac{tg\ ½\psi}{tg\ ½\varphi} = \frac{D}{a}$, demnach näherungsweise $\frac{\psi}{\varphi} = \frac{D}{a}$ (vergl. Aufg. 48 in XXVIII), oder, wenn für a sein Wert aus der Gleichung $\frac{1}{a} - \frac{1}{D} = \frac{1}{p}$, nämlich $a = \frac{Dp}{D+p}$ gesetzt wird, $= \frac{D+p}{p} = \frac{D}{p} + 1$. Häufig wird jedoch nur $\frac{D}{p}$ als lineare Vergrößerung angenommen, was für den Fall genau ist, wenn der betrachtete Gegenstand im Brennpunkte sich befindet, wenn also das Auge für parallel auffallende Strahlen adaptiert ist.

Fig. 111.



8. a) $\frac{25+5}{5} = 6$. b) $\frac{12}{5} + 1 = 3{,}4$. c) $\frac{65}{5} = 13$.

9. Für ein normales Auge, dessen mittlere Sehweite $= 25$ cm ist, ist die Linearvergrößerung $= \frac{25+1{,}4}{1{,}4} =$ nahe 19, die Flächenvergrößerung $= 19^2 = 361$.

10. Mittels der Lupe gelangt, wenn der Öffnungsdurchmesser der Pupille mit δ bezeichnet wird, $\frac{d^2}{\delta^2}$mal soviel Licht ins Auge, wie ohne dieselbe; das Bild auf der Netzhaut aber wird, wenn n die Linearvergrößerung bezeichnet, n^2mal so groß, wie es ohne die Lupe sein würde, also ist $H = \frac{d^2}{\delta^2 n^2}$, oder, wenn

man für n (nach Aufgabe 7) seinen Wert $\frac{D}{p}$ setzt, wo D die mittlere Sehweite des Auges bezeichnet, $H = \frac{d^2 p^2}{\delta^2 D^2}$. Nimmt man (nach Prechtl) $\delta = 0{,}15$ cm, so ist $H = \frac{d^2 p^2}{0{,}0225 \cdot D^2}$, also für ein normales Auge von 25 cm mittlerer Sehweite $H = \frac{d^2 p^2}{14}$, oder im vorliegenden Falle $= \frac{2^2 \cdot (0{,}75)^2}{14}$ $= 0{,}16$ (woraus die Notwendigkeit einer guten und nötigenfalls künstlichen Beleuchtung des Objektes hervorgeht).

11. Da ihr Brechungsvermögen größer, ihr Farbenzerstreuungsvermögen aber kleiner ist, als bei Glaslinsen, so geben sie bei gleichen Krümmungen eine stärkere Vergrößerung und mehr Deutlichkeit der Bilder. Bei gleichen Vergrößerungen sind die Krümmungen der Saphir- und noch mehr die der Diamantlinsen geringer, als die der Glaslinsen, gestatten also eine größere Öffnung, wodurch das Gesichtsfeld und die Helligkeit größer werden.

12. Die durch Linsen bewirkten Vergrößerungen verhalten sich (Aufgabe 7) umgekehrt wie ihre Brennweiten. Nun ist aber, wenn r die gleichen Krümmungshalbmesser bezeichnet, nach Aufl. zu 38 in XXVIII. und Tabelle 21 des Anhanges die Brennweite

für Bikonvexlinsen aus Crownglas $= \frac{r}{2\,(1{,}533 - 1)} = \frac{r}{1{,}066}$,

„ „ „ Saphir $= \frac{r}{2\,(1{,}768 - 1)} = \frac{r}{1{,}536}$,

„ „ „ Diamant $= \frac{r}{2\,(2{,}47 - 1)} = \frac{r}{2{,}94}$,

folglich verhalten sich die Vergrößerungen der fraglichen Linsen zueinander, wie 11 : 15 : 29.

13. Siehe Auflösung 58, Kapitel XXVIII, S. 156.

14. Aus der Endformel der Aufg. 37 und der Aufg. 27 in XXVIII. folgt für den vorliegenden Fall

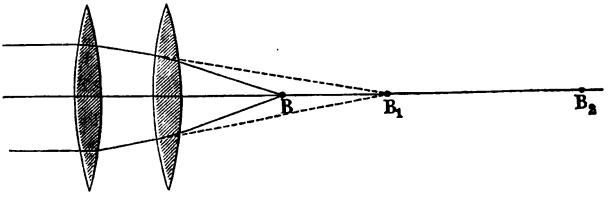
$$\left(\frac{m}{n} - 1\right) \cdot \frac{2}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha} \text{ und daraus } r = \frac{2\,(m - n)\,a\alpha}{n\,(a + \alpha)}$$

$$= \frac{2\,(1{,}533 - 1{,}336) \cdot 25 \cdot 1{,}5}{1{,}336\,(25 + 1{,}5)} = \frac{2 \cdot 0{,}197 \cdot 25 \cdot 1{,}5}{1{,}336 \cdot (25 + 1{,}5)} = 0{,}417 \text{ cm}.$$

15. a) Die auf die erste Linse mit der Brennweite f_1 fallenden, der Achse parallelen Strahlen würden sich in deren Brennpunkt B_1 (Fig. 112 a. f. S.) vereinigen, wenn die zweite Linse, deren Brennpunkt B_2 ist, nicht vorhanden wäre, sie fallen also konvergierend auf die zweite Linse, und die Entfernung ihres wirklichen Vereinigungspunktes B von dieser, d. h. die Brennweite f der Linsenverbindung findet sich aus der allgemeinen Formel $\frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{p}$,

wenn man darin, der Aufgabe 39, 6 im Abschnitt XXVIII entsprechend, $a = -(f_1 - d)$, $a = f$ und $p = f_2$ setzt, also aus der Formel $-\frac{1}{f_1 - d}$

Fig. 112.



$+\frac{1}{f} = \frac{1}{f_2}$ oder $\frac{1}{f_1 - d} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f}$, woraus $f = \frac{(f_1 - d) f_2}{(f_1 - d) + f_2}$

$= \frac{(20 - 5) \cdot 30}{(20 - 5) + 30} = 10$ cm folgt. (Vergleiche Aufgabe 47 in XXVIII.)

Der Punkt B in Fig. 112 kann leicht aus der Lage der Punkte B_1 und B_2 durch Konstruktion nach Aufg. 30, e) in XXVIII. gefunden werden.

b) Ist die zweite Linse eine konkave, die unmittelbar auf der ersten liegt, so ist in der vorhergehenden Formel f_2 negativ und $d = 0$ zu setzen, wodurch man erhält $f = \frac{f_1 f_2}{f_2 - f_1} = \frac{20 \cdot 30}{30 - 20} = 60$ cm.

16. Nach der vorhergehenden Aufgabe ist die Brennweite der Doppellupe $= \frac{12 \cdot 10}{12 + 10} = 5{,}45$ cm, folglich die lineare Vergrößerung für ein normales Auge (nach Aufgabe 7) $= \frac{25}{5{,}45} = 4{,}68$.

17. Bei einem solchen zusammengesetzten Mikroskop ist sowohl die sphärische als die chromatische Aberration geringer als bei einem ebenso stark vergrößernden einfachen, nicht bloß, weil die Krümmungshalbmesser der beiden Linsen des ersteren größer sind als die der letzteren, sondern auch, weil bei jenem die von der einen Linse herrührenden Aberrationen zum Teil von der andern aufgehoben werden. Eine solche Linsenverbindung gestattet also bei gleicher Deutlichkeit der Bilder eine größere Öffnung, gewährt also mehr Helligkeit und ein größeres Gesichtsfeld.

18. Die Entfernung α des Sammelbildes $A_1 Z_1$ vom Objektiv findet sich (Aufg. 39 in XXVIII) $= \frac{a_1 p_1}{a_1 - p_1} = \frac{5{,}5 \cdot 5{,}4}{5{,}5 - 5{,}4} = 297$ mm, das Sammelbild ist also $\frac{\alpha}{a_1} = \frac{297}{5{,}5} = 54$ mal so groß wie der Gegenstand vor dem Objektiv (XXVIII, 47). Damit nun dieses Sammelbild durch das Okular deutlich gesehen werde, müssen die davon ausgehenden Strahlen im Okular so gebrochen werden, als kämen sie von Punkten, die um $D = 250$ mm vom Okular entfernt sind, die Entfernung a_2 des Okulars vom Sammelbilde $A_1 Z_1$ ist also

$$= \frac{D p_2}{D + p_2} = \frac{250 \,.\, 21{,}6}{250 + 21{,}6} = 19{,}9 \text{ mm},$$

folglich das geometrische Bild $A_2 Z_2$ des Okulars $\frac{D}{a_2} = \frac{250}{19{,}9} = 12{,}6$ mal so groß wie das Sammelbild $A_1 Z_1$ des Objektivs, und demnach die Vergrößerung überhaupt $= \frac{\alpha}{a_1} \cdot \frac{D}{a_2}$, oder, wenn man $\frac{D p_2}{D + p_2}$ für a_2 setzt,

$$= \frac{\alpha}{a_1} \cdot \frac{D + p_2}{p_2} = 54 \,.\, 12{,}6 = 680{,}4.$$

Gewöhnlich wird p_2 statt a_2 gesetzt, also angenommen, das Sammelbild falle gerade in die Brennweite des Okulars und das Auge sei für parallele Strahlen adaptiert. Dann ist die Vergrößerung des Mikroskopes

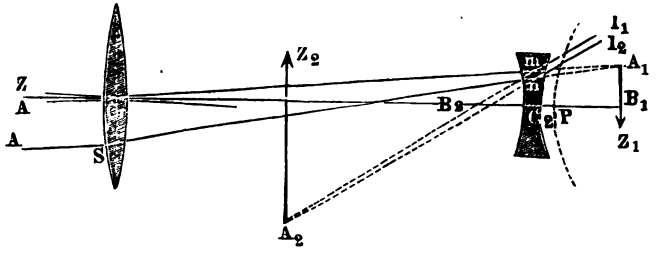
$$= \frac{\alpha}{a_1} \cdot \frac{D}{p_2} = \frac{297}{5{,}5} \cdot \frac{250}{21{,}6} = 624.$$

Die Länge des Mikroskopes ist $= \alpha + a_2$, oder unter der zuletzt erwähnten Annahme $= \alpha + p_2 = 318{,}6$ mm.

19. Man bringt das Mikrometer an die Stelle des Objekts vor dem Objektiv, so daß die geteilte Linie im Gesichtsfelde die Lage des Durchmessers einnimmt; alsdann giebt die Teilung die Größe dieses Durchmessers des Gesichtsfeldes unmittelbar an. Dividiert man den Durchmesser des Diaphragmas durch den Durchmesser des Gesichtsfeldes, so erhält man die Vergrößerung des Objektivs, welche Zahl noch mit der nach 7. zu findenden Vergrößerung des Okulars zu multiplizieren ist.

20. Es sei (Fig. 113) $C_1 S$ die Konvexlinse, $C_2 m$ die Konkavlinse, $A_1 Z_1$ das Sammelbild, welches die vor der Konvexlinse befindliche (in der Figur aber

Fig. 113.



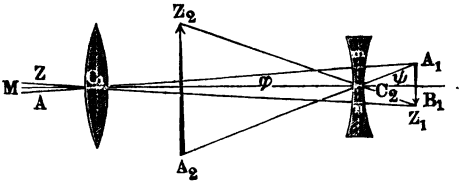
weggelassene) Linie $A Z$ hinter der Linse geben würde, wenn die Konkavlinse nicht vorhanden wäre. Um den Gang der vom Punkte A herkommenden Strahlen $A C_1$ und $A S$ nach ihrer Brechung in den beiden Linsengläsern zu finden, verfahre man nach den Aufgaben 30 und 35 in XXVIII. Die beiden aus dem Konkavglas fahrenden Strahlen $m l_1$ und $n l_2$ verlängere man rückwärts bis zu ihrem Durchschnittspunkte A_2, so ist dieser das geometrische Bild des Punktes A. Auf gleiche Weise bestimmt sich auch das Bild Z_2 des Punktes Z.

21. 1) Da das konkave Okular (Fig. 114) innerhalb der Brennweite $C_1 B_1$ des konvexen Objektivs so liegen muß, daß es vom Brennpunkte desselben um seine Zerstreuungsweite entfernt ist, so ist die Länge des Fernrohrs $= C_1 B_1 - C_2 B_1 = p_1 - p_2 = 13 - 2{,}6 = 10{,}4$ cm.

2) Die Vergrößerung findet man aus der Vergleichung der beiden Sehwinkel, unter welchen ein Gegenstand dem Auge ohne und durch das Fernrohr erscheint.

Ohne Fernrohr erscheint ein weit entfernter Gegenstand dem hinter dem Okular befindlichen Auge unter nahe demselben Winkel, wie einem im Punkte C_1 des Objektivs befindlichen. Es sei dieser Winkel $A C_1 Z = A_1 C_1 Z_1 = 2\varphi$. Mittels des Fernrohrs erscheint er unter dem Winkel $A_2 C_2 Z_2 = A_1 C_2 Z_1 = 2\psi$. Die Vergrößerung ist also $\frac{\psi}{\varphi}$.

Fig. 114.



Da nun

$$tg\ \psi = \frac{A_1 B_1}{C_2 B_1} = \frac{A_1 B_1}{p_2},$$

$$tg\ \varphi = \frac{A_1 B_1}{C_1 B_1} = \frac{A_1 B_1}{p_1}$$

und da, wegen der Kleinheit der Winkel ψ und φ,

$$\frac{tg\ \psi}{tg\ \varphi} = \frac{\psi}{\varphi} \text{ ist,}$$

so ergiebt sich die Vergrößerung $\frac{\psi}{\varphi} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{13}{2{,}6} = 5.$

3) Sind Am und Zn die äußersten Strahlen, welche bei unverrückter Lage des Auges hinter dem Okular in dasselbe gelangen, so ist der Winkel $A C_1 M = m C_1 C_2 = \varphi$ der halbe Sehwinkel. Damit das Auge durch das Fernrohr ein möglichst großes Gesichtsfeld übersehe, muß es sich dicht hinter dem Okular befinden; dann ist bei unverrückter Lage des Auges der ausreichende Öffnungsdurchmesser des Okulars gleich dem Öffnungsdurchmesser δ der Pupille, der hier, nach Prechtl, zu 0,26 cm angenommen werden kann. Man hat demnach aus dem Dreieck $C_1 C_2 m$ . . . . $tg\ \varphi = \frac{C_2 m}{C_2 C_1} = \frac{0{,}5\ .\ \delta}{p_1 - p_2} = \frac{0{,}5\ .\ 0{,}26}{13 - 2{,}6} = 0{,}0125$, also $\varphi =$ nahe 43 Minuten, folglich das ganze Gesichtsfeld bei unverrückter Lage des Auges = nahe 86 Minuten.

Wenn, wie gewöhnlich, der Öffnungsdurchmesser des Okulars größer ist, als der der Pupille, so kann man durch Hin- und Herbewegen des Auges ein größeres Gesichtsfeld übersehen.

22. Durch ähnliche Erwägungen, wie bei voriger Aufgabe, findet sich:

1) Die Länge des Fernrohres $= p_1 + p_2 = 39 + 1{,}3 = 40{,}3$ cm.

2) Seine Vergrößerung $= \frac{p_1}{p_2} = \frac{39}{1{,}3} = 30$.

3) Bezeichnet φ den halben Sehwinkel und d den Öffnungsdurchmesser des Okulars, so ist $tg\ \varphi = \frac{0{,}5\ .\ d}{p_1 + p_2}$, oder, da der Öffnungsdurchmesser d des Okulars gleich der Hälfte seiner Brennweite genommen werden kann, $tg\ \varphi = \frac{0{,}5\ .\ 0{,}5\, p_2}{p_1 + p_2} = 0{,}00806$, also der halbe Sehwinkel $\varphi = 27{,}7$ Minuten und der ganze Sehwinkel $2\varphi = 54{,}4$ Minuten.

23. Weil bei starker Vergrößerung sein Gesichtsfeld ein sehr kleines und bei gleicher Vergrößerung ein viel kleineres ist, als bei einem Fernrohr mit konvexem Okular. So würde man z. B., wenn man im Fernrohr der vorigen Aufgabe statt des konvexen Okulars ein konkaves von derselben Brennweite nehmen (natürlich aber an die gehörige Stelle innerhalb der Brennweite des Objektives setzen) wollte, ein Fernrohr erhalten, dessen Vergrößerung zwar dieselbe wie in voriger Aufgabe, nämlich $\frac{p_1}{p_2} = 30$, dessen Gesichtsfeld aber nur 23,9 Minuten betrüge, wie sich aus $tg\ \varphi = \frac{0{,}5\ .\ 0{,}26}{39 - 1{,}3} = 11{,}95$ Minuten ergiebt.

24. Die Vergrößerung ist (Fig. 115 a. f. S.) nahe $= \frac{\measuredangle\ A_3 C_4 B_3}{\measuredangle\ A_1 C_1 B_1} = \frac{\psi}{\varphi}$ (siehe Aufgabe 21).

Nun ist $$tg\ \psi = \frac{A_3 B_3}{B_3 C_4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (I)$$

Aus den ähnlichen Dreiecken $A_3 B_3 C_3$ und $A_2 B_2 C_3$ folgt aber

$$A_3 B_3 = \frac{A_2 B_2}{B_2 C_3} \cdot B_3 C_3,$$

worin wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke $A_2 B_2 C_2$ und $A_1 B_1 C_2$

$$A_2 B_2 = \frac{A_1 B_1}{B_1 C_2} \cdot B_2 C_2 \text{ ist.}$$

Durch Substitution dieser Ausdrücke in die Gleichung (I) ergiebt sich

$$tg\ \psi = \frac{A_1 B_1\ .\ B_2 C_2\ .\ B_3 C_3}{B_1 C_2\ .\ B_2 C_3\ .\ B_3 C_4}.$$

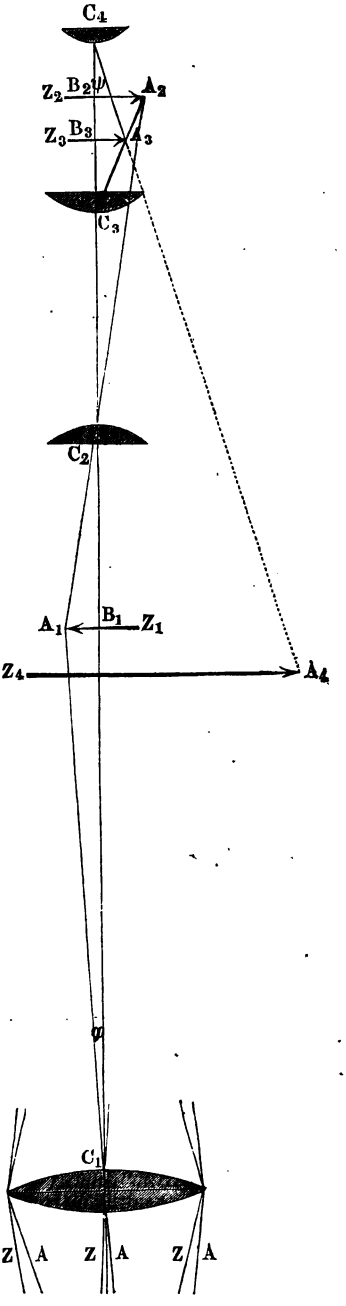
Ferner ist $$tg\ \varphi = \frac{A_1 B_1}{B_1 C_1},$$

folglich $\frac{tg\ \psi}{tg\ \varphi}$, oder wegen der Kleinheit der Winkel

$$\frac{\psi}{\varphi} = \frac{B_1 C_1\ .\ B_2 C_2\ .\ B_3 C_3}{C_1 C_2\ .\ B_2 C_3\ .\ B_3 C_4}.$$

Nun ist $B_1 C_1 = p_1 = 52$; also $B_1 C_2 = d_1 - B_1 C_1 = 58 - 52 = 6$,

Fig. 115.



$$B_2 C_2 = \frac{B_1 C_2 \cdot p_2}{B_1 C_2 - p_2} = \frac{6 \cdot 4}{6 - 4} = 12,$$

also $B_2 C_3 = B_2 C_2 - d_2 = 12 - 9 = 3,$

$$B_3 C_3 = \frac{B_2 C_3 \cdot p_3}{B_2 C_3 + p_3} = \frac{3 \cdot 4}{3 + 4} = 1{,}71.$$

Der Aufgabe gemäß ist $B_3 C_4 = p_4 = 2{,}7$. Folglich ist die Vergrößerung des Fernrohrs

$$\frac{\psi}{\varphi} = \frac{52 \cdot 12 \cdot 1{,}71}{6 \cdot 3 \cdot 2} = \text{nahe } 22$$

und die Distanz der beiden Linsen des Okulars, nämlich $C_3 C_4 = d_3 = B_3 C_3 - p_4 = 4{,}41$ cm.

25. Richtet man das Fernrohr nach einem in gleiche Teile geteilten Maßstabe (oder einem andern gleich geteilten Gegenstande, z. B. einem Ziegeldache), sieht dann mit dem einen Auge durch das Fernrohr, mit dem andern Auge neben dem Fernrohr vorbei, und beobachtet, daß n mit dem freien Auge gesehene Maßstabteile dieselbe Größe haben wie m Maßstabteile des im Fernrohr gesehenen Bildes, so ist die Vergrößerung $= \frac{n}{m}$. (Das Verfahren setzt indessen gleiche Sehweite der beiden Augen voraus.)

26. Die Entfernung des Bildes von der Lupe, welches durch den zweiten Hohlspiegel erzeugt wird, findet sich aus der Gleichung:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{25} = \frac{1}{10}, \text{ also } x = 7{,}14.$$

Dieses Bild ist von dem Brennpunkte des großen Spiegels um $60 - 2{,}14 = 57{,}86$ cm entfernt. Das von dem ersten Spiegel erzeugte und in dessen Brennpunkte erscheinende Bild

hat eine Entfernung y von dem zweiten Spiegel, welche aus der Gleichung

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{57{,}86 + y} = \frac{1}{3}$$

gefunden wird: $y = 3{,}15$ cm.

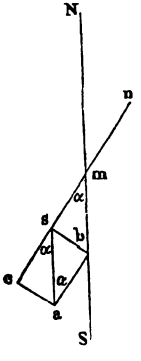
Die Brennpunkte der zwei Spiegel sind um 0,15 cm voneinander entfernt und die Mitten der zwei Spiegel selbst um 63,15 cm.

27. Da die auf den Hohlspiegel fallenden Strahlen, wenn der Planspiegel nicht vorhanden wäre, in der Brennweite, also in einer Entfernung von 90 cm sich vereinigen würden, durch den Planspiegel aber die Richtung der Strahlen nur so verändert wird, daß die Strahlenachse senkrecht auf die Achse des Hohlspiegels zu stehen kommt, so muß der Planspiegel 90 — 15 = 75 cm vom Hohlspiegel entfernt sein.

Auflösungen zu XXXI.

1. Ist NS (Fig. 116) die Richtung des magnetischen Meridians, ns die Magnetnadel, und stellt sa die Kraft f dar, so giebt die auf die Nadel rechtwinkelige Komponente sb die gesuchte Kraft, und diese ist also $= f \sin \alpha = f \sin 30^0 = {}^1/_2 f$.

Fig. 116.



2. Den Pendelgesetzen gemäß hat man

$$f_1 : f_2 = 80^2 : 90^2 = 64 : 81.$$

3. $\left(\frac{110}{5}\right)^2 : \left(\frac{112}{4}\right)^2 = 484 : 784.$

4. $\frac{484}{\cos 70} : \frac{784}{\cos 30} = 0{,}48 : x$, woraus $x = 0{,}307$.

(Das gleichförmige magnetische Feld des Erdmagnetismus auf St. Helena wirkt auf einen Pol von der Magnetismusmenge 1, wie ein Magnetpol mit der Magnetismusmenge 0,307 in der Entfernung von 1 cm.)

5. $f : \varphi = 500^2 : 450^2 = 2500 : 2025.$

6. Aus $f : (\varphi + f) = 40^2 : 50^2$ folgt $\frac{\varphi}{f} = {}^9/_{16} = 0{,}56$.

7. Bezeichnet f die Intensität der magnetischen Einwirkung der Erde auf die Nadel, f_1 die des Poles des Magnetstabes in der Entfernung von 7 cm und f_2 diejenige in der Entfernung von 14 cm, so hat man:

$$1)\ f : (f + f_1) = 20^2 : 55^2, \text{ also } f_1 = 6{,}56\, f.$$

$$2)\ f : (f + f_2) = 20^2 : 32{,}5^2, \text{ also } f_2 = 1{,}64\, f,$$

woraus folgt:

$$f_1 : f_2 = 6{,}56 : 1{,}64 = 4 : 1.$$

Während also die Entfernung des Poles wächst, nimmt die Kraft, mit welcher er auf die Magnetnadel wirkt, mit dem Quadrat der Entfernung ab.

8. Die Torsion des Fadens beträgt im ersten Falle der Aufgabe $150^0 - 15^0$, im zweiten $336^0 - 12^0$; die Torsion, durch welche der Magnet um 1^0 aus dem magnetischen Meridian abgelenkt wurde, ist also im ersten Falle $= \frac{150^0 - 15^0}{15} = 9^0$, im zweiten Falle $= \frac{330^0 - 12^0}{12} = 27^0$, der Magnet ist also dreimal so stark geworden.

(Es ist hierbei vorausgesetzt: 1. daß sich die Torsionskräfte verhalten wie die Torsionswinkel, was den desfalls angestellten Versuchen entspricht, sowie 2. daß die Kraft, welche eine abgelenkte Magnetnadel in den magnetischen Meridian zurückzuführen strebt, dem Ablenkungswinkel proportional ist, was nur für kleine Winkel, bei denen die Sinus mit den Bogen vertauscht werden können, genau ist.)

9. I. Die Ebene der Fig. 117 sei die Ebene des magnetischen Meridians, SN ihr Durchschnitt mit dem Horizont, sn eine in ihr liegende Inklinationsnadel, VV eine Vertikale durch deren Mitte. Stellt na die Richtung und relative Größe der totalen magnetischen Erdkraft J dar, welche auf den Pol n wirkt, so ist $nb = J \cos i$ die horizontale, $nc = J \sin i$ die vertikale Komponente derselben*).

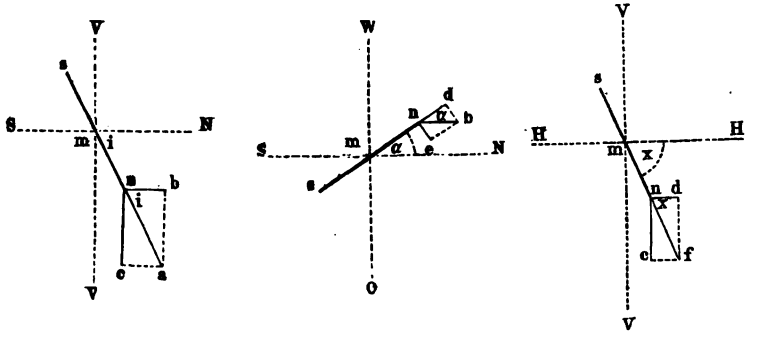
II. Wird dieselbe Nadel als Deklinationsnadel aufgehängt, so wird durch die Art der Aufhängung die Wirkung der vertikalen Komponente aufgehoben, und die horizontale sucht die Nadel im magnetischen Meridian zu erhalten. Bei einer Ablenkung der Deklinationsnadel ns aus dem magnetischen Meridian um den horizontalen Winkel α, wie in Fig. 118, deren Ebene die Horizontalebene darstellt, in welcher die Nadel liegt, kann man sich die auf den Pol n wirkende magnetische Horizontalkraft $nb = J \cos i$ aus zwei Komponenten zusammengesetzt denken, wovon die eine $nd = nb \cos \alpha = J \cos i \cos \alpha$ mit der Richtung der Kraft nb den Winkel α einschließt, während die andere $ne = nb \sin \alpha = J \cos i \sin \alpha$ auf der ersten senkrecht steht und die Nadel in den magnetischen Meridian zurückzudrehen strebt.

---

*) Für die Bestimmung der Richtung der Nadel genügt es, bloß die Einwirkung der magnetischen Erdkraft auf einen Pol ins Auge zu fassen, da die Einwirkung auf die übrigen Punkte der Nadel eine Drehung in demselben Sinne zur Folge hat.

III. Hängt man endlich die Magnetnadel sn wieder als Inklinationsnadel auf und dreht ihre (vertikale) Schwingungsebene um den Winkel α aus dem magnetischen Meridian, so ist (Fig. 119) die Richtung der Nadel gegen den Durchschnitt HH ihrer vertikalen Schwingungsebene mit der Horizontalebene um einen Winkel x geneigt, der sich auf folgende Weise bestimmt: Die totale magnetische Kraft J, welche auf den Pol n wirkt, läßt sich dem vorhergehenden gemäß aus drei Komponenten zusammengesetzt denken, wovon die erste $nc = J \sin i$ (siehe I.) in vertikaler, die zweite $nd = J \cos i \cos \alpha$ (siehe II.) in horizontaler Richtung wirkt, die dritte $ne = J \cos i \cos \alpha$ (siehe II.) aber auf den beiden ersten senkrecht steht (und daher in Fig. 119 nicht darstellbar ist). Die letzte dieser drei Komponenten wird durch die Art der Aufhängung der Inklinationsnadel aufgehoben, die beiden ersten aber setzen

Fig. 117 Fig. 118. Fig. 119.



sich zu einer Resultierenden nf zusammen, deren Neigung x gegen die Horizontalebene sich ergiebt aus $tg\ x = \frac{nc}{nd} = \frac{J \sin i}{J \cos i \cos \alpha}$ oder $cotg\ x = cotg\ i \cos \alpha$.

10. Aus der in voriger Aufgabe gefundenen Gleichung $cotg\ x = cotg\ i \cos \alpha$ folgt, da im vorliegenden Falle $\alpha = 90^0$ ist, $cotg\ x = 0$, also $x = 90^0$, d. h. die Inklinationsnadel steht vertikal.

11. Man giebt der Schwingungsebene der Inklinationsnadel eine solche Lage, daß die Nadel vertikal steht, alsdann steht der magnetische Meridian auf ihrer Schwingungsebene senkrecht.

12. Befindet sich die Inklinationsnadel im magnetischen Meridian, so wirkt auf sie die ganze magnetische Erdkraft; steht dagegen ihre Schwingungsebene senkrecht auf dem magnetischen Meridian, so ist nur die vertikale Komponente jener Kraft auf die Richtung der Nadel von Einfluß (Aufgabe 10). Diese vertikale Komponente ist aber $= nc$ (Fig. 117), wenn na die ganze magnetische Erdkraft darstellt. Da sich nun die auf eine Magnetnadel wirkenden Kräfte wie die Quadrate der Schwingungen verhalten, welche die Nadel in gleicher Zeit macht, so hat man $\frac{nc}{na} = \frac{30^2}{32^2}$, oder, da $\frac{nc}{na} = \sin i$ ist, $\sin i = 0{,}879$, woraus $i = 16^1/_2{}^0$ folgt.

13. $\frac{3 \cdot 4}{5^2} = 0{,}48$ Dyn.

14. $\frac{9 \cdot 16}{36} = 4$ Dyn.

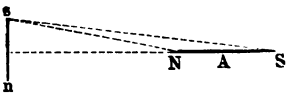
15. $\frac{40 \cdot x}{25} = 32$; woraus $x = 20$ Einheiten.

16. Das magnetische Moment der einen Hälfte des Stabes ist $= \mu\lambda$, das der andern Hälfte $= (-\mu)(-\lambda) = \mu\lambda$, also $M = 2\mu\lambda = \mu l$, wenn l die ganze Länge des Stabes. Die Diemension des magnetischen Momentes ist also: $C^{3/2} G^{1/2} S^{-1} \cdot C = C^{5/2} G^{1/2} S^{-1}$.

Zwei gleiche Magnetismusmengen m wirken in der Entfernung r mit der Kraft $K = \frac{m^2}{r^2}$ aufeinander; daraus folgt $m = r \cdot \sqrt{K}$. Nun ist die Dimension von K: $C G S^{-2}$, folglich ist die Dimension der Einheit der Magnetismusmenge (r = cm): $C \cdot C^{1/2} G^{1/2} S^{-1} = C^{3/2} G^{1/2} S^{-1}$.

17. Bezeichnet v die Magnetismusmenge des Nordpoles N des Magnetstabes (Fig. 120), so ist die davon abhängige, am Hebelarm $= 1$ der Nadel ns angreifende Drehkraft (zufolge der Aufgaben 13 und 16) $= \frac{vm}{(e - \frac{1}{2} l^2)}$ und die vom Südpol S abhängige $= \frac{-vm}{(e + \frac{1}{2} l)^2}$, also ist die von beiden Polen abhängige, am Hebel $= 1$ der Nadel angreifende Drehkraft $F = \frac{vm}{(e - \frac{1}{2} l)^2} + \frac{-vm}{(e - \frac{1}{2} l)^2} = \frac{vm[(e + \frac{1}{2} l)^2 - (e + \frac{1}{2} l)^2]}{(e - \frac{1}{2} l)^2 (e + \frac{1}{2} l)^2} = \frac{2vmel}{(e^2 - \frac{1}{4} l^2)^2}$, mithin, wenn e so groß ist, daß man im Nenner $\frac{1}{4} l^2$ gegen e^2 vernachlässigen darf, $F = \frac{2vml}{e^3}$, oder, wenn man der vorigen Aufgabe gemäß $2vl = M$, d. h. dem magnetischen Moment des Stabes gleich setzt, $F = \frac{Mm}{e^3}$, d. h. die Kraft, welche, am Hebelarm 1 der Nadel angreifend, denselben Einfluß auf ihre Drehung ausübt, wie die in den verschiedenen Punkten der Nadel angreifenden Kräfte, ist $F = \frac{Mm}{e^3}$ mal so groß wie die Einheit der magnetischen Kraft, die in Aufgabe 13 angenommen wurde.

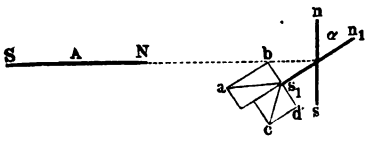
Fig. 120.



18. Ist m das magnetische Moment der Nadel ns (Fig. 121 a), so ist die Drehkraft, welche der Magnetstab NS vermöge seines magnetischen Moments M in der Entfernung e darauf äußert, bei senkrechter Richtung der Nadel auf der des Stabes (nach voriger Aufgabe) $= \frac{Mm}{e^3}$, also, wenn die Nadel um den Winkel α von der vorigen Lage abgelenkt und in die

Lage $n_1 s_1$ gelangt ist, $= \frac{Mm}{e^3} \cos \alpha$. (Denn ist $s_1 a$ die ganze Drehkraft, so ist, wenn die Nadel die Lage $n_1 s_1$ hat, nur die auf der Richtung der Nadel senkrechte Komponente $s_1 b = s_1 a \cos \alpha$ wirksam, die andere Komponente in der Richtung der Nadel aber ohne Einfluß auf die Drehung.)

Fig. 121 a.

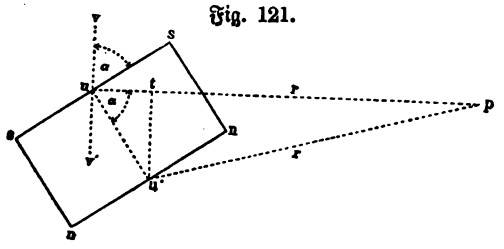


Bezeichnet nun T eine Kraft, welche am Hebelarm $= 1$ einer Nadel vom magnetischen Moment $= 1$ gerade so auf die Nadel wirkt, wie die horizontale Komponente des Erdmagnetismus, so ist die Kraft, mittels welcher eine auf der Richtung des magnetischen Meridians senkrecht stehende Deklinationsnadel vom magnetischen Moment m durch den Erdmagnetismus gedreht wird, $= Tm$, also, wenn eine solche Nadel, wie in vorliegender Aufgabe, mit dem magnetischen Meridian den Winkel α bildet, $= Tm \sin \alpha$. (Denn ist $s_1 c = Tm$ die Kraft, mit welcher die auf dem magnetischen Meridian senkrecht stehende Nadel durch den Erdmagnetismus gedreht wird, so ist $s_1 d = s_1 c \sin \alpha$ die für die Drehung allein wirksame Komponente derselben, wenn die Nadel die Lage $n_1 s_1$ hat.)

Damit die Nadel bei gleichzeitiger Einwirkung des Magnetstabes und des Erdmagnetismus ihre Lage $n_1 s_1$ beibehalte, muß $s_1 b = s_1 d$, d. h. $\frac{Mm}{e^3} \cos \alpha = Tm \sin \alpha$ sein, woraus $\frac{M}{T} = e^3 \operatorname{tg} \alpha$, also im vorliegenden Falle $\frac{M}{T} = 530^3 \operatorname{tg} 11^0 20' = 8\,593\,220$ folgt, d. h. die vom Magnetstabe ausgeübte Drehkraft ist 8 593 220 mal so groß, wie die von der horizontalen Komponente des Erdmagnetismus bewirkte.

19. Die Intensität H eines magnetischen Feldes an einer bestimmten Stelle wird durch die Kraft gemessen, welche es daselbst auf einen Magnetpol von der Stärke 1 ausübt. Sei f die Kraft, mit welcher das Feld an der betreffenden Stelle auf einen Magnetpol von der Stärke m wirkt, so ist: $f = m.H$, oder $\mathrm{C\,G\,S^{-2}} = \mathrm{C^{2/3}\,G^{1/3}\,S^{-1}}.H$, woraus $H = \mathrm{C^{-1/3}\,G^{1/3}\,S^{-1}}$.

Fig. 121.



20. Es sei sn (Fig. 121) ein sehr kurzer, aber breiter Magnetstab, dessen magnetische Massen $(+m)$ und $(-m)$ auf den Polflächen nn und ss verbreitet gedacht werden; der Durchmesser der Polflächen sei erheblich größer als die Länge L. Die magnetische Scheibe kann aus lauter nebeneinander liegenden, auf den Polflächen senkrecht

stehenden Magnetstäbchen (Elementarmagneten) zusammengesetzt angesehen werden.

Ist m die magnetische Masse auf einer Polfläche, so ist die auf der Flächeneinheit befindliche $\frac{m}{s}$, wo s die Größe der Polfläche in qcm bedeutet. Die auf einem kleinen Flächenstückchen df befindliche Magnetismusmenge ist alsdann:

$$\frac{m}{s}\,df.$$

Das Potential dU des Elementarmagnetes uu' (mit den Endflächen df) in Bezug auf p ist:

$$dU = \frac{m}{s}\,df\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right) = \frac{m}{s}\,df\,\frac{r - r_1}{r r_1}.$$

Nun läßt sich (wegen der Kleinheit von L) $r r_1$ durch r^2 und $r - r_1$ durch die Projektion L auf pu ersetzen. Man erhält alsdann:

$$dU = \frac{m}{s}\,df\,\frac{L\cos\alpha}{r^2}.$$

Es ist aber auch $df.\cos\alpha$ die Projektion des kleinen Flächenstückchens df bei u auf die Linie vv_1, die auf pu senkrecht steht.

Zieht man um p als Mittelpunkt eine Kugelfläche mit dem Radius 1, so schneiden die von p nach dem (kreisförmigen) Umfange von df gehenden Linien eine Kugelkappe $d\Omega$ aus dieser Kugelfläche aus, welche gleich

$$\frac{df\,.\,\cos\alpha}{r^2} \text{ ist.}$$

Daraus folgt:

$$dU = \frac{m}{s}\,L\cdot d\Omega$$

und

$$U = \frac{mL}{s}\cdot\Omega,$$

wo Ω die Kugelkappe bedeutet, welche aus der um p mit dem Radius 1 beschriebenen Kugelfläche von den Linien ausgeschnitten wird, welche von p nach den Umfangspunkten einer der Polflächen gezogen werden können, d. h. es ist Ω der körperliche Winkel, unter dem eine Polfläche von p aus erscheint.

Auflösungen zu XXXII.

1. Da die Kräfte, welche den Faden zu drehen streben, den Windungen desselben proportional sind, so verhalten sich die Abstoßungskräfte wie $25 : (146 + 10)$, d. h. nahezu wie $5^2 : 12{,}5^2$, während sich die Entfernungen nahezu wie $25 : 10$,

d. h. wie 12,5 : 5 verhalten, also die Abstoßungskräfte umgekehrt, wie die Quadrate der Entfernungen.

2. a) Aus $\frac{6 \cdot x}{2^2} = 12$ folgt $x = 8$. b) $y = \frac{9 \cdot 4}{3^2} = 4$ Dyn.

c) $C^{3/2} G^{1/2} S^{-1}$ (siehe XXXI, 16).

3. Da die Schlagweite einer Batterie der Dichtigkeit der angehäuften Elektrizität proportional ist, so hat man $\frac{100}{4} : \frac{160}{8} = 1 : x$, also $x = 0{,}8$ cm.

4. Bezeichnet y die gesuchte, gebundene Elektrizitätsmenge auf der ersten Belegung, so muß $y = me$ sein, und wenn man für e seinen Wert mE setzt, $y = m^2 E = 0{,}99^2 E = 0{,}9801 E$, d. h. nahe $^{49}/_{50} E$ ist gebunden und $^1/_{50} E$ ist frei.

Aus $E - \varepsilon = m^2 E$ folgt die Kondensationskraft $\frac{E}{\varepsilon} = \frac{1}{1 - m^2}$ und im vorliegenden Falle $= 50$, d. h. die Menge der gesamten Elektrizität ist 50 mal so groß wie die der freien.

5. Bezeichnet man die Gesamtladung der oberen Belegung im Anfange des Versuches mit E, und die auf der unteren Belegung gebundene Menge der entgegengesetzten Elektrizität mit e, so ist die auf der oberen Platte im Anfange des Versuches gebundene Menge $= E - \varepsilon_1$, dagegen die auf der unteren Platte gebundene Menge, nach Ableitung der Elektrizität der oberen Platte, $= e - \varepsilon_2$, und man hat dann nach voriger Auflösung die drei Gleichungen:

$$e = mE; \quad m - \varepsilon_1 = m^2 E; \quad e - \varepsilon_2 = m^2 e,$$

woraus nach Elimination von E und e folgt: $m = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$.

6. Wäre die Spannung (abstoßende Kraft) an einer Stelle des Konduktors größer als an einer andern, so würden die Elektrizitätsteilchen sich an der ersten voneinander entfernen und nach der zweiten hindrängen, bis überall gleiche Spannung herrschte.

Die Spannung hängt nicht bloß von der Dichte der Elektrizität, sondern auch von der Gestalt der Oberfläche ab; ist diese an einer Stelle stärker gekrümmt, so bilden die Verbindungslinien der Elektrizitätsteilchen spitzere Winkel miteinander, die abstoßenden Kräfte werden also bei gleicher Entfernung andere Resultierenden haben, wie an Stellen flacher Krümmung. — Je größer das Potential an einer Stelle des Konduktors wäre, um so mehr Arbeit kostete es, eine elektrische Einheit aus dem Unendlichen bis an diese Stelle zu bringen; dies setzt aber eine größere abstoßende Kraft — Spannung — an dieser Stelle voraus, welche sich nicht bloß gegen eine außerhalb des Konduktors befindliche Elektrizitätsmenge richtet, sondern auch gegen die Elektrizitätsteilchen auf dem Konduktor selbst — die Elektrizität fließt von Orten höheren zu solchen niederen Potentials hin, bis überall gleiches Potential herrscht. — Die Spannung mißt man mittels eines Elektrometers; verbindet man dieses durch einen langen, dünnen Draht mit den verschiedenen Stellen eines geladenen Konduktors, so erhält man stets denselben Ausschlag.

7. Die Menge der auf einer Kugel befindlichen Elektrizität wirkt so, als ob sie im Mittelpunkte vereinigt wäre. Ist nun auf der Oberfläche einer Kugel von 1 cm Halbmesser die Einheit der Elektrizität verbreitet, so kann man diese in den Mittelpunkt verlegen, das Potential $m : r$ ist alsdann $1 : 1 = 1$.

8. Die Kapazitäten von Kugeln sind ihren Halbmessern proportional. Eine Kugel von 100 cm Radius braucht 100 Einheiten, um auf die Kapazität 1 zu kommen; denn das Potential ist $= m : r$; soll dies den Wert 1 haben, so muß $m = r$ sein. — Die Erde hat einen Halbmesser von 6,3 Millionen Meter oder von 630 Millionen Zentimeter, also ist ihre Kapazität 630 Millionen (in elektrostatischen Einheiten).

9. Die elektrische Dichte ist $\varrho = \frac{Q}{F}$, wo Q die Elektrizitätsmenge (in elektrostatischen Einheiten) und F die Größe der Oberfläche in Quadratzentimetern. — Für die elektrische Dichte auf einer Kugel vom Halbmesser 1 gilt, wenn die Zahl der elektrischen Einheiten Q ist, $\varrho = Q : 4\pi r^2$. Eine Kugel vom Halbmesser 1 hat also die Dichte $Q : 4\pi$.

10. Werden zwei Kugeln durch einen dünnen Draht miteinander verbunden, so verteilen sich die Ladungen so, daß gleiches Potential entsteht, d. h. sie verteilen sich im Verhältnis der Kapazitäten und daher im Verhältnis der Halbmesser. Ist der Halbmesser der einen Kugel zweimal so groß wie der der andern, so hat sie nach der Verbindung auf ihrer Oberfläche die doppelte Menge Elektrizität, wie die andere. Die Dichten dagegen verhalten sich umgekehrt wie die Radien, denn bei gleicher Dichte müßte die erste viermal soviel Elektrizität haben. Allgemein: Sind D_1 und D_2 die Dichten, R_1 und R_2 die Halbmesser, Q_1 und Q_2 die Elektrizitätsmengen, so gilt zunächst $D_1 : D_2 = \frac{Q_1}{4\pi R_1^2} : \frac{Q_2}{4\pi R_2^2}$. Da aber jedenfalls beide Kugeln auf gleiches Potential kommen, so muß auch $Q_1 : Q_2 = R_1 : R_2$; also $D_1 : D_2 = \frac{R_1}{4\pi R_1^2} : \frac{R_2}{4\pi R_2^2}$ oder $D_1 : D_2 = R_2 : R_1$.

11. Die elektrischen Dichten an den verschiedenen Stellen eines Konduktors verhalten sich umgekehrt, wie die zugehörigen Krümmungshalbmesser. Je stärker die Krümmung an einer Stelle, um so kleiner der Krümmungshalbmesser und um so größer die Dichte. — Eine Scheibe hat überall gleiche Dichte, weil überall der Krümmungshalbmesser derselbe ($= \infty$) ist. Die Dichten mißt man mittels eines Probescheibchens. Legt man dieses an eine Stelle des Konduktors, so bildet es hier die Oberfläche und nimmt alle hier befindliche Elektrizität auf. Wird das Probescheibchen nach der Reihe auf verschiedene Stellen eines geladenen Konduktors gelegt und jedesmal mit dem Elektrometer verbunden, so erhält man verschiedene Ausschläge.

12. Die Anziehung beträgt: $24 . 8 : 4^2 = 12$ Dyn.

13. Nach der Berührung sind noch 16 positive Elektrizitätseinheiten vorhanden; jede der zwei kleinen Kugeln (Punkte) nimmt 8 Einheiten an; also beträgt die Größe der Abstoßung $8 . 8 : 4^2 = 4$ Dyn.

14. $\dfrac{660}{4 \cdot \pi \cdot 6^2} = 1{,}46$ (ungefähr).

15. Es sei x die Dichte der auf der Kupferplatte zurückbleibenden freien negativen Elektrizität, so ist, die Oberfläche der Platte als Flächeneinheit angenommen, $d - x$ die von ihr abgegebene Menge. Damit nun die Spannungsdifferenz der beiden Metalle bestehen bleibe, muß die Zinkplatte dieselbe Menge negativer Elektrizität abgeben, also um ebensoviel an positiver zunehmen. Es wird also eine Menge $= 2\,(d - x)$ negative Elektrizität an den Leiter abgegeben, und diese verteilt sich auf der Oberfläche desselben; man hat daher $2\,(d - x) = n\,x$, folglich $x = \dfrac{2\,d}{n+2}$, sowie, wenn y die Dichte der freien positiven Elektrizität auf der Zinkplatte bezeichnet, $y = d + \left(d - \dfrac{2\,d}{n+2}\right) = \dfrac{2\,(n+1)\,d}{n+2}$. Für $n = \infty$ wird $x = 0$ und $y = 2\,d$. (Auf einer Scheibe ist die Dichte an allen Stellen annähernd dieselbe; Spannung und Dichte sind hier proportional!)

16. Die Dichtigkeit der Elektrizität auf der Kupfermasse mit x, die auf der Zinkmasse mit y bezeichnet, erhält man aus den Formeln der vorigen Aufgabe, da hier $d = 1$, $n = 2$ ist, $x = {}^1/_2$, $y = {}^3/_2$.

17. $x = \dfrac{1{,}06 \cdot 96}{1{,}6} = 63{,}6$ m. (Über Ohm vergl. Kr. S. 106.)

18. Da sich die Widerstände gerade wie die Längen und umgekehrt wie die Querschnitte verhalten, so gilt, wenn w_1 und w_2 die beiden Widerstände bedeuten:

$$w_1 : w_2 = \frac{x}{0{,}25^2 \cdot \pi} : \frac{40}{0{,}5^2\,\pi} = \frac{x}{0{,}25^2} : \frac{40}{0{,}5^2}.$$

Da die Widerstände gleich sein sollen, so ist:

$$x = \frac{40 \cdot 0{,}25^2}{0{,}5^2} = 10\text{ m}.$$

19. $\dfrac{22{,}65 \cdot 18{,}12}{3{,}02} = 135{,}9$ qm.

20. $\dfrac{13{,}6 \cdot 6}{63{,}6 \cdot {}^1/_4\,\pi\,(2{,}5)^2} = 2{,}6$ Ohm.

Der spezifische Leitungswiderstand des Eisens in bezug auf Kupfer ist $96 : 16 = 6$.

21. $\dfrac{12 \cdot 12{,}8 + 18 \cdot 6}{63{,}6 \cdot 2{,}5} = 1{,}65$ Ohm (der Leitungswiderstand des Neusilbers in bezug auf Kupfer ist $96 : 7{,}5 = 12{,}8$).

22. Sind w_1 und w_2 die Widerstände zweier Drähte, so sind ihre Leitungsfähigkeiten $\dfrac{1}{w_1}$ und $\dfrac{1}{w_2}$; ihre Gesamtleitungsfähigkeit, wenn sie parallel geschaltet werden, ist also $\dfrac{1}{w_1} + \dfrac{1}{w_2}$ und ihr Gesamtwiderstand

$$\frac{1}{\frac{1}{w_1}+\frac{1}{w_2}} = \frac{w_1 \cdot w_2}{w_1 + w_2}.$$

Drei parallel geschaltete Drähte haben den Gesamtwiderstand

$$\frac{w_1 \cdot w_2 \cdot w_3}{w_1 w_2 + w_1 w_3 + w_2 w_3}.$$

23. $\frac{1{,}42 \cdot 2{,}37}{1{,}42 + 2{,}37} = 0{,}89$ Ohm.

24. Da die Gesamtbewickelung des Ringes in zwei Hälften zerfällt, welche parallel geschaltet sind, so ist der Widerstand der Ringbewickelung $^1/_4$ Ohm, denn die Länge ist halb so groß, wie die der ganzen Drahtlänge und die Dicke doppelt so groß, wie die des Drahtes (wegen der Parallelschaltung).

25. Der Widerstand des ersten Drahtes beträgt:

$$\frac{2{,}5}{63{,}6 \cdot 1{,}5} = 0{,}026 \text{ Ohm}$$

und der des zweiten:

$$\frac{1{,}5}{63{,}6 \cdot 1{,}8} = 0{,}013 \quad \text{„}$$

Der Gesamtwiderstand ist $\frac{0{,}026 \cdot 0{,}013}{0{,}026 + 0{,}013} = 0{,}0087$ Ohm.

Die Stromstärke im ersten Zweige ist:

$$\frac{1 \cdot 0{,}013}{0{,}039} = 0{,}333 \ldots \text{ Ampère}$$

und im zweiten:

$$\frac{1 \cdot 0{,}026}{0{,}039} = 0{,}666 \ldots \quad \text{„}$$

26. Der Widerstand des ersten Drahtes ist:

$$\frac{15}{63{,}6 \cdot {}^1/_4 \pi \, (2{,}5)^2} = 0{,}048 \text{ Ohm};$$

der des zweiten:

$$\frac{12 \cdot 6}{63{,}6 \cdot {}^1/_4 \pi \cdot 2^2} = 0{,}361 \quad \text{„}$$

und der des dritten:

$$\frac{9 \cdot 12{,}8}{63{,}6 \cdot {}^1/_4 \pi \cdot (1{,}6)^2} = 0{,}900 \quad \text{„}$$

Der Gesamtwiderstand bei Hintereinanderschaltung ist also $= 1{,}309$ Ohm.

Die Länge eines Neusilberdrahtes von 1,75 mm Dicke, welcher 1,309 Ohm Widerstand besitzt, ist also

$$= \frac{1{,}309 \cdot {}^1/_4 \pi \, (1{,}75)^2 \cdot 63{,}6}{12{,}8} = 15{,}63 \text{ m}.$$

27. Der Strom, welcher durch den ersten Zweig fließt, hat

$$\frac{4 \,.\, 0{,}9}{1{,}309} = 2{,}750 \text{ Ampère};$$

derjenige, welcher durch den zweiten fließt, hat

$$\frac{4 \,.\, 0{,}361}{1{,}309} = 1{,}103 \text{ Ampère}$$

und derjenige, welcher durch den dritten Zweig fließt, hat

$$\frac{4 \,.\, 0{,}048}{1{,}309} = 0{,}147 \text{ Ampère.}$$

Der Gesamtwiderstand ist:

$$\frac{0{,}048 \,.\, 0{,}361 \,.\, 0{,}900}{0{,}048 \,.\, 0{,}361 + 0{,}048 \,.\, 0{,}9 + 0{,}361 \,.\, 0{,}9} = 0{,}04 \text{ Ohm.}$$

28. Der Widerstand des eingeschalteten Drahtes beträgt

$$\frac{225}{63{,}6 \,.\, 0{,}75} = 4{,}72 \text{ Ohm.}$$

Der Strom hat ursprünglich $\frac{3}{1{,}5} = 2$ Ampère, und nach Einschaltung des Drahtes $\frac{3}{1{,}5 + 4{,}72} = 0{,}48$ Ampère.

29. Der Widerstand im ganzen Kreise beträgt ursprünglich $\frac{4}{7} = 0{,}571$ Ohm; der Widerstand des Kupferdrahtes allein ist $\frac{16}{63{,}6 \,.\, 1{,}25} = 0{,}201$ Ohm.

Der Widerstand des Neusilberdrahtes beträgt $\frac{12 \,.\, 12{,}8}{63{,}6 \,.\, 3{,}5} = 0{,}690$ Ohm.

Der Gesamtwiderstand des Kupfer- und Neusilberdrahtes beträgt

$$\frac{0{,}201 \,.\, 0{,}690}{0{,}201 + 0{,}690} = 0{,}156 \text{ Ohm.}$$

Der Widerstand im ursprünglichen Stromkreise, abzüglich desjenigen des Kupferdrahtes, ist $0{,}571 - 0{,}201 = 0{,}370$ Ohm und mit Zufügung des Gesamtwiderstandes von Kupfer- und Neusilberdraht $0{,}370 + 0{,}156 = 0{,}526$ Ohm. Also beträgt die Stromstärke $\frac{4}{0{,}526} = 7{,}605$ Ampère. Der Strom ist gewachsen um 0,605 Ampère.

Der im Kupferdraht laufende Zweigstrom hat

$$\frac{7{,}605 \,.\, 0{,}690}{0{,}201 + 0{,}690} = 5{,}889 \text{ Ampère}$$

und der im Neusilberdraht laufende

$$\frac{7{,}605 \,.\, 0{,}201}{0{,}891} = 1{,}716 \text{ „}$$

30. $\frac{20}{0{,}39} = 51$ bis 52 Glühlampen.

31. $\frac{20}{1{,}12} = 17$ bis 18 Glühlampen.

32. $\frac{1000}{50} = 20$ Bogenlampen.

33. a) $\frac{7420}{10 \cdot 2^2 \pi} = 59{,}1$ S.-E.

(Der Widerstand des Queckſilbers iſt $16 : 1{,}6 = 10$ mal ſo groß wie der des Eiſens.)

b) $\frac{7420 \cdot 6}{4} = 11\,130$ J.-E.

34. Iſt l die Länge des Drahtes in Metern und d ſeine Dicke in Millimetern, ſo hat man die beiden Gleichungen

$$\frac{l}{60 \cdot {}^1/_4 \pi d^2} = 100 \text{ und } \frac{1}{4}\left(\frac{d}{10}\right)^2 \cdot \pi\, 100\, l \cdot 8{,}8 = 1000;$$ woraus

$$l = 825{,}7 \text{ m und } d = 0{,}1753 \text{ mm}.$$

35. $8 : 6 = 1{,}6 : x$; woraus $x = 1{,}2$ Volt.

36. $\frac{352}{10} = 35{,}2$ Ohm.

37. a) Das Kohlenlicht braucht $10 \cdot 120 = 1200$ Volt-Ampère, oder $1200 : 736 = 1{,}63$ Pferdekräfte. b) $\frac{100}{82} \cdot 1{,}63 = 2$ (ungefähr).

38. Es ſei bei einer beſtimmten Kombination der gegebenen Elemente die elektromotoriſche Kraft der Kette $= E$, der Widerſtand in der Kette W und in der Leitung ebenfalls W. Dann iſt $J = \frac{E}{W + W} = \frac{E}{2W}$. Macht man die Kette $n$mal ſo kurz, d. h. ſchaltet man je n Elemente parallel, ſo wird der Widerſtand n^2mal ſo klein, denn die Länge der Flüſſigkeit in der Kette wird $n$mal ſo klein und ihr Querſchnitt $n$mal ſo groß, alſo iſt jetzt $E_1 = \frac{E : n}{\frac{W}{n^2} + W} = \frac{E}{\left(n + \frac{1}{n}\right) W}$. Nun wird aber eine Summe, wie $\left(n + \frac{1}{n}\right)$ ein Minimum, wenn das Produkt der Poſten $n \cdot \frac{1}{n}$ eine konſtante Zahl (hier 1) ergiebt. (Kr. Gr. S. 373 und Leitf. S. 321.) Der Nutzeffekt beträgt 50 Proz., denn nur die eine Hälfte des Stromes geht durch die Leitung, die andere aber durch die Kette.

39. Die elektromotoriſche Kraft iſt 4 mal, der innere Widerſtand $4 : 6 = {}^2/_3$ mal ſo groß, wie der eines einzelnen Elementes.

40. Der innere Widerſtand wird dem äußeren gleich, wenn je 12 Elemente hintereinander und dieſe zwei Batterieen parallel geſchaltet werden, denn es iſt alsdann der innere Widerſtand $\frac{2 \cdot 12}{2} = 12$ Ohm.

41. $\frac{12 \cdot 1{,}2}{12 \cdot 2 + 12} = \frac{14{,}4}{36} = 0{,}4$ Ampère.

$\frac{6 \cdot 1{,}2}{6 \cdot 2 : 2 + 12} = \frac{7{,}2}{16} = 0{,}4$ „

$\frac{4 \cdot 1{,}2}{4 \cdot 2 : 3 + 12} = \frac{4{,}8}{14{,}67} = 0{,}33$ „ (ungefähr).

$\frac{3 \cdot 1{,}2}{3 \cdot 2 : 4 + 12} = \frac{3{,}6}{13{,}5} = 0{,}27$ „ „

$\frac{2 \cdot 1{,}2}{2 \cdot 2 : 6 + 12} = \frac{2{,}4}{12{,}67} = 0{,}19$ „ „

$\frac{1{,}2}{2 : 12 + 12} = \frac{1{,}2}{12{,}167} = 0{,}09$ „ „

Beträgt also der äußere Widerstand 12 Ohm, so thut man am besten, die 12 Elemente entweder hintereinander, oder je sechs hintereinander und die beiden Gruppen parallel zu schalten. Es ist hier nicht zu erreichen, daß der innere Widerstand gleich dem äußeren wird.

42. Der Widerstand des Eisendrahtes beträgt

$$\frac{12 \cdot 6}{63{,}6 \cdot \frac{1}{4}\pi\,(0{,}75)^2} = 2{,}56 \text{ Ohm}.$$

Der innere Widerstand kommt dem äußeren am nächsten, wenn man die Elemente zu je 4 hintereinander schaltet; er wird alsdann = 1,67. Die Stromstärke ist dabei 1,135 Ampère.

43. a) Der innere Widerstand ist gleich dem äußeren:

$$J = \frac{3 \cdot 1{,}9}{2 \cdot \frac{3}{4} \cdot 0{,}24} = 15{,}833 \ldots$$

b) Der innere Widerstand ist gleich $\frac{3}{10}$ von dem Gesamtwiderstande:

$$J_1 = \frac{3 \cdot 1{,}9}{\frac{3}{4} \cdot 0{,}24 + \frac{7}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot 0{,}24} = 9{,}5.$$

c) $J = 1\frac{2}{3} J_1$.

d) Die Elektrizitätsmengen, welche im ersten Falle durch den inneren und äußeren Kreis laufen, sind einander gleich (7,9166 . .).

e) Die Elektrizitätsmengen, welche im zweiten Falle durch den inneren und äußeren Kreis laufen, verhalten sich wie 3 : 7, oder wie $9{,}5 \cdot \frac{3}{10} : 9{,}5 \cdot \frac{7}{10} = 2{,}85 : 6{,}65$.

f) Die im inneren Kreise laufenden Elektrizitätsmengen verhalten sich in den zwei Fällen, wie

$$7{,}9166 : 2{,}85 = 2{,}77$$

und im äußeren, wie

$$7{,}9166 : 6{,}65 = 1{,}19.$$

Die verbrauchten Zinkmengen verhalten sich, wie

$$15{,}833 : 9{,}5 = 1{,}66.$$

Es wird also im ersten Falle $1^2/_3$ mal soviel Zink verbraucht und nur eine $1^2/_{10}$ so große Elektrizitätsmenge in den äußeren Kreis geschickt, wie im zweiten, der demnach praktisch vorteilhafter ist. Auch ist die Erwärmung im inneren Kreise im ersten Falle 2,77 mal so groß wie im zweiten.

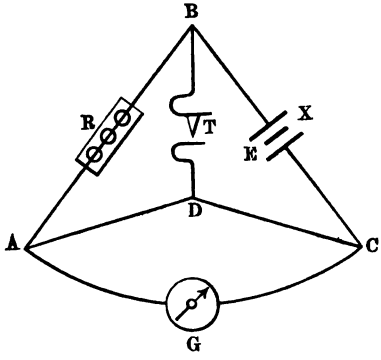
Man macht deshalb bei Batterieen und Dynamos den äußeren Widerstand stets etwas größer als den inneren, kann aber nie ganz soviel Strom in den äußeren Kreis bekommen, als wenn der innere Widerstand gleich dem äußeren ist. Giebt nämlich x an, wievielmal der äußere Widerstand größer sein müßte, als der innere, wenn die Elektrizitätsmenge im äußeren Kreise diejenige für gleichen inneren und äußeren Widerstand erreichen sollte, so müßte $\frac{Ex}{w\,(1+x)^2} = \frac{E}{2\,(2\,w)}$, also $x = 1$ sein.

44. Ist der äußere Widerstand so groß, daß der innere dagegen vernachlässigt werden kann, so hängt die Stromstärke lediglich von dem äußeren Widerstande ab und ist diesem proportional. Schaltet man nun etwa sechs Leitungen nach sechs weit entfernten Orten von einer Batterie parallel ab, so wird der äußere Widerstand sechsmal so klein, also die Stromstärke sechsmal so groß, weshalb jede Leitung soviel Strom erhält, als ob bloß eine da wäre. Selbstverständlich wird dabei sechsmal soviel Zink in derselben Zeit aufgelöst.

45. Mittels eines Volt- und eines Ampèremeters bestimmt man die elektromotorische Kraft und die Stromstärke des Elementes und dividiert mit der Zahl der Ampère in die der Volt. — Oder man bestimmt den inneren Widerstand mittels der Telephonbrücke (oder auch wohl mittels des Elektrodynamometers).

46. Man bedient sich der Methode von Mance: In den einen Zweig BC (Fig. 122) einer Art Wheatstoneschen Brücke wird das Element E, dessen Widerstand x sei, eingefügt. Mit den Punkten B und D wird ein Taster T zum Öffnen und Schließen der Leitung BTD verbunden. In AD und DC sind Normalwiderstände und in R ist ein Rheostat eingefügt, der so lange verändert wird, bis der Ausschlag der Galvanometernadel unverändert bleibt, einerlei ob man den Taster niederdrückt oder losläßt. In diesem Falle fließt durch den Zweig BTD kein Strom und die Spannung in B ist gleich der in D. Es ist alsdann, wenn die Widerstände von AD, DC und R bezüglich r_1, r_2 und w sind:

Fig. 122.



$$r_1 : r_2 = w : x, \quad \text{oder} \quad x = \frac{r_2\,w}{r_1}.$$

47. Ist die Horizontalintensität H des Erdmagnetismus für einen Ort bekannt, so gilt für die Stromstärke in absolutem Maße ($G^{1/2}\,C^{1/2}\,S^{-1}$):

$$J = \frac{rH}{2\pi}\,tg\,\varphi,$$

wenn der Strom den Ausschlag φ an der Tangentenbussole bewirkt. Nun ist 1 Ampère $= {}^1/_{10}\,J = 10^{-1}\,G^{1/2}\,C^{1/2}\,S^{-1}$, folglich, wenn A die Zahl der Ampère bedeutet:

$$A = 10\,\frac{rH}{2\pi}\,tg\,\varphi = 1{,}592\,rH\,.\,tg\,\varphi.$$

Unter dem Reduktionsfaktor einer Tangentenbussole versteht man nun das Produkt $1{,}592\,rH$, d. i. der Wert von A, wenn $\varphi = 45^0$. Man pflegt nun den Halbmesser des Ringes an der Tangentenbussole so zu nehmen, daß $1{,}592\,.\,r\,.\,H = 10$. Für einen Ort, an welchem $H = 0{,}2$, wird alsdann $r = 31{,}41$ cm.

48. $10\,.\,tg\,23 = 4{,}2447$ Ampère.

49. Ein Strom von 1 Ampère liefert in der Minute $0{,}1740\,.\,60 = 10{,}44$ ccm Knallgas. Ein Strom also, welcher in der Minute 55,8 ccm Knallgas erzeugt, hat $\frac{55{,}8}{10{,}44} = 5{,}34$ Ampère.

50. $\frac{55{,}8\,.\,75}{10{,}44\,.\,76\,(1\,+\,0{,}003665\,.\,15)} = 5$ Ampère (beinahe).

51. Die Äquivalentzahl des Silbers ist 107,7. Die Menge des ausgeschiedenen Knallgases in Milligrammen beträgt in der Minute (Nr. 49) $0{,}0933\,.\,60$, also des Wasserstoffs ${}^1/_9\,.\,0{,}0933\,.\,60 = 0{,}0622$. Danach erhält man in der Minute $0{,}0622\,.\,107{,}7 = 66{,}9894$ (genauer 67,1) mg Silber.

Die Äquivalentzahl des Kupfers ist ${}^1/_2\,.\,63{,}2 = 31{,}6$, also beträgt die in der Minute durch ein Ampère abgeschiedene Kupfermenge $31{,}6\,.\,0{,}0622 = 19{,}6552$ (genauer 19,69) mg Kupfer.

52. $A = 10\,.\,tg\,35 = 7$ Ampère (ungefähr). Also werden $7\,.\,20,67{,}1 = 9394$ mg $= 9{,}394$ g Silber abgeschieden.

53. $A = 10\,\frac{rH}{2\pi}\,tg\,\varphi$. Nun ist $A = \frac{460{,}7}{67{,}1\,.\,45}$, aber auch $= 1{,}592\,.\,19{,}98\,.\,\frac{15{,}04}{608}\,.\,H$, also beide Werte gleich gesetzt, giebt:

$$H = \frac{460{,}7\,.\,608}{1{,}592\,.\,19{,}98\,.\,15{,}04\,.\,67{,}1\,.\,45} = 0{,}1941\ (G^{1/2}\,C^{-1/2}\,S^{-1}).$$

54. Bezeichnet man die Stärke des ersten Stromes mit s_1, die des zweiten mit s_2, so verhält sich $s_1 : s_2 = tg\,30^0 : tg\,45^0$,

sowie $s_1 : s_2 = 49{,}7 : v$

also auch $tg\,30^0 : tg\,45^0 = 49{,}7 : v$;

folglich, da $tg\,45^0 = 1$ ist, $v = \frac{49{,}7}{tg\,30^0} = 86{,}08$ ccm.

55. Auf dieselbe Weise, wie in vorhergehender Auflösung, berechnen sich die Gasmengen, welche durch einen Strom entwickelt werden, der die Nadel um 45° ablenkt, aus 1) = 85,2; aus 2) = 85,3; aus 3) = 85,7; aus 4) = 86,1; aus 5) = 85,2; also im Mittel aus den fünf Beobachtungen = 85,5 ccm bei 755 mm Luftdruck und 12° C. Temperatur; folglich ist $v_1 = 85{,}5 \cdot \frac{755}{760} \cdot \frac{1}{1 + 0{,}003665 \,.\, 12} = 80{,}8$ ccm. Der Strom hat $80{,}8 : 10{,}44 = 7{,}7$ Ampère.

56. Die in voriger Aufgabe gefundene Zahl $v_1 = 81{,}2$ giebt in Einheiten der vorliegenden Aufgabe die Stärke eines Stromes an, der die Nadel der Tangentenbussole, für welche jene Zahl gefunden wurde, um 45° ablenkt. Nun ist $s : 81{,}2 = tg\ 21^0 : tg\ 45^0$, also $s = 81{,}2 \,.\, tg\ 21^0 = 31{,}2$. Der Strom hat 2,99 Ampère.

57. In einer Minute werden $\frac{144}{24 \,.\, 60} = 0{,}1$ g = 100 mg Silber niedergeschlagen, folglich hat der Strom $\frac{100}{67{,}1} = 1{,}5$ Ampère (ungefähr).

58. Ist das elektrochemische Äquivalent des Silbers = 0,0011180 mg, des Kupfers = 0,0003261 mg und das des Knallgases = 0,1740 ccm, so gilt:

$$\frac{2{,}268 \,.\, 0{,}0003261}{0{,}001118} = 0{,}6614\ \text{g Kupfer und}$$

$$\frac{2{,}268 \,.\, 0{,}1740}{0{,}001118} = 352{,}8\ \text{ccm Knallgas.}$$

59. $\frac{50 \,.\, 1{,}8}{50 \,.\, x + 15} = 3$; $x = 0{,}33\ldots$ Ohm.

Die fünfzig Elemente haben 16,5 Ohm inneren Widerstand.

60. $tg\ 9^0 : tg\ 5^0 = \frac{E}{435} : \frac{E}{435 + x}$ folgt

$$x = \frac{435\ (tg\ 9 - tg\ 5)}{tg\ 9} = 787{,}5\ \text{Ohm.}$$

61. $\frac{x}{0{,}24 + 5} = 0{,}36$, also $x = 1{,}9$ Volt (ungefähr).

(Die elektromotorische Kraft kann auch direkt durch geaichte Spannungsmesser, Elektrometer u. s. w. bestimmt werden.)

62. Die Nadel zeigt auf Null, wenn die Spannung in A gleich der in C ist, d. h. wenn der Spannungsabfall von C über N bis A gleich dem von A über B bis C, oder wenn $V_1 : V_2 = W_1 : W_2$, falls V_1 und V_2 die elektromotorischen Kräfte der beiden Elemente und W_1 und W_2 die Widerstände der Kreise sind, in denen die Elemente liegen (CNA und ABC). Fügt man zu W_1 noch 2 Ohm und zu W_2 noch 3,6 Ohm, so gilt, wenn wieder die Nadel auf Null zeigt: $V_1 : V_2 = W_1 + 2 : W_2 + 3{,}6$ oder $V_1 : V_2 = 2 : 3{,}6$. Hieraus ergiebt sich $V_2 = \frac{3{,}6}{2} V_1 = 1{,}8\, V_1$, und da $V_1 = 1{,}04$ Volt, so ist $V_2 = 1{,}872$ Volt.

63. $J = \frac{rH}{2\pi n} \cdot tg\ \varphi$, wenn n die Zahl der Windungen auf dem Ringe der Bussole bedeutet. Nun ist: $E = J \,.\, W$; ferner sind 16,9 Ohm $= 16{,}9 \,.\, 10^9$ Einheiten des absoluten (*G.-C.-S.*) Systems. Ferner ist zu beachten, daß man fünf hintereinander geschaltete Elemente hat, daher:

$$E = \frac{11 \,.\, 0{,}18}{2 \,.\, 3{,}14 \,.\, 10 \,.\, 5} \cdot 16{,}9 \,.\, 10^9 = \frac{1{,}98}{314} \cdot 169 \,.\, 10^8 = 1{,}065 \,.\, 10^8$$

absolute Einheiten oder 1,065 Volt. (In betreff der Maße vergl. Kr. Gr. S. 371 und Leitf. S. 320.)

64. $tg\ 65 : tg\ 32 = x + 2{,}04 : x + 0{,}04$ $(tg\ 65 - tg\ 32) \,.\, x = 2{,}04 \,.\, tg\ 32 - 0{,}04\ tg\ 65$, woraus

$$x = \frac{2{,}04 \,.\, tg\ 32 - 0{,}04 \,.\, tg\ 65}{tg\ 65 - tg\ 32} = 0{,}7824 \text{ Ohm.}$$

65. Bedeutet x den inneren Widerstand des Elementes samt dem der Bussole, so ist $\frac{E}{x} = 10 \,.\, tg\ 33$ und $\frac{E}{x + 0{,}85} = 10 \,.\, tg\ 9$, denn der Widerstand des Neusilberdrahtes beträgt $\frac{4 \,.\, 12{,}8}{63{,}6 \,.\, {}^1/_4 \pi\ (1{,}1)^2} = 0{,}85$ Ohm. Hieraus folgt:

$$x = \frac{0{,}85 \,.\, tg\ 9^0}{tg\ 33^0 - tg\ 9^0} = 0{,}27417 \text{ Ohm.}$$

Da der Widerstand der Bussole 0,04 ist, so ist der innere des Elementes 0,23417 Ohm. Nun ist aber

$$E = 10 \,.\, tg\ 33 \,.\, 0{,}23417 = 1{,}52 \text{ Volt.}$$

66. Mit Beachtung, daß 1 Ampère gleich ${}^1/_{10}$ der absoluten Stromeinheit, erhält man: $\frac{0{,}036 \,.\, 48 \,.\, 2\pi \,.\, 10}{100} = 1{,}085.$

67. $10 \cdot \frac{10}{2\pi \,.\, 48} \cdot 0{,}23 \,.\, tg\ 35^0 = 0{,}0534$ Ampère.

68. $J = \frac{30 \,.\, 0{,}195}{2\pi \,.\, 50} \sin 65^0 = 0{,}016885$

$$J_1 = \frac{30 \,.\, 0{,}195}{2\pi \,.\, 50} \sin\ 9^0 = 0{,}002914$$

in absoluten Einheiten, oder $J = 0{,}16885$ Ampère und $J_1 = 0{,}02914$ Ampère. Das Verhältnis beider ist 5,8 : 1.

69. Ein Voltampère erzeugt in der Sekunde 0,24 Grammkalorien (Kr. Gr. S. 375).

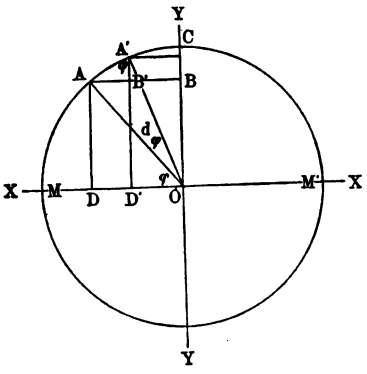
Der Spannungsabfall auf einer Strecke von 5 Ohm Widerstand bei 0,24 Ampère findet sich aus der Gleichung $0{,}24 = \frac{x}{5} = 1{,}2$ Volt; also hat man $1{,}2 \,.\, 0{,}24 = 0{,}288$ Voltampère in der Sekunde. Diese erzeugen in 20 Minuten $0{,}288 \,.\, 0{,}24 \,.\, 1200 = 82{,}944$ Grammkalorien.

70. Die Batterie hat $6 \cdot 1{,}8 = 10{,}8$ Volt; da der äußere Widerstand gleich dem inneren sein soll, so ist jeder $= 6 \cdot 0{,}75 = 4{,}5$ Ohm, der Gesamtwiderstand also 9 Ohm. Hieraus findet sich die Stromstärke $= 10{,}8 : 9 = 1{,}2$ Ampère. Die Wärmemenge in 10 Minuten beträgt also $10{,}8 \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}24 \cdot 600 = 1866{,}24$ Grammkalorien. Da der innere Widerstand gleich dem äußeren ist, so erhält jeder die Hälfte der Wärmemenge, also 933,12 Grammkalorien.

71. Die Zahl der Volt ist $3 \cdot 1{,}8 = 5{,}4$; der innere Widerstand ist $= 3 \cdot 0{,}75 : 2 = 1{,}125$ Ohm. Der Gesamtwiderstand also 5,625 Ohm und die Stromstärke $5{,}4 : 5{,}625 = 0{,}96$ Ampère. Die Zahl der Grammkalorien in 10 Minuten beträgt also $5{,}4 \cdot 0{,}96 \cdot 0{,}24 \cdot 600 = 746{,}496$ Grammkalorien (rund 746,5). Davon entfallen auf die Batterie $746{,}5 \cdot 1{,}125 : 5{,}625 = 149{,}3$ und auf den äußeren Kreis $746{,}5 \cdot 4{,}5 : 5{,}625 = 597{,}2$ Grammkalorien.

72. Wenn OA (Fig. 123) den Maximalwert einer Wechselstrom-EMK vorstellt, so findet man leicht den zu irgend einer Zeit geltenden Momentanwert auf folgende Weise: Wir nehmen an, die EMK habe den Wert Null zur Zeit $t = o$ und vollende eine volle Periode (von Null über das positive Maximum, durch Null, über das negative Maximum und zurück nach Null) in der Zeit T, welche also eine volle Umdrehung 2π darstellt; dann ist der Drehungswinkel, welcher der Zeit t_1 entspricht, gleich $\frac{2\pi t_1}{T}$. Wird dieser Winkel mit φ bezeichnet, so ist, wenn E den Maximalwert der EMK und e ihren Momentanwert zur Zeit t_1 bezeichnet:

Fig. 123.



$$e = E \cdot \sin \frac{2\pi t_1}{T} = E \cdot \sin \varphi.$$

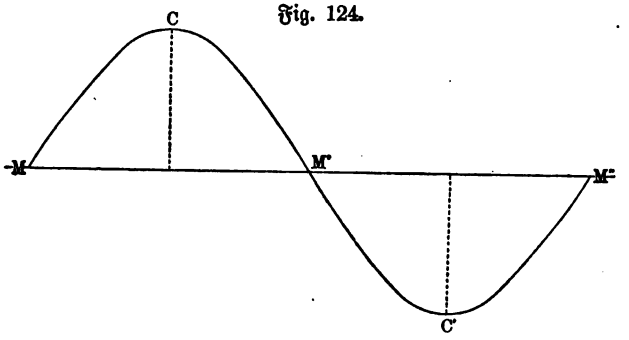
Ebenso gilt, wenn J den Maximal- und i den Momentanwert zur Zeit t_1 bezeichnet:

$$i = J \cdot \sin \frac{2\pi t_1}{T} = J \cdot \sin \varphi.$$

Zur Zeit $T = o$ ist $\varphi = o$ und zur Zeit $\frac{T}{4}$ ist $\varphi = 90^0$. Bedeutet nun OA (Fig. 124) den Maximalwert einer EMK oder einer Stromstärke, so kann man die Momentanwerte leicht finden, wenn man OA sich gleichförmig um seinen Endpunkt O in der Zeit T sich einmal umdrehen läßt. Nimmt man YY als die Projektionsachse, so ist zur Zeit t_1, wo $\varphi = \frac{2\pi t_1}{T}$ der Momentanwert von OA gleich OB. Fällt OA in die XX-Achse,

welche senkrecht auf YY steht, so ist der Momentanwert, d. i. die Projektion von OA auf YY, gleich Null, während der Maximalwert $OC = OA$ eintritt, wenn $\alpha = 90^0$ ist.

Fig. 124.



Bezeichnet man $\frac{2\pi}{T}$, d. i. die Winkelgeschwindigkeit der Drehung oder den Winkel, welcher einer Sekunde entspricht, mit ω, so ist zur Zeit t:

$$e = E\sin(\omega t) \quad \text{und} \quad i = I\sin(\omega t).$$

Fig. 124 zeigt die Sinuskurve.

73. Der Mittelwert e_m einer Wechselstrom-EMK ist die Summe der Einzelwerte der EMK während einer halben Periode oder das Doppelte von der Summe der Einzelwerte während einer Viertelperiode, dividiert durch die Anzahl der Einzelwerte. Wir zerlegen einen rechten Winkel in eine große Zahl gleicher Teile, von denen wir jeden mit $d\varphi$ bezeichnen, dann ist die Anzahl der Teile $= \frac{1/2\,\pi}{d\varphi}$. Nun ist für den Winkel φ

$$e = E\sin\varphi;$$

also ist der Mittelwert:

$$e_m = \frac{1}{1/2\,\pi} E \sum_{0}^{1/2\,\pi} \sin\varphi \; d\varphi.$$

Es ist aber $\sin\varphi = AB' : AA'$ und $d\varphi = AA' : r$, wo r der Radius des Kreises; folglich ist $\sin\varphi \; d\varphi = AB' : r = DD' : r$, und

$$e_m = \frac{2}{\pi} E \sum_{0}^{1/2\,\pi} (DD' : r) = \frac{2}{\pi} E \frac{OM}{r} = \frac{2}{\pi} E = 0{,}637\; E.$$

Für den mittleren Wert der Stromstärke gilt ebenso:

$$i_m = \frac{2}{\pi} I = 0{,}637\; I.$$

74. Der effektive oder wirksame Wert der Stärke oder der EMK eines Wechselstromes ist gleich der Quadratwurzel aus dem mittleren Quadrat der Stromstärken oder der $EMKe$:

$$i_w = \sqrt{(i^2)_m} \quad \text{und} \quad e_w = \sqrt{(e^2)_m}.$$

Alle innerhalb einer Periode vorkommenden Stromstärken (oder $EMKe$) kann man in je zwei zerlegen, die aufeinander senkrecht stehen, wie OJ' und OJ'' (Fig. 125). Die zugehörigen Momentanwerte sind Oi' und Oi''.

Nun ist:

$$\overline{Oi'}^2 + \overline{Oi''}^2 = \overline{OJ'}^2 - \overline{J'i'}^2 + \overline{OJ''}^2 - \overline{J''i''}^2.$$

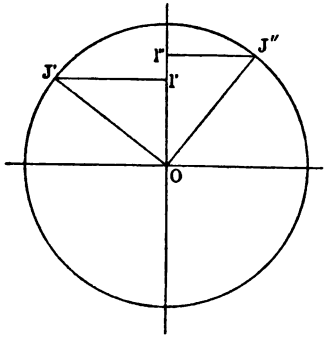
Beachtet man, daß $\measuredangle OJ'i' \cong OJ''i''$, woraus folgt, daß $Oi' = J''i''$ und $Oi'' = J'i'$, so ist, wenn man $OJ' = OJ''$ mit I bezeichnet:

$$^1/_2 \left(\overline{Oi'}^2 + \overline{Oi''}^2\right) = I^2 - {}^1/_2 \left(\overline{Oi'}^2 + \overline{Oi''}^2\right),$$

woraus:

$$^1/_2 \left(\overline{Oi'}^2 + \overline{Oi''}^2\right) = {}^1/_2 I^2.$$

Fig. 125.



Teilt man nun den Halbkreis in eine große Anzahl gleicher Teile, und nimmt immer je 2 Stromstärken zusammen, deren Maximalwerte aufeinander senkrecht stehen, addiert und dividiert durch die Anzahl der Teile, so wird, wenn i_w die wirksame Stromstärke vorstellen soll:

$$i_w = \sqrt{(i^2)_m} = \frac{I}{\sqrt{2}} = 0{,}707\ I.$$

Desgleichen ist, wenn e_w die wirksame EMK bedeutet:

$$e_w = \sqrt{(e^2)_m} = \frac{E}{\sqrt{2}} = 0{,}707\ E.$$

Weiter ergiebt sich:

$$i_m : i_w = 0{,}9 \quad \text{und} \quad e_m : e_w = 0{,}9.$$

75. Ein Gleichstrom von der $EMK\ E$ und der Stromstärke I giebt denselben Effekt, wie ein Wechselstrom, wenn die Maximalwerte des letzteren gleich $E\sqrt{2}$ und $I\sqrt{2}$ sind; die wirksamen Größen des Wechselstromes sind alsdann E und I, und die erzeugte Wärme $E \cdot I$ ist ebenso groß wie beim Gleichstrom.

76. Die Stromstärke wird in der Sekundärspule zweimal so klein und die EMK zweimal so groß wie in der Primärspule. Sind J_1 und J_2 die Stromstärken, sowie R_1 und R_2 die Widerstände in der Primär- bezw. Sekundärspule, so gilt für gleiche in einer Sekunde entstehende Wärmemengen:

$$J_1^2 \cdot R_1 = J_2^2 \cdot R_2.$$

Da nun $J_1 = 2J_2$, so muß $R_2 = 4R_1$ sein. Der Sekundärdraht hat die doppelte Länge wie der Primärdraht; hat er dabei den halben Querschnitt, so ist $R_2 = 4R_1$; das Kupfergewicht beider Spulen und damit der Erwärmungsgrad ist derselbe.

77. Auf die zehnfache Erstreckung. — Wird ein Strom auf die zehnfache EMK hinauf transformiert, so beträgt die Stromstärke (annähernd) $^1/_{10}$ von der, welche die Primärspule in eine mit ihr verbundene Leitung schicken würde. Giebt man nun der an die Sekundärspule angeschalteten Leitung die zehnfache Länge und einen zehnmal kleineren Querschnitt, so wird die entstehende

Wärme in einer Sekunde in der Sekundärleitung ebenso groß, wie in der Leitung, welche man sich an die Primärspule geschaltet denken kann. Das Kupfergewicht beider Leitungen ist dasselbe und somit auch der Erwärmungsgrad. Man kann also die höhere Spannung mit denselben Kupferkosten und demselben Erwärmungsgrad (bezw. Energieverlust) zehnmal weiterleiten, als die niedere. Vorteil der Transformierung auf hohe Spannung! Am Ende der Fernleitung muß man alsdann wieder auf niedere „Gebrauchsspannung“ (etwa 110 oder 100 Volt) herabtransformieren.

Auflösungen zu XXXIII.

1. Aus $2:3 = 16:x$ folgt $x = 24$ g.
2. Aus $(16+2):10 = 16:x$ folgt $x = 8{,}88\ldots$ g O.
   Aus $18:10 = 2:y$ folgt $y = 1{,}11\ldots$ g H.
3. Aus $46:10 = 18:x$ folgt $x = 3{,}91$ g.
4. Aus $(23+35{,}5):10 = 23:x$ folgt $x = 3{,}93$ kg Na.
   Aus $58{,}5:10 = 35{,}5:y$ folgt $y = 6{,}07$ kg Cl.
5. Aus $(12+2.16):10 = 12:x$ folgt $x = 2{,}73$ g C.
   Aus $44:10 = 2.16:y$ folgt $y = 7{,}27$ g O.
6. Aus $(40+12+3.16):100 = 44:x$ folgt $x = 44$ g.
   Aus $100:100 = 56:y$ folgt $y = 56$ g.
7. Aus $(2.1+32+4.16):100 = 32:x$ folgt $x = 32{,}65$ g.
8. Aus $39{,}1+14+3.16):100 = 3.16:x$ folgt $x = 47{,}48$ g O.
   Aus $101:100 = 14:y$ folgt $y = 13{,}86$ g N.
   Aus $101:100 = 39{,}1:z$ folgt $z = 38{,}71$ g K.
9. Aus $216:100 = 16:x$ folgt $x = 7{,}41$ g O.
   Aus $216:100 = 200:y$ folgt $y = 92{,}59$ g Hg.
10. Aus $245{,}2:200 = 96:x$ folgt $x = 78{,}3$ g.
11. $\frac{78{,}3}{1{,}43} = 54{,}76$ Liter.
12. Aus $(3.87):100 = (2.16):x$ folgt $x = 12{,}26$ g.
13. Aus $(2.16):(10.1{,}43) = (3.87):x$ folgt $x = 116{,}63$ g.
14. Aus $87:100 = \frac{16}{1{,}43}:x$ folgt $x = 12{,}86$ Liter.
15. Aus $87:100 = 98:x$ folgt $x = 112{,}6$ g.
16. Aus $87:100 = 151:x$ folgt $x = 173{,}6$ g.
17. Aus $65{,}2:x = 2:25$ folgt $x = 815$ g.
18. a) Aus $65{,}2:1000 = \frac{2}{0{,}09}:x$ folgt $x = 340{,}83$ Liter.
    b) Aus $65{,}2:1000 = 98:x$ folgt $x = 1503{,}1$ Liter.
19. 1 Liter atmosphärische Luft enthält 0,21 Liter Sauerstoff. Nun wiegt 1 Liter Luft 1,3 g, folglich 1 Liter Sauerstoff $1{,}3 \times 1{,}1$ g, also 0,21 Liter Sauerstoff wiegen $1{,}3 \times 1{,}1 \times 0{,}21 = 0{,}3$ g, daher ergiebt sich aus $(5.16):0{,}3 = 62:x$, $x = 0{,}23$ g Phosphor.

20. Aus $101 : 500 = 63 : x$ folgt $x = 311{,}9$ g.
Aus $101 : 500 = 136 : x$ folgt $x = 673{,}2$ g.

21. Aus $101 : 500 = 98 : x$ folgt $x = 485{,}15$ g.

22. Aus $71 : (10 . 3{,}17) = 87 : x$ folgt $x = 38{,}84$ g.

23. Zu den in voriger Aufgabe gefundenen 38,84 g Mangansuperoxyd sind, wie man aus $87 : 38{,}84 = 4 . (35{,}5 + 1) : x$ findet, 65,2 g Chlorwasserstoff erforderlich. Dieser Chlorwasserstoff ist aber in der angewandten Salzsäure mit einer Wassermenge verbunden, die sich der Aufgabe gemäß aus $38 : 65{,}2 = 62 : y$, nämlich zu 106,4 g berechnet. Die erforderliche Salzsäure ist also $106{,}4 + 65{,}2 = 171{,}6$ g.
Aus $71 : 198 = 31{,}7 : x$ folgt $x = 88{,}4$ g $MnCl_2 + 4H_2O$.

24. Aus $71 : 10 . 3{,}17 = 2 . 58{,}5 : x$ folgt $x = 52{,}24$ g.

25. Aus $71 : 10 . 3{,}17 = 87 : x$ folgt $x = 38{,}84$ g.

26. Aus $71 : 10 . 3{,}17 = 2 . 98 : x$ folgt $x = 87{,}51$ g.

27. Aus $73 : 10 . 1{,}63 = 2 . 58{,}5 : x$ folgt $x = 26{,}12$ g.

28. Aus $73 : 10 . 1{,}63 = 98 . x$ folgt $x = 21{,}88$ g.

29. Aus $10\bar{0} : 80 = 44 : x$ folgt $x = 35{,}2$ g.

30. a) Aus $44 : 10 . 1{,}977 = 100 : x$ folgt $x = 44{,}93$ g.
b) Man findet durch ähnliche Schlüsse wie in Aufgabe 23 die erforderliche Menge Salzsäure $= 53{,}5 + 32{,}8 = 86{,}3$ g.
c) Aus $44 : 219 = 19{,}77 : x$ folgt $x = 98{,}4$ g $CaCl_2 + 6H_2O$.

31. Aus $63 : 64 = 20 : x$ folgt $x = 20{,}32$ g SO_2.
Aus $\frac{0{,}773 . 20{,}32}{2{,}217}$ folgt $x = 7$ Liter SO_2 (ungefähr).
Aus $63 : 196 = 20 : y$ folgt $y = 62{,}2$ g H_2SO_4.
Aus $63 : 249 = 20 : z$ folgt $z = 79$ g $CuSO_4 + 5H_2O$ (nahezu).

32. 7,9 g = 5,9 Liter NO.
66,6 . . . g HNO_3.
81,3 $Cu(NO_3)_2 + 3H_2O$.
Die Gleichung lautet (abgesehen vom Kristallwasser):
$$3Cu + 8HNO_3 = 3Cu(NO_3)_2 + 2NO + 4H_2O.$$

33. 10,4 g = 7,4 Liter H_2S.
85,3 g $FeSO_4 + 7H_2O$.

34. 4,8 g = 6,3 Liter NH_3.
8 g CaO.
16 g $CaCl_2$.

35. 29,7 g $Cu(NO_3)_2$.
27 g $AgNO_3$.
30 g HNO_3.

36. 4,9 g KOH.
10,3 g Ag_2O.
9,6 g Ag.
0,7 g O.

37. 1,4 g $N_4H.Cl$.
8,6 g $PtCl_4$.